牧野書店, 微分方程式 改訂版, 正誤表

1　2003/01/10 改訂版

p.1, ↓ 6.		誤 $y(x) = \int f(t)dt + C$ 正 $y(x) = \int f(x)dx + C$
p.9, ↓ 13.		誤 $\left\{\frac{dz}{dx} + (g(x) + 2f(x)y_0) + f(x)z^2\right\}$ 正 $\left\{\frac{dz}{dx} + (g(x) + 2f(x)y_0)z + f(x)z^2\right\}$
p.9, ↑ 9. (1.15)		誤 $\frac{dz}{dx} + (g(x) + 2f(x)y_0) + f(x)z^2 = 0$ 正 $\frac{dz}{dx} + (g(x) + 2f(x)y_0)z + f(x)z^2 = 0$
p.10, ↑ 3. 問 1.2.9(2)		誤 特殊解 $y = \frac{x^2 - \sqrt{3}}{x^3}$ 正 特殊解 $y = \frac{x + \sqrt{3}}{x^2}$
p.12, ↑ 10.		誤 $P(x, y_0) + P_y(x, y) - P_y(x, y_0) = P(x, y),$ 正 $P(x, y_0) + P(x, y) - P(x, y_0) = P(x, y),$
p.18, ↓ 10. 例題 1.4.3		誤 $y''' - 3y' - 2y = 0$ を解け. 正 $y''' - 3y' + 2y = 0$ を解け.
p.18, ↓ 11. 例題 1.4.3		誤 特性方程式 $\xi^3 - 3\xi - 2 = (\xi - 1)^2(\xi + 2) = 0$ は 正 特性方程式 $\xi^3 - 3\xi + 2 = (\xi - 1)^2(\xi + 2) = 0$ は
p.18, ↑ 8. 例 1.4.5		誤 これは変数変換 $x = e^t$ に 正 これは $x > 0$ に対して変数変換 $x = e^t$, $x < 0$ に対して $x = -e^t$ とおくことに
p.18, ↑ 5. 例 1.4.5		誤 $e^t \frac{dy}{dx}$ 正 $\pm e^t \frac{dy}{dx}$
p.19, ↓ 6. 例題 1.4.6		誤 $y = Cx^{\sqrt{a}} + Dx^{-\sqrt{a}}$ 正 $y = C\lvert x\rvert^{\sqrt{a}} + D\lvert x\rvert^{-\sqrt{a}}$

p.22, ↓ 3.		誤 正	$\frac{1}{2\lambda}x\cos(\lambda x+\mu).$ $-\frac{1}{2\lambda}x\cos(\lambda x+\mu).$
p.22, ↓ 8. 例題 1.5.2		誤 正	D^2-3D+2 に対し公式 (7) より D^2-3D+2 に対し公式 (6) より
p.22, ↓ 9. 例題 1.5.2		誤 正	$\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{2}{3}D-\frac{1}{2}D^2\right)+\left(\frac{2}{3}D-\frac{1}{2}D^2\right)^2+\cdots\right)x^2$ $\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{3}{2}D-\frac{1}{2}D^2\right)+\left(\frac{3}{2}D-\frac{1}{2}D^2\right)^2+\cdots\right)x^2$
p.23, ↓ 2. 例題 1.5.4		誤 正	また, 公式 (5) より特殊解は また, 公式 (5), (6) より特殊解は
p.23, ↓ 11. 例題 1.5.6		誤 正	また, 公式 (9), (11) より特殊解は また, 公式 (7), (13) より特殊解は
p.23, ↓ 11. 例題 1.5.6	2 刷	誤 正	また, 公式 (9), (13) より特殊解は また, 公式 (7), (13) より特殊解は
p.24, ↓ 3.		誤 正	**例 1.5.8** **例題 1.5.8**
p.29, ↑ 1. 例題 1.6.8		誤 正	$Q_1''(\xi)=-\frac{1}{6}$ $Q_1''(0)=-\frac{1}{6}$
p.30, ↓ 5. 類題 1.6.9(1)	2 刷	誤 正	$y'(x)+y(x-1)$ $y(x)-y(x-1)$
p.35, ↓ 6.		誤 正	$D^{(l-j)}b(x)$ $D^{l-j}b(x)$
p.36, ↑ 1.		誤 正	(7) 同様に, (7) 同様に $P(0)\neq 0$ として,
p.37, ↓ 9.		誤 正	$\frac{(-1)^l}{(P(\xi))^{l+1}}$ を代入 $\frac{(-1)^l l!}{(P(\xi))^{l+1}}$ を代入

p.39, ↓ 5.	2刷	誤	(9) は公式 (2) を m 回繰り返し用いればよい.
		正	(9) は明らか.
p.39, ↑ 1.		誤	$\dfrac{1}{2\lambda}x\cos(\lambda x+\mu)$.
		正	$-\dfrac{1}{2\lambda}x\cos(\lambda x+\mu)$.
p.40, ↓ 13.		誤	かつ関係式
		正	かつ, (x_0, y_0, p_0) の近傍で関係式
p.40, ↓ 14.		誤	コーシー問題
		正	$y(x)$ がコーシー問題
p.40, ↓ 16.		誤	は
		正	の解で, かつ $y'(x_0)=p_0$ をみたすことと, $y(x)$ が
p.40, ↓ 18.		誤	と同値になり
		正	の解であることとが同値になり
p.41, ↓ 4–5.		誤	正規形であれば一般解が存在するから, 特異解 $\psi(x)$ は
		正	F が条件 (b) をみたすとする. (1.39) の解 $\psi(x)$ に対して $F_p(x_0, \psi(x_0), \psi'(x_0)) \neq 0$ なる点 x_0 が存在すれば, x_0 の近くで ψ は (1.41) の一意解に一致し, $y'=f(x,y)$ の一般解で表せることになる. よって $\psi(x)$ が特異解ならば
p.41, ↑ 1. 例題 1.7.2		誤	$\left(\dfrac{C\pm x}{2}\right)^2$
		正	$\left(\dfrac{x+C}{2}\right)^2$ (図 1.1 中の式も同様に修正)
p.42, ↑ 11. 例 1.7.3		誤	$\phi(x,y,C)=y-\dfrac{(x\pm C)^2}{2}=0$
		正	$\phi(x,y,C)=y-\left(\dfrac{x+C}{2}\right)^2=0$
p.42, ↑ 11. 例 1.7.3	2刷	誤	$\phi_C(x,y,C)=-(x\pm C)=0$
		正	$\phi_C(x,y,C)=-\dfrac{x+C}{2}=0$
p.42, ↑ 3.		誤	$y'=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\pm\sqrt{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-1}$
		正	$y'=\dfrac{y}{x}\pm\sqrt{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-1}$

p.42, $\uparrow$ 2.		誤	一般解 $y=(2C+1)-c^2x^2$ および $y=\dfrac{x^2+C^2}{2C}$ を得る.
		正	一般解 $y=\dfrac{x^2+C^2}{2C}$ を得る.
p.42, $\uparrow$ 1. $\sim$ p.43, $\downarrow$ 2.		誤	後者とそれを C で微分した式から C を消去して $y=\pm x$ を, また前者からは同様にして $y=\dfrac{x^2+1}{x^2}$ を得る. このうち与式の解になっているのは $y=\pm x$ であるので,
		正	これを, $\phi(x,y,C):=x^2+C^2-2Cy=0$ と表し, $\phi_C(x,y,C)=0$ とから C を消去して $y=\pm x$ を得る. これは与式の解であり,
p.43, $\downarrow$ 2.		誤	これが特殊解である
		正	これが特異解である
p.43, $\downarrow$ 2. 問 1.7.5(1)	2 刷	誤	$y=2xy'+3y'^2$
		正	$y=y'^2-xy'+\dfrac{x^2}{2}$
p.43, $\downarrow$ 2. 問 1.7.5(2)	2 刷	誤	$xy'^2-2yy'+x=0$
		正	$xy'^2+2xy'-y=0\ (x>0)$
p.44, $\downarrow$ 9. 例題 1.7.6		誤	$\pm\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\Big)$
		正	$\pm2\sqrt{x}$
p.62, $\uparrow$ 13.		誤	$\Phi(r)$ および $\Psi(r)$
		正	$\Phi(r)$ および $\Psi(\theta)$
p.65, $\downarrow$ 6.		誤	$g(\theta)=u(1,\theta)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(1,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta)$
		正	$g(\theta)=u(1,\theta)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}u_n(1,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta)$
p.67, $\uparrow$ 3.	2 刷	誤	$\Delta u=u_{xx}+v_{yy}=(u_x)_x+(v_y)_y$
		正	$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=(u_x)_x+(u_y)_y$
p.92, $\downarrow$ 1. (3.9)		誤	$x_{k+1}=$
		正	$x_{k+1}(t)=$
p.92, $\downarrow$ 3. (3.10)		誤	$\\|x_k-\xi\\|$
		正	$\\|x_k(t)-\xi\\|$

p.93, ↓ 4.		誤 正	$\\|x_{k+1} - x_k\\|$ $\\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\\|$
p.93, ↓ 6.		誤 正	$\\|x_{k+1} - x_k\\|$ $\\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\\|$
p.93, ↓ 8.		誤 正	$\\|x_{k+1} - x_k\\|$ $\\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\\|$
p.95, ↓ 1.		誤 正	$-f(s, y(t))$ $-f(s, y(s))$
p.95, ↓ 9. 補題 3.1.2		誤 正	負でない連続関数 非負値連続関数
p.96, ↓ 7. 定理 3.1.3		→	付記参照のこと.
p.97, ↓ 11.		誤 正	スカラーの微分方程式 単独の微分方程式
p.98, ↓ 2–4. 定理 3.2.1		→	初期値問題 (3.22) の解 $y(t)$ が $t \in [\tau, \tau + a]$ で存在することについては付記参照のこと.
p.98, ↓ 6.		誤 正	$y'(t_1) < y'(t_1)$ $y'(t_1) < u'(t_1)$
p.100, ↓ 3.		誤 正	**同次線形微分方程式** **1 階同次線形微分方程式**
p.100, ↓ 3.		誤 正	**非同次線形微分方程式** **1 階非同次線形微分方程式**
p.102, ↓ 1.		誤 正	これを**基本行列** 正則な行列解を**基本行列**
p.107, ↑ 9.		誤 正	**定数係数線形微分方程式** **定数係数同次線形微分方程式**
p.109, ↑ 5. (3.39)		誤 正	$-a_{n-1}x_2$ $-a_{n-1}(t)x_2$
p.111, ↓ 8.		誤 正	場合である. 場合である. x や f が n 次元ベクトルのとき, すなわちこれらが $\mathbb{R}^n$-値関数のときは n **次元自励系**, f が x の 1 次式のときは**線形自励系**ともいう.

p.111, ↓ 10.		誤	まずは 2 次元線形微分方程式の
		正	まずは 2 次元線形自励系の
p.111, ↓ 12.		誤	2 次元線形微分方程式
		正	2 次元線形自励系
p.111, ↑ 2.		誤	3.6 節で見たように,
		正	3.4 節で見たように,
p.111, ↑ 2.		誤	$y = Px$
		正	$x = Py$
p.112, ↓ 1.		誤	$\dfrac{dy}{dt} = (PAP^{-1})y$
		正	$\dfrac{dy}{dt} = (P^{-1}AP)y$
p.112, ↓ 2.		誤	このとき, PAP^{-1} は
		正	このとき, $P^{-1}AP$ は
p.116, ↓ 2.		誤	2 次元の自励系微分方程式
		正	2 次元自励系
p.117, ↓ 1.		誤	$x(t_k) \in \bigcup_{s \leq t_k} x(t)$
		正	$x(t_k) \in \bigcup_{s \leq t} x(t)$
p.124, ↑ 11. 問題 3.4		誤	$f(t, x)$ が
		正	連続関数 $f(t, x)$ が
p.126, ↓ 3. 問題 3.11(1)		誤	$\dfrac{dx}{dt} = x - y$
		正	$\dfrac{dy}{dt} = x - y$
p.126, ↓ 3. 問題 3.11(2)		誤	$\dfrac{dx}{dt} = x - y$
		正	$\dfrac{dy}{dt} = x - y$
p.126, ↓ 4. 問題 3.11(3)		誤	$\dfrac{dx}{dt} = x + 3y$
		正	$\dfrac{dy}{dt} = x + 3y$

p.126, ↓ 4. 問題 3.11(4)		誤	$\dfrac{dx}{dt} = 3x + y$
		正	$\dfrac{dy}{dt} = 3x + y$
p.126, ↓ 5. 問題 3.12		誤	スカラーの
		正	単独の
p.126, ↑ 7. 問題 3.14		誤	2 つの関数 $f(t,x)$, $g(t,x)$ が
		正	2 つの関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ が
p.126, ↑ 4. 問題 3.14		誤	$\dfrac{dx}{dt} = g(x,y)$
		正	$\dfrac{dy}{dt} = g(x,y)$
p.150, ↓ 13–16. 定義 4.4.8	2 刷	誤	任意の $t \in [0,1]$ に対して $$f(0,t) = \phi_0(t), \quad f(1,t) = \phi_1(t)$$ をみたすものが存在することをいう [8].
		正	任意の $t \in [0,1]$ に対して $f(0,t) = \phi_0(t)$, $f(1,t) = \phi_1(t)$ をみたし, また任意の $s \in [0,1]$ に対して $f(s,0) = \phi_0(0)$, $f(s,1) = \phi_0(1)$ をみたすものが存在することをいう [8].
p.161, ↓ 12.	3 刷	誤	$qI_m - q\exp(2\pi\sqrt{-1}J_m)$
		正	$q\exp(2\pi\sqrt{-1}J_m) - qI_m$
p.161, ↑ 8.	3 刷	誤	$(qI_m - q\exp(2\pi\sqrt{-1}J_m))^{m-1}$
		正	$(q\exp(2\pi\sqrt{-1}J_m) - qI_m)^{m-1}$
p.161, ↑ 5.	3 刷	誤	$(qI_m - q\exp(2\pi\sqrt{-1}J_m))^{m}$
		正	$(q\exp(2\pi\sqrt{-1}J_m) - qI_m)^{m}$
p.165, ↑ 5–4. 系 4.6.6	2 刷	誤	方程式 (RS1) はオイラー型の方程式
		正	方程式 (RS1) は, 適当な $R \in GL(m, \mathcal{R}_\rho)$ による変換 $u = Rv$ で, オイラー型の方程式
p.166, ↑ 3. 補題 4.6.8	2 刷	誤	$(I_s - \mu\,\mathrm{ad}_J)E_\mu K = K$
		正	$(I_s - \mu\,\mathrm{ad}_J)E_\mu K = E_\mu(I_s - \mu\,\mathrm{ad}_J)K = K$
p.166, ↑ 1.	2 刷	誤	左辺を実際に計算し,
		正	E_μ と $I_s - \mu\,\mathrm{ad}_J$ は可換である. 左辺を実際に計算し,

p.175, ↓ 1.	2 刷	誤 正	$\lvert u\rvert \le \lvert z\rvert^{-N}$ $\exists C,\ \lvert f(z)\rvert \le C\lvert z\rvert^{-N}$
p.181, ↓ 4. 問 1.1.8(5)		誤 正	$y = \pm\sqrt{2\left(\log x + \dfrac{x^2}{2} + C\right)}$ $y = \pm\sqrt{x^2 + 2\log\lvert x\rvert + C}$
p.181, ↓ 5. 問 1.1.8(7)		誤 正	$y = \pm\sqrt{\log(e^x - 1) + C}$ $y = \pm\sqrt{\log\lvert e^x - 1\rvert + C}$
p.181, ↓ 6. 問 1.1.9(1)		誤 正	$y = x(\log x + C)$ $y = x(\log\lvert x\rvert + C)$
p.181, ↑ 9. 問 1.2.5(8)		誤 正	$y = \dfrac{1}{24\sin x}(6\sin 2x - 3\sin 4x - 16\cos^3 x + 24x + C)$ $y = \dfrac{1}{24\sin x}(-3\cos 4x - 6\cos 2x + 4\sin 3x + 12\sin x + C)$
p.181, ↑ 7. 問 1.2.6(3)		誤 正	$\dfrac{1}{y^3} = -2\sin x\cos^2 x - \sin x + C\cos^2 x$ $\dfrac{1}{y^3} = -2\sin x\cos^2 x - \sin x + C\cos^3 x$
p.181, ↑ 6. 問 1.2.9(1)		誤 正	$y = \dfrac{x^2 - C}{x(x^2 + C)}$ $y = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{3x^2}{x^3 + C}$
p.181, ↑ 2. 問 1.3.6(5)		誤 正	$\log\dfrac{x}{y} + x^3y^2 = C$ $\log\left\lvert\dfrac{x}{y}\right\rvert + x^3y^2 = C$
p.182, ↓ 4. 問 1.3.7(6)		誤 正	積分因子 xy^2, 一般解 $\log x - \dfrac{x}{y} = C$ 積分因子 $1/xy^2$, 一般解 $\log\lvert x\rvert - \dfrac{x}{y} = C$
p.182, ↓ 6. 問 1.4.8(4)		誤 正	$y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$ $y = e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$
p.182, ↓ 12. 問 1.4.9(1)		誤 正	$(C_1 + C_2\log x)\dfrac{1}{x}$ $(C_1 + C_2\log\lvert x\rvert)\dfrac{1}{x}$

p.182, ↓ 13. 問 1.4.9(4)		誤 正	$C_1\cos(\log x)+C_2\sin(\log x)$ $C_1\cos(\log\lvert x\rvert)+C_2\sin(\log\lvert x\rvert)$
p.182, ↑ 2. 問 1.7.5(1)	2 刷	誤 正	$y=-\dfrac{x^2}{3}$ $y=\dfrac{x^2}{4}$
p.182, ↑ 2. 問 1.7.5(2)	2 刷	誤 正	$y=\pm x$ $y=-x$
p.183, ↓ 4. 問題 1.1(6)		誤 正	$x+y+\log xy=C$ $x+y+\log\lvert xy\rvert=C$
p.183, ↓ 6. 問題 1.1(13)		誤 正	$x+\dfrac{x^2}{2}+y-\log y=C$ $x+\dfrac{x^2}{2}+y-\log\lvert y\rvert=C$
p.183, ↓ 7. 問題 1.1(15)		誤 正	$y=\log\dfrac{x}{1+x}+C$ $y=\log\left\lvert\dfrac{x}{1+x}\right\rvert+C$
p.183, ↓ 13. 問題 1.2(4)		誤 正	$e^{\frac{3x}{y}}(x+y)^2=Cx^3$ $\dfrac{y^3}{x^2+y^2}=C$
p.183, ↓ 13. 問題 1.2(6)		誤 正	$y^3=3x^3\log Cx$ $y^3=3x^3(\log\lvert x\rvert+C)$
p.183, ↓ 14. 問題 1.2(8)		誤 正	$8x-4y+15\log(8x-12y-7)=C$ $8x-4y+5\log\lvert 8x-12y-7\rvert=C$
p.183, ↓ 16. 問題 1.2(14)		誤 正	$2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\log y=C$ $x>0$ では $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\log y=C$, $x<0$ では $\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\log(-y)=C$
p.183, ↓ 17. 問題 1.2(15)		誤 正	$2y=Cx^2-\dfrac{1}{C},\ x=0$ $2y=Cx^2-\dfrac{1}{C}$
p.183, ↑ 11. 問題 1.3(2)		誤 正	$y\cos x+\log\cos x=C$ $y\cos x+\log\lvert\cos x\rvert=C$

p.183, ↑ 10. 問題 1.3(4)		誤 $y = \frac{1}{2}(x+a)^4 + C(x+a)^2$ 正 $y = (x+a)^3 + C(x+a)^2$
p.183, ↑ 8. 問題 1.4(2)		誤 $y^4 = Ce^{-\frac{1}{2}x^2} + 1$ 正 $y^4 = Ce^{-2x^2} + 1$
p.183, ↑ 5. 問題 1.5(4)		誤 $\log x + x\log y + y^2 = C$ 正 $\log\lvert x\rvert + x\log y + y^2 = C$
p.183, ↑ 2. 問題 1.5(10)	2 刷	誤 $\frac{1}{2}x^2 + 2\log y - \frac{x}{y} = C$ 正 $\frac{1}{2}x^2 + 2\log\lvert y\rvert + \frac{x}{y} = C$
p.184, ↓ 1. 問題 1.6(2)		誤 $\sqrt{x}(x-y^2) = C$, 積分因子 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 正 $\sqrt{\lvert x\rvert}(x-y^2) = C$, 積分因子 $\frac{1}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$
p.184, ↓ 11. 問題 1.7(11)		誤 $y = C_1e^{ax} + C_2e^{-ax} + C_3\cos ax + C_4\sin x$ 正 $a \neq 0$ のとき $y = C_1e^{ax} + C_2e^{-ax} + C_3\cos ax + C_4\sin ax$, $a = 0$ のとき $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3$
p.184, ↓ 16. 問題 1.8(4)	2 刷	誤 (4) $(C_1\cos x + C_2\sin x)e^{-x}+$ 正 (4) $y = (C_1\cos x + C_2\sin x)e^{-x}+$
p.185, ↓ 2. 問題 1.9(1)		誤 $C_1\cos(\log x) + C_2\sin(\log x)$ 正 $C_1\cos(\log\lvert x\rvert) + C_2\sin(\log\lvert x\rvert)$
p.185, ↓ 2. 問題 1.9(2)		誤 $(C_1 + C_2\log x)x^2$ 正 $(C_1 + C_2\log\lvert x\rvert)x^2$
p.185, ↓ 3. 問題 1.9(4)		誤 $C_1 + C_2\cos(\log x) + C_3\sin(\log x)$ 正 $C_1 + C_2\cos(\log\lvert x\rvert) + C_3\sin(\log\lvert x\rvert)$
p.187, ↓ 7. 問題 2.6(1)	3 刷	誤 (1) $\frac{1}{2}\sin(\frac{3\pi x}{\ell})\cos(\frac{3\pi ct}{\ell})+$ 正 (1) $\sin(\frac{3\pi x}{\ell})\cos(\frac{3\pi ct}{\ell})+$
p.188, ↓ 1. 問題 3.3		誤 $\lVert f(t, x(t)))\rVert$ 正 $\lVert f(t, x(t))\rVert$

p.188, ↓ 8. 問題 3.3		誤 正	$\lvert \int_a^t u(s)v(s)ds \rvert$ $\left\lvert \int_a^t u(s)v(s)ds \right\rvert$
p.188, ↓ 9. 問題 3.3		誤 正	$\lvert \int_a^t u(s)v(s)ds \rvert$ $\left\lvert \int_a^t u(s)v(s)ds \right\rvert$
p.188, ↑ 5-4. 問題 3.4		誤 正	$(\tau, 0)$ を通る解は $v(t) = \dfrac{u(t_1)}{t_1 - \tau}(t - \tau)$ $(t_1, \|u(t_1)\|)$ を通る解は $v(t) = \dfrac{\|u(t_1)\|}{t_1 - \tau}(t - \tau)$
p.188, ↑ 4. 問題 3.4		誤 正	$u(t) \geq v(t)\ (t \leq t_1)$ $\|u(t)\| \geq v(t)\ (\tau < t \leq t_1)$
p.188, ↑ 3. 問題 3.4		誤 正	$u(\tau) = v(\tau) = 0$ と問題 3.2 より $\|u(\tau)\| = v(\tau) = 0$ より
p.188, ↑ 2. 問題 3.4		誤 正	$0 = \dfrac{dv(\tau)}{dt} \geq \lim_{t \to \tau+0} \dfrac{dv(t)}{dt} = \dfrac{u(t_1)}{t_1 - \tau} > 0$ $0 = \dfrac{d\|u\|}{dt}(\tau) \geq \lim_{t \to \tau+0} \dfrac{v(t)}{t - \tau} = \dfrac{u(t_1)}{t_1 - \tau} > 0$

2　付記

p.96 定理 3.1.3 と p.97 定理 3.2.1 では, 下記の, (改訂の際に削除した) 初期値問題の解の存在定理を暗黙のうちに使っている．この存在定理を参照の上, 定理 3.2.1 では証明の途中 p.98 の 2〜4 行目で初期値問題の解が大域的に存在するところに使っているのでその点に注意されたい．また定理 3.1.3 は他にも多数間違いがあるので新たに書き直した．こちらを参照されたい.

2.1　存在定理

(τ, ξ) を $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ の点, a, b を正の数とし,

$$\Omega_1 := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid -a + \tau \leq t \leq \tau + a,\ \|x - \xi\| \leq b\}$$

と定める．$f(t, x)$ を Ω_1 上の $\mathbb{R}^n$-値関数とするとき,
初期値問題の解の存在定理.　$f(t, x)$ は Ω_1 上で連続かつ $\|f(t, x)\| \leq M$ とする．このとき, $[\tau - \alpha, \tau + \alpha]$ 上で定義された (τ, ξ) を通る

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1}$$

の解が少なくとも 1 つ存在する．ここで $\alpha = \min\{a, \dfrac{b}{M}\}$.

証明 (コーシーの折れ線法). $[\tau, \tau+\alpha]$ 上のみで考える．$f(t,x)$ は有界閉集合 Ω_1 上で連続であるから一様連続である．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在して，任意の 2 点 $(t,x), (r,y) \in \Omega_1$ に対して

$$|t-r| \le \delta(\varepsilon), \|x-y\| \le \delta(\varepsilon) \Longrightarrow \|f(t,x) - f(r,y)\| \le \varepsilon \tag{2}$$

が成り立つ．

区間 $[\tau, \tau+\alpha]$ の分点 t_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ を

$$\tau = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \tau + \alpha$$

のようにとり，$[\tau, \tau+\alpha]$ を n 個の小区間 $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ に分ける．各小区間の長さはどれも $\delta(\varepsilon)$ および $\dfrac{\delta(\varepsilon)}{M}$ 以下，すなわち

$$\max\{t_k - t_{k-1} \mid k = 1, 2, \cdots, n\} \le \min\{\delta(\varepsilon), \frac{\delta(\varepsilon)}{M}\}. \tag{3}$$

とする．

この分点に応じて折れ線 $x = y(t)$ を次のように構成する．まず $y_0 = \xi$ とし，点 $P_0(t_0, y_0) = (\tau, \xi)$ を通り傾きが $f(t_0,, y_0)$ の直線を引き，それが $t = t_1$ と交わる点を $P_1(t_1, y_1)$ とする．すると $P_1 \in \Omega_1$ が言える．次に，点 $P_1(t_1, y_1)$ を通り傾きが $f(t_1, y_1)$ の直線を引き，それが $t = t_2$ と交わる点を $P_2(t_2, y_2)$ とすると，やはり $P_2 \in \Omega_1$ となる．この操作は n 回繰り返すことができ，$n+1$ 個の点 $P_0, \ldots, P_n$ が得られ，これらを順に線分でつないで折れ線 $P_0P_1P_2 \cdots P_n$ ができる．この折れ線をグラフに持つ関数を $x = y(t)$ で表すと，$y(t)$ は $t \in [\tau, \tau+\alpha]$ に対して定義され，

$$y(t_k) = y_k \quad (k = 0, 1, \cdots, n), \quad \text{とくに} \quad y(\tau) = \xi,$$

$k = 1, 2, \ldots, n$ について，

$$\begin{aligned} y(t) = y(t_{k-1}) + f(t_{k-1}, y(t_{k-1}))(t - t_{k-1}), \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \\ y'(t) = f(t_{k-1}, y(t_{k-1})), \quad t \in (t_{k-1}, t_k), \end{aligned} \tag{4}$$

をみたす．(もちろん $y(t)$ は分点では微分可能とは限らない)．よって，

$$\|y(t) - y(r)\| \le M\,|t-r| \quad t, r \in [\tau, \tau+\alpha] \tag{5}$$

となるから，(3) と合わせると

$$\|y(t) - y(t_{k-1})\| \le M \cdot \frac{\delta(\varepsilon)}{M} = \delta(\varepsilon), \quad t \in [t_{k-1}, t_k]$$

が得られる．一方 (2) と (3) より

$$\|f(t_{k-1}, y(t_{k-1})) - f(t, y(t))\| \le \varepsilon, \quad t \in [t_{k-1}, t_k]$$

となるから，(4) と合わせて，

$$\left\|y'(t) - f(t, y(t))\right\| \le \varepsilon, \quad t \ne t_k\,(k = 0, 1, \ldots, n).$$

このように，連続で，有限個の点を除いて C^1-級で，そこで $\left\|y'(t) - f(t, y(t))\right\| \le \varepsilon$ となる関数 $y(t)$ を (1) の **ε-近似解**という．ここまでの議論から，任意の正の数 ε に対して (1) の (τ, ξ) を通る ε-近

似解で, (5) をみたすものが存在することがわかる. (一般の ε-近似解も, (5) の M を $M+\varepsilon$ に変えた評価はみたす).

$n \to \infty$ のとき $\varepsilon_n \to 0$ となる正の数の減少列 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots$ をとり, おのおのの ε_n に対して (5) をみたす ε_n-近似解 $x_n(t)$ をとって, $[\tau, \tau+\alpha]$ 上の関数列 $\{x_n(t)\}_n$ を考える.

すると (5) より $\{x_n(t)\}_n$ は同等連続, さらに $|t-\tau| \le \alpha \le b/M$ および $x_n(\tau) = \xi$ に注意すると

$$\|x_n(t)\| \le \|\xi\| + b$$

より $\{x_n(t)\}_n$ は一様有界になる. したがって, アスコリ・アルツェラの定理から $[\tau, \tau+\alpha]$ 上ある連続関数 $x(t)$ に一様収束する $\{x_n(t)\}_n$ の部分列 $\{x_{n_k}(t)\}_k$ が存在する. この $x(t)$ が (τ, ξ) を通る (1) の解となることを示そう. それには教科書 (3.2) と同じ,

$$x(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, x(s))ds \tag{6}$$

をみたすことを言えばよい.

$x_n(t)$ に対して $h_n(t)$ を

$$h_n(t) = \begin{cases} \dfrac{dx_n(t)}{dt} - f(t, x_n(t)) & (x_n(t) \text{ の微係数が存在する } t) \\ 0 & (x_n(t) \text{ の微係数が存在しない } t) \end{cases}$$

と定義すると明らかに

$$\|h_{n_k}(t)\| \le \varepsilon_{n_k}. \tag{7}$$

$x_n(t)$ の微係数が存在しない点は有限個であるから

$$x_{n_k}(t) = \xi + \int_\tau^t \{f(s, x_{n_k}(s)) + h_{n_k}(s)\}ds \tag{8}$$

となる. (7) より任意の $\varepsilon > 0$ に対して番号 $N_1(\varepsilon)$ が存在して, $k \ge N_1(\varepsilon)$ ならば

$$\left\| \int_\tau^t h_{n_k}(s)ds \right\| \le \int_\tau^t \|h_{n_k}(s)\| \, ds \le \alpha\varepsilon$$

とできる. また, $f(t,x)$ の一様連続性から得られる $\delta(\varepsilon)$ ((2) を成立させる定数) に対して番号 $N_2(\delta(\varepsilon))$ が存在し, $k \ge N_2(\delta(\varepsilon))$ ならば

$$\|x_{n_k}(t) - x(t)\| < \delta(\varepsilon)$$

となり, このとき $t \in [\tau, \tau+\alpha]$ に対し

$$\|f(t, x_{n_k}(t)) - f(t, x(t))\| < \varepsilon \tag{9}$$

が成り立つ. よって $k \ge \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\delta(\varepsilon))\}$ に対し (9) より

$$\begin{aligned} &\left\| \int_\tau^t \{f(s, x_{n_k}(s)) + h_{n_k}(s) - f(s, x(s))\}ds \right\| \\ &\le \int_\tau^t \|f(s, x_{n_k}(s)) - f(s, x(s))\| \, ds + \int_\tau^t \|h_{n_k}(s)\| \, ds \le \alpha\varepsilon + \alpha\varepsilon = 2\alpha\varepsilon \end{aligned}$$

すなわち $k \to \infty$ のとき (8) の右辺は $\displaystyle\int_\tau^t f(s, x(s))ds$ に近づく. よって (6) が成立する.

2.2 定理 3.1.3

定理 3.1.3 I を開区間とし, $f(t,x)$ は $I\times\mathbb{R}^n$ 上で連続であり, さらに I 上で定義された非負値連続関数 $M(t)$, $N(t)$ が存在して

$$\|f(t,x)\|\le M(t)\,\|x\|+N(t) \tag{10}$$

をみたしているならば, $(\tau,\xi)\in I\times\mathbb{R}^n$ を通る (3.6) の解で τ を含む開区間で定義されたものは, 常に I 上に解として延長される.

証明. 開区間 $J_1,J_2\subset I$ および J_1 上の解 x_1, J_2 上の解 x_2 に対して, $J_1\subset J_2$ かつ $t\in J_1$ に対して $x_1(t)=x_2(t)$ となるとき $(J_1,x_1)\prec(J_2,x_2)$ と定める. 開区間 $J\subset I$ $(\tau\in J)$ 上で定義された (τ,ξ) を通る (3.6) の解 $x(t)$ に対して $(J,x)\prec(\tilde{J},\tilde{x})$ なる $(\tilde{J},\tilde{x})$ 全体の集合は順序 $\prec$ に関して帰納的順序集合をなすから, ツォルンの補題から極大元が存在する. よって最初から (J,x) が極大元とし, $J\subsetneq I$ と仮定して矛盾を導こう. ここでは J の右端点 β が I の右端点 b と異なる場合を扱うが, 左端点同士が異なる場合も同様である.

x は $t\in J$ について

$$x(t)=\xi+\int_\tau^t f(s,x(s))ds$$

をみたすから, (10) より $t\in[\tau,\beta)$ に対して

$$\begin{aligned}\|x(t)\|&\le\|\xi\|+\int_\tau^t\|f(s,x(s))\|\,ds\\&\le\|\xi\|+\int_\tau^t\{M(s)\,\|x(s)\|+N(s)\}ds\\&\le\|\xi\|+\int_\tau^t N(s)ds+\int_\tau^t M(s)\,\|x(s)\|\,ds.\end{aligned}$$

よって $f(t)=\|x(t)\|$, $g(t)=\|\xi\|+\displaystyle\int_\tau^t N(s)ds$, $h(s)=M(s)$ とおいて補題 3.1.2 を用いると

$$\|x(t)\|\le\|\xi\|+\int_\tau^t N(s)ds+\int_\tau^t\left\{\|\xi\|+\int_\tau^s N(r)dr\right\}M(s)\exp\left\{\int_s^t M(r)dr\right\}ds \tag{11}$$

を得る. (11) の右辺は $t<\beta$ のみならず $\beta\le t<b$ でも定義され, $\tau\le t<b$ 上連続となるから, 有界閉区間 $[\tau,\beta]$ 上で有界である. また $t_1,t_2\in[\tau,\beta)$ について

$$x(t_2)-x(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}f(t,x(t))dt$$

が成り立つが, $[\tau,\beta)$ での $x(t)$ の有界性と $I\times\mathbb{R}^n$ での $f(t,x)$ の連続性から $f(t,x(t))$ も $[\tau,\beta)$ で有界となることに注意すると, ある定数 C を用いて

$$\|x(t_2)-x(t_1)\|\le C\,|t_2-t_1|$$

と評価される.

主張. $\displaystyle\lim_{t\nearrow\beta}x(t)$ が存在する.

主張の証明. $n\to\infty$ のとき β に収束するような $[\tau,\beta)$ 内の 2 つの点列 $\{s_n\}_n$, $\{t_n\}_n$ を考える. もし $\{x(s_n)\}_n$ が収束すれば, $\|x(s_n)-x(t_n)\|\le C\,|s_n-t_n|$ において $n\to\infty$ とすることで,

$\{x(t_n)\}_n$ も収束して $\lim_{n\to\infty} x(t_n) = \lim_{n\to\infty} x(s_n)$ となることがわかる. 一方, β に収束する任意の列 $\{t_n\}_n \subset [\tau, \beta)$ に対して $\{x(t_n)\}_n$ は有界列だから収束部分列 $\{x(t_{n_k})\}_k$ が存在する. このときに列 $\{t_{n_k}\}_k$ を上記の列 $\{s_n\}_n$ とみなすことで, 実は部分列をとる前の $\{x(t_n)\}_n$ が収束していた, すなわち $\lim_{n\to\infty} x(t_n)$ が存在することがわかる.

以上から, β に収束する任意の列 $\{t_n\}_n \subset [\tau, \beta)$ に対して $\lim_{n\to\infty} x(t_n)$ が存在し, その極限値は列の取り方によらないことが言えたから, $\lim_{t\nearrow\beta} x(t)$ が存在する. (主張の証明終わり).

定理 3.1.3 の証明の続き. 主張から $\lim_{t\nearrow\beta} x(t)$ が存在するからそれを $\tilde{\xi}$ とおく. 存在定理より, ある $\delta > 0$ があって, (3.6) の $(\beta, \tilde{\xi})$ を通る解 $y(t)$ が $[\beta - \delta, \beta + \delta]$ 上で存在する. ここで

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t) & t \in J \\ y(t) & t \in [\beta, \beta + \delta) \end{cases}$$

と定めると, $\tilde{x}$ は $\tilde{J} := J \cup [\beta, \beta + \delta)$ 上定義された, (τ, ξ) を通る (3.6) の解となることが示せる. $\tilde{x}$ は J 上は x に一致するから $(J, x) \prec (\tilde{J}, \tilde{x})$ であり, また $\tilde{J} \supsetneq J$ であるから, (J, x) が極大であることに反する. (定理 3.1.3 の証明終わり).