Schmidtランクと部分空間

$(n+k) \times n$ 行列の n 次小行列式

Priyabrata Bag (Narsee Monjee Institute of Managemnt Studies)
Santanu Dey (Indian Institute of Technology Bombay)
渚　勝 (立命館大学, 千葉大学)[*1]
大坂　博幸 (立命館大学)[*2]

1. Introduction

この講演では2量子状態のヒルベルト空間 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ を扱う．純粋状態 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ の Schmidt 分解とは

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j |u_j\rangle \otimes |v_j\rangle,$$

ここで $\{u_j\}$ は $\mathbb{C}^m$ の正規直交系, $\{v_j\}$ は $\mathbb{C}^n$ の正規直交系, $\alpha_j > 0$ で $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j^2 = 1$ を満たす, ように書き表すことである．

純粋状態 $|\psi\rangle$ の Schmidt ランク $\mathrm{SR}(|\psi\rangle)$ とは, $|\psi\rangle$ の Schmidt 分解に現れる個数 k の最小値で定義される．

ヒルベルト空間 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ の状態 ρ を

$$\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$$

と純粋状態 $|\psi_j\rangle$, $p_j > 0$ で $\sum_j p_j = 1$ と分解するとき

$$l = \max_j \mathrm{SR}(|\psi_j\rangle)$$

とし, 分解に対応する l の最小数を Schmidt 数 $\mathrm{SN}(\rho)$ という．

$\mathcal{H}$ の部分空間 S で S の純粋状態の Schmidt ランクが k 以上のとき, S の元で表される状態の Schmidt 数は k 以上になる．とくに, S を生成する正規直交系のそれぞれが Schmidt ランク k 以上であれば, S の元で表される状態の Schmidt 数は k 以上になる．

任意の純粋状態 $|\psi\rangle \in S$ に対して $\mathrm{SR}(|\psi\rangle) \geq 2$ となる ような部分空間 S の最大次元は $(m-1)(n-1)$ であることが知られている ([2],[3])．また, $\mathrm{SR}(|\psi\rangle) \geq k$ となる ような部分空間 S の次元は $(m-k+1)(n-k+1)$ 以下であることも知られている ([1]).

2. 主結果

定理 1. $m, n \geq 4$ とする．$\mathcal{H}$ の次のような部分空間 $\mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{U}$ が構成できる．

(1) $\mathcal{U} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{S}$.

本研究は科研費 (課題番号:JP17K05285) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 15A15, 81P40, 81P68, 15A03
キーワード：entangled state, Schmidt rank, Schmidt number
[*1] e-mail: `nagisa@math.s.chiba-u.ac.jp`
[*2] e-mail: `osaka@se.ritsumeikan.ac.jp`

(2) $\dim \mathcal{S} = (m-1)(n-1)$, $\dim \mathcal{T} = (m-2)(n-2)$, $\dim \mathcal{U} = (m-3)(n-3)$.

(3) $\mathrm{SR}(|\psi\rangle) \geq \begin{cases} 2 & (|\psi\rangle \in \mathcal{S}) \\ 3 & (|\psi\rangle \in \mathcal{T}) \\ 4 & (|\psi\rangle \in \mathcal{U}) \end{cases}$.

主結果は上の命題に現れる空間の構成方法である．この構成を実行するために次のような $(n+3) \times n$ 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ -a & 1 & & & \\ a & -a & \ddots & & \\ -1 & a & \ddots & 1 & \\ & -1 & \ddots & -a & 1 \\ & & \ddots & a & -a \\ & & & -1 & a \\ 0 & & & & -1 \end{pmatrix}$$

を対象とし, $|a| \geq 5$ のとき

(1) 上の行列から, どの3つの行を削除しても可逆である

(2) 上の行列の列ベクトルの線型結合で0ベクトルでないものは少なくとも4つ以上の0でない成分を持つ

ことを調べる.

参考文献

[1] T. Cubitt, A. Montanaro, and A. Winter, On the dimension of subspaces with bounded schmidt rank, J. Math. Physics, 49(2):022107, 2008.

[2] K. R. Parthasarathy, On the maximal dimension of a completely entangled subspace for finite level quantum systems, Proc. Math. Sci. 114(4), 365–374, 2004.

[3] N. R. Wallach, An unentangled Gleason's theorem, Comtemporary Math., 2002.

[4] P. Bag, S. Dey, M. Nagisa, and H. Osaka, The order-n minors of certain $(n+k) \times n$ matrices, preprint.