1 Banach 空間, Hilbert 空間

1.1 ノルム空間, 内積空間

X を実数または複素数を係数とする線形空間とする. 主に複素線形空間を考える.

$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ がノルムであるとは

(1) $\|x\| \geq 0$ for any $x \in X$.

(2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ for $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in X$.

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ for $x, y, z \in X$.

となることである. このとき, X をノルム空間という.

Proposition 1.1. $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とするとき, $d(x, y) = \|x - y\|$ と定義して X は距離空間になる.

Proof. $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ が以下の性質を満たすことを示せば良い.

(1) $d(x, y) \geq 0$.

(2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

この性質は, ノルムの性質から容易に導くことができる. 確認の意味で (3) の証明を与えておく.

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

□

$(\cdot|\cdot) : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ が内積であるとは,

(1) $(x|x) \geq 0$ for all $x \in X$.

(2) $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(3) $(x|y) = \overline{(y|x)}$.

(4) $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

となることである．このとき X を内積空間という．

Theorem 1.2 (Cauchy-Schwarz)**.** $(X, (\cdot|\cdot))$ を内積空間とする．$x, y \in X$ に対して

$$|(x|y)|^2 \leq (x|x)(y|y)$$

が成立する．等号成立は x, y が一次従属のときに限る．

Proof. $x = 0$ のときは, 明らかに成立する．
$x \neq 0$ のとき, $(x|x) = 1$ と仮定する．

$$\begin{aligned} 0 &\leq (y - (y|x)x|y - (y|x)x) \\ &= (y|y) - |(x|y)|^2 - |(x|y)|^2 + |(x|y)|^2 = (y|y) - |(x|y)|^2 \end{aligned}$$

より $|(x|y)|^2 \leq (y|y) = (x|x)(y|y)$ となる．$(x|x) \neq 1$ のときは x を $x/\sqrt{(x|x)}$ にとりかえれば,

$$|(x|y)|^2 \leq (x|x)(y|y)$$

となる． □

Proposition 1.3. $(X, (\cdot|\cdot))$ を内積空間とする．$\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ と定義して X はノルム空間になる．

Proof. ノルムの性質 (1),(2),(3) は内積の性質から直ぐに得られる．ノルムの性質 (4) は Cauchy-Schwarz の不等式

$$\mathrm{Re}(x|y) \leq |(x|y)| \leq \|x\|\|y\|$$

を用いて

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y|x + y) = (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y) \\ &= (x|x) + 2\mathrm{Re}|(x|y)| + (y|y) \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

と導かれる． □

Proposition 1.4. $(X,(\cdot|\cdot))$ を内積空間とする．このとき以下が成立する．

(1) **(中線公式)**

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

(2) **(極等式)**

$$\begin{aligned}(x|y)=&\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}i^k(x+i^ky|x+i^ky)\\ =&\frac{1}{4}\{(x+y|x+y)-(x-y|x-y)\\ &\qquad +i(x+iy|x+iy)-i(x-iy|x-iy)\}.\end{aligned}$$

Proof. (1) $\|\cdot\|^2$ が内積で表せることを用いて変形します．

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2&=(x+y|x+y)+(x-y|x-y)\\ &=2(x|x)+2(y|y)=2(\|x\|^2+\|y\|^2).\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{Im}(x|y)=\mathrm{Re}(x|iy)$ に注意する．

$$(x+y|x+y)-(x-y|x-y)=2((x|y)+(y|x))=4\mathrm{Re}(x|y)$$

となるので

$$\begin{aligned}(x|y)=&\mathrm{Re}(x|y)+i\mathrm{Im}(x|y)=\mathrm{Re}(x|y)+i\mathrm{Re}(x|iy)\\ =&\frac{1}{4}\{(x+y|x+y)-(x-y|x-y)\\ &\qquad +i(x+iy|x+iy)-i(x-iy|x-iy)\}.\end{aligned}$$

□

1.2 ノルム空間の例

$X=\mathbb{C}^n=\{\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}={}^t(x_1,x_2,\ldots,x_n):x_i\in\mathbb{C}\}$ は 複素 n 次元線形空間である．$p\geq 1$ とするとき

$$\|\mathbf{x}\|_p=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p}$$

は X 上のノルムであることが以下の不等式からわかる.

Lemma 1.5 (Young の不等式)**.** $a, b \geq 0$ とし, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすとき

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

が成立する. 等号成立は $b = a^{p-1}$ のときに限る.

Proof. 関数 $y = x^{p-1}$ について, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ より

$$x = y^{1/(p-1)} = y^{q/p} = y^{q-1}$$

となる. つまり $y = x^{p-1}$ の逆関数は $y = x^{q-1}$ であり, 図より

$$ab \leq \int_0^a x^{p-1}dx + \int_0^b y^{q-1}dy = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

となる. 等号成立は, 図より $b = a^{p-1}$ のときに限ることがわかる. □

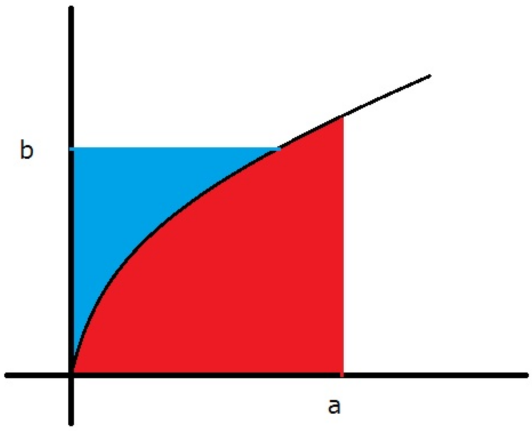

図 1: $y = x^{p-1}$, $x = y^{q-1}$ のグラフ

Lemma 1.6 (Hölder の不等式)**.** $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とする．このとき

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \leq (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{1/p} (\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q)^{1/q}$$

が成立する．

Proof. Young の不等式を用いて

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{1/p} (\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q)^{1/q}} |\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \\
\leq &\sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i|}{(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{1/p}} \frac{|b_i|}{(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q)^{1/q}} \\
\leq &\sum_{i=1}^{n} (\frac{|a_i|^p}{p \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p} + \frac{|b_i|^q}{q \sum_{i=1}^{n} |b_i|^q}) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}$$

と導くことができる． □

Lemma 1.7 (Minkowski の不等式)**.** $p \geq 1$ に対して

$$(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p)^{1/p} \leq (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{1/p} + (\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p)^{1/p}$$

が成立する．

Proof. $p = 1$ のときは, 絶対値の性質から導かれる．
$p > 1$ のとき $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ として Hölder の不等式を用いると

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i| |a_i + b_i|^{p-1} \\
\leq &\sum_{i=1}^{n} |a_i| |a_i + b_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |b_i| |a_i + b_i|^{p-1} \\
\leq &(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{1/p} (\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^{(p-1)q})^{1/q} + (\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p)^{1/p} (\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^{(p-1)q})^{1/q} \\
= &((\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{1/p} + (\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p)^{1/p}) (\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p)^{1/q}.
\end{aligned}$$

これより

$$(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p)^{1/p} = (\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p)^{1-1/q} \leq (\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p)^{1/p} + (\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p)^{1/p}$$

となる. □

Minkowski の不等式により, $p \geq 1$ のとき $\|\mathbf{x}\|_p$ は $X=\mathbb{C}^n$ 上のノルムになることが容易に確かめられる. また

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_i| : i=1,2,\ldots,n\}$$

も $X=\mathbb{C}^n$ 上のノルムになることがわかる.

$\mathbb{C}^n$ をノルム $\|\mathbf{x}\|_p$ でノルム空間と考えるときには $\ell^p(n)$ とかく. $(n \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty)$. $\|\mathbf{x}\|_\infty$ はノルム $\|\mathbf{x}\|_p$ の極限, つまり

$$\lim_{p\to\infty}\|\mathbf{x}\|_p = \|\mathbf{x}\|_\infty$$

と考えることができる.

$\mathbf{x} = {}^t(x_1,\ldots,x_n), \mathbf{y} = {}^t(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i} = \overline{{}^t\mathbf{y}}\mathbf{x} = \begin{pmatrix}\bar{y_1} & \cdots & \bar{y_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$$

と定義すると内積になる. このとき内積から定まるノルムは

$$\sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})} = \|\mathbf{x}\|_2$$

となる. したがって, $\ell^2(n)$ は内積空間である.

1.3 Banach 空間

距離空間 (X,d) の点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に**収束する**とは,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$$
$$(\forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ (n \geq N \Rightarrow d(x_n,x) < \epsilon))$$

となることである. $\{x_n\}$ が **Cauchy 列**であるとは,

$$\forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ (m, n \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon)$$

となることである. 収束列は Cauchy 列である.

距離空間 (X, d) が**完備**であるとは, X の任意の Cauchy 列が X の元に収束することである.

ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ が距離 $d(x, y) = \|x - y\|$ によって完備距離空間になるとき, X を **Banach 空間**という. 実数 $\mathbb{R}$, 複素数 $\mathbb{C}$ は絶対値によって完備である.

内積空間 $(X, (\cdot|\cdot))$ はノルム $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ によってノルム空間である. このノルムで Banach 空間であるとき, X を **Hilbert 空間**という.

Banach 空間の例 1　$C[0, 1]$ で閉区間 $[0, 1]$ 上の複素数値連続関数の全体を表わす. $C[0, 1]$ は関数のスカラー倍, 加法によって複素線形空間になる. $f \in C[0, 1]$ に対して

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$$

でノルムを定義するとき, Banach 空間になる.

$C[0, 1]$ が上のノルムでノルム空間になることは難しくないので, 完備性だけを確認する. $\{f_n\}$ を $C[0, 1]$ の Cauchy 列とする. つまり, 任意の $\epsilon > 0$ に対して $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n > m \geq N \Rightarrow \|f_n - f_m\| < \epsilon.$$

各点 $x \in [0, 1]$ に対して

$$n > m \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| < \epsilon$$

となるから $\{f_n(x)\}$ は複素数の Cauchy 列になる. 複素数の完備性から極限を持つので

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

となる.

次に $f \in C[0, 1]$ であることを確かめる. 任意の点 $x \in [0, 1]$ に対して, f_N の連続性から, $\delta > 0$ が存在して

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(y)| < \epsilon$$

とできる．このとき $|f(x) - f_N(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_N(x)| \leq \epsilon$ だから

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| < 3\epsilon$$

となり, f が連続であることがわかる．

任意の $x \in [0,1]$ に対して $n > m \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ だったので

$$|f(x) - f_m(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon.$$

したがって $m \geq N \Rightarrow \|f - f_m\| \leq \epsilon$ となり, $\{f_n\}$ は f に収束する．

Banach 空間の例 2　$p \geq 1$ として,

$$\ell^p = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}$$

$$\|\mathbf{x}\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{1/p}$$

とするとき, ℓ^p は Banach 空間である．

$p = 1$ のときだけを考える．ℓ^1 が線形空間で, $\|\mathbf{x}\|_1$ がノルムになることは難しくないので, 完備性だけを証明する．$\{\mathbf{x}_n\}$ を ℓ^1 の Cauchy 列とする．ただし, $\mathbf{x}_n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n, \ldots)$ とする．任意の $\epsilon > 0$ に対して $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n > m \geq N \Rightarrow \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n - x_i^m| < \epsilon.$$

このとき各 i に対して

$$n > m \geq N \Rightarrow |x_i^n - x_i^m| < \epsilon$$

となるから $\{x_i^n\}_{n=1}^{\infty}$ は複素数の Cauchy 列になる．複素数の完備性から極限を持つので

$$\lim_{n\to\infty} x_i^n = x_i$$

となる．

次に $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell^1$ であることを確かめる．K を任意の自然数として

$$\sum_{i=1}^{K} |x_i^n - x_i^N| < \epsilon$$

が得られる. $n \to \infty$ として

$$\sum_{i=1}^{K} |x_i - x_i^N| \le \epsilon.$$

K は任意だから

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - x_i^N| \le \epsilon.$$

このとき

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \le \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^N| + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - x_i^N| \le \|\mathbf{x}_N\|_1 + \epsilon$$

より $\mathbf{x} \in \ell^1$ であり

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\|_1 \le \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_N\|_1 + \|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_n\|_1 < 2\epsilon$$

から $\mathbf{x}$ に収束することがわかる.

上の議論と同様にして, $1 < p \le \infty$ のときもノルム $\|\mathbf{x}\|_p$ によってノルム空間 ℓ^p は Banach 空間であることを確かめられる. ただし,

$$\ell^\infty = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{C}, \sup |x_i| < \infty\}$$

である.

とくに

$$\ell^2 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$$

については, 次の内積を考えることができる.

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}.$$

右辺の和は $|x\bar{y}| \le \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2)$ より

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i \overline{y_i}| \le \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2) < \infty$$

となり絶対収束することがわかる.

内積の性質を満たすことは易しいので

$$\sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})} = \|x\|_2$$

より, ℓ^2 は Hilbert 空間であることがわかる.

1.4 Hilbert 空間

H は Hilbert 空間とする. つまり, H の内積を $(\cdot|\cdot)$ と表すとき, H はノルム $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot|\cdot)}$ に関して完備である.

Lemma 1.8. $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$ とするとき

$$(x_i|x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

ならば, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は一次独立である.

Proof. $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ として $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$ のとき

$$a_i = (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n|x_i) = 0$$

より $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. したがって一次独立であることがわかる. □

Lemma 1.9. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が一次独立のとき

$$y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$$
$$y_2 = \frac{x_2 - (x_2|y_1)y_1}{\|x_2 - (x_2|y_1)y_1\|}$$
$$\ldots\ldots$$
$$y_n = \frac{x_n - \sum_{i=1}^{n-1}(x_n|y_i)y_i}{\|x_n - \sum_{i=1}^{n-1}(x_n|y_i)y_i\|}$$

とおくと $y_1, y_2, \ldots, y_n$ は正規直交系になる, つまり

$$(y_i|y_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

をみたす.

Proof. $n = 1$ のとき $(y_1|y_1) = \frac{1}{\|x_1\|^2}(x_1|x_1) = 1$ であり $\{y_1\}$ は正規直交系である.

$\{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ が正規直交系であると仮定する．y_j $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ に対して

$$
\begin{aligned}
(y_n|y_j) &= \frac{1}{\|x_n - \sum_{i=1}^{n-1}(x_n|y_i)y_i\|}((x_n|y_j) - \sum_{i=1}^{n-1}(x_n|y_i)(y_i|y_j)) \\
&= \frac{1}{\|x_n - \sum_{i=1}^{n-1}(x_n|y_i)y_i\|}((x_n|y_j) - (x_n|y_j)) = 0 \\
(y_n|y_n) &= \frac{1}{\|x_n - \sum_{i=1}^{n-1}(x_n|y_i)y_i\|^2}(x_n - \sum_{i=1}^{n-1}(x_n|y_i)y_i|x_n - \sum_{i=1}^{n-1}(x_n|y_i)y_i) = 1
\end{aligned}
$$

となり帰納法により $\{y_1, \ldots, y_n\}$ が正規直交系であることがわかる． $\square$

Proposition 1.10. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が正規直交系であるとする．このとき任意の $x \in H$ に対して

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x|x_i)|^2 + \|x - \sum_{i=1}^{n}(x|x_i)x_i\|^2$$

が成立する．

とくに

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |(x|x_i)|^2 \qquad (\textit{Bessel}\,\text{の不等式})$$

が成立する．

Proof. $x = \sum_{i=1}^{n}(x|x_i)x_i + (x - \sum_{i=1}^{n}(x|x_i)x_i)$ に対して

$$
\begin{aligned}
&(\sum_{i=1}^{n}(x|x_i)x_i \mid x - \sum_{i=1}^{n}(x|x_i)x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x|x_i)(x_i|x) - \sum_{i,j=1}^{n}(x|x_i)(x_j|x)(x_i|x_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} |(x|x_i)|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(x|x_i)|^2 = 0
\end{aligned}
$$

つまり, 直交するベクトルに分解している. また

$$
\begin{aligned}
&\|x-\sum_{i=1}^{n}(x|x_i)x_i\|^2\\
=&(x-\sum_{i=1}^{n}(x|x_i)x_i \mid x-\sum_{i=1}^{n}(x|x_i)x_i)\\
=&\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|(x|x_i)|^2
\end{aligned}
$$

となるので求める関係式が導かれる. □

Lemma 1.11. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を正規直交系とし, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ とする. このとき任意の $x \in H$ に対し

$$
\|x-\sum_{i=1}^{n}(x|x_i)x_i\| \leq \|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\|
$$

が成り立つ.

Proof.

$$
\begin{aligned}
&\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\|^2\\
=&\|x-\sum_{i=1}^{n}(x|x_i)x_i+\sum_{i=1}^{n}((x|x_i)-\alpha_i)x_i\|^2
\end{aligned}
$$

$x-\sum_{i=1}^{n}(x|x_i)x_i$ は $x_1, \ldots, x_n$ と直交するので

$$
\begin{aligned}
=&\|x-\sum_{i=1}^{n}(x|x_i)x_i\|^2+\|\sum_{i=1}^{n}((x|x_i)-\alpha_i)x_i\|^2\\
\geq&\|x-\sum_{i=1}^{n}(x|x_i)x_i\|^2
\end{aligned}
$$

となる. □

Λ を添字集合とする. $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset H$ で

$$(x_\lambda|x_\mu) = \delta_{\lambda,\mu} = \begin{cases} 1 & \lambda = \mu \\ 0 & \lambda \neq \mu \end{cases}$$

のとき, $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ も正規直交系という. 一般的に Hilbert 空間 H は可算を超える正規直交系を持つこともある.

$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ が正規直交系であるとき, 任意の $x \in H$ に対して

$$\{\lambda \in \Lambda : (x|x_\lambda) \neq 0\}$$

は, たかだか可算集合であることが次のようにしてわかる.

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \{\lambda \in \Lambda : |(x|x_\lambda)| \geq 1\} \\ \Lambda_2 &= \{\lambda \in \Lambda : 1/2 \leq |(x|x_\lambda)| < 1\} \\ \Lambda_3 &= \{\lambda \in \Lambda : 1/4 \leq |(x|x_\lambda)| < 1/2\} \\ &\cdots\cdots \\ \Lambda_n &= \{\lambda \in \Lambda : 1/2^{n-1} \leq |(x|x_\lambda)| < 1/2^{n-2}\} \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

とおくと

$$\{\lambda \in \Lambda : (x|x_\lambda) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$$

となる. Bessel の不等式より, 各 Λ_n は有限集合になるので, $\{\lambda \in \Lambda : (x|x_\lambda) \neq 0\}$ はたかだか可算になる.

注意: 正規直交系 $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ に対して

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (x|x_\lambda) x_\lambda$$

と書くとき, 可算個の x_λ を除き $(x|x_\lambda) = 0$ となる. したがって, Λ は非可算集合の可能性はあるが, 実際の議論は可算個だけを扱い,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (x|x_\lambda) x_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} (x|x_{\lambda_n}) x_{\lambda_n}$$

のように表記することもある. Bessel の不等式より

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x|x_{\lambda_n})|^2 \leq \|x\|^2$$

だから $\{\sum_{n=1}^{N}(x|x_{\lambda_n})x_{\lambda_n}\}_{N=1}^{\infty}$ は Cauchy 列になり, H の完備性から

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}(x|x_\lambda)x_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty}(x|x_{\lambda_n})x_{\lambda_n}$$

に収束する.

Theorem 1.12. $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ を H の正規直交系とする. このとき以下は同値である.

(1) $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は完全である. つまり, $(x|x_\lambda) = 0$ *for all* $\lambda \in \Lambda \Rightarrow x = 0$.

(2) **[Fourier 展開]** 各 $x \in H$ は次のように書ける

$$x = \sum_{\lambda\in\Lambda}(x|x_\lambda)x_\lambda.$$

(3) $\{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_{\lambda_i} : N \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \Lambda, \alpha_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, N\}$ は H で稠密である.

(4) **[Parseval の等式]** 各 $x \in H$ について

$$\|x\|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} |(x|x_\lambda)|^2.$$

(5) 各 $x, y \in H$ について

$$(x|y) = \sum_{\lambda\in\Lambda}(x|x_\lambda)\overline{(y|x_\lambda)}.$$

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) 内積の連続性より

$$(x - \sum_{\lambda\in\Lambda}(x|x_\lambda)x_\lambda|x_\mu) = (x|x_\mu) - (x|x_\mu) = 0$$

なので完全性より

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|x_\lambda) x_\lambda.$$

(2) $\Rightarrow$ (3) 明らか.

(3) $\Rightarrow$ (2) 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在して

$$\|x - \sum_{i=1}^{N} (x|x_\lambda) x_\lambda\| < \epsilon$$

を示せば良い. 仮定より

$$\|x - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_\lambda\| < \epsilon$$

とできる. このとき Lemma 1.11 より

$$\|x - \sum_{i=1}^{N} (x|x_\lambda) x_\lambda\| < \epsilon$$

である.

(2) $\Rightarrow$ (4)

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|x_\lambda) x_\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} (x|x_{\lambda_i}) x_{\lambda_i} = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} (x|x_{\lambda_i}) x_{\lambda_i}$$

だから

$$\begin{aligned} \|x\|_2^2 &= \lim_{N \to \infty} \| \sum_{i=1}^{N} (x|x_{\lambda_i}) x_{\lambda_i} \|^2 = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} |(x|x_{\lambda_i})|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |(x|x_{\lambda_i})|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|x_\lambda)|^2. \end{aligned}$$

(4) $\Rightarrow$ (5)

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|x_\lambda) x_\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} (x|x_{\lambda_i}) x_{\lambda_i}, y = \sum_{\lambda \in \Lambda} (y|x_\lambda) x_\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} (y|x_{\lambda_i}) x_{\lambda_i}$$

とする．このとき

$$(x|y) = \lim_{N,M\to\infty}(\sum_{i=1}^{N}(x|x_{\lambda_i})x_{\lambda_i} \mid \sum_{i=1}^{M}(y|x_{\lambda_i})x_{\lambda_i})$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty}(x|x_{\lambda_i})\overline{(y|x_{\lambda_i})} = \sum_{\lambda\in\Lambda}(x|x_\lambda)\overline{(y|x_\lambda)}.$$

(5) $\Rightarrow$ (1) $(x|x_\lambda) = 0$ for all $\lambda \in \Lambda$ ならば

$$\|x\|^2 = (x|x) = 0$$

となり $x = 0$. □

1.5 発展:Hilbert 空間の例

Hilbert 空間の例として重要なものは既に述べた ℓ^2 であり，もう一つの重要なものは $L^2(0,1)$ である．

閉区間 $[0,1]$ 上の複素数値連続関数 $f,g \in C[0,1]$ に対して，Riemann 積分を用いて

$$(f|g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

と定義すると線形空間 $C[0,1]$ に内積が定義できる．この内積による距離

$$d(f,g) = (\int_0^1 |f(x)-g(x)|^2 dx)^{1/2}$$

に関して $C[0,1]$ は完備にならない．この内積空間を稠密な部分空間として含む Hilbert 空間が $L^2(0,1)$ である．ここでは Lebesgue 積分を用いて，$L^2(0,1)$ の構成を述べておく．

$([0,1],\mathcal{B},m)$ によって閉区間 $[0,1]$ 上の Lebesgue 可測集合のなす σ 加法族 $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ 上の Lebesgue 測度 m を表す．$f \in \mathcal{L}(0,1)$ によって $[0,1]$ 上の複素数値可測関数で 2 乗可積分

$$\int_{[0,1]} |f(x)|^2 m(dx) < \infty$$

となるものを表す．$f,g \in \mathcal{L}(0,1)$ に対して

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \quad m\text{-a.e.} \Leftrightarrow \int_{[0,1]} |f(x)-g(x)|m(dx) = 0$$

によって同値関係を定義する．このとき $L^2(0,1) = \mathcal{L}(0,1)/\sim$ と定義する．$\alpha \in \mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{L}(0,1)$ に対して

$$[f] + [g] = [f+g],\ \alpha[f] = [\alpha f],\ ([f],[g]) = \int_{[0,1]} f(x)\overline{g(x)}m(dx)$$

は well-definied である．記号を簡単にするために $[f]$ の代わりに f,

$$(f,g) = \int_{[0,1]} f(x)\overline{g(x)}dx$$

と書くことにする．

このとき $L^2(0,1)$ は内積空間になる．

$L^2(0,1)$ の完備性を示す前に, Lebesgue 積分の基本事項を確認しておく．$\{f_n\}$ を可測関数列とする．このとき

(1) 測度 0 の集合を除いて $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に各点収束するとき f は可測関数である．

(2) (Lebesgue の優収束定理) 測度 0 の集合を除いて $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に各点収束し, 可積分関数 g に対してほとんどいたるところ $|f_n| \le g$ であれば

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f_n(x)dx = \int_{[0,1]} f(x)dx.$$

(3) (単調収束定理) 測度 0 の集合を除いて, $\{f_n(x)\}$ が単調増加であれば

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f_n(x)dx = \int_{[0,1]} f(x)dx.$$

である．

$L^2(0,1)$ の完備性を示す．$\{f_n\}$ を $L^2(0,1)$ の Cauchy 列とする．つまり, 任意の $\epsilon > 0$ に対して $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n > m \ge N \Rightarrow \|f_n - f_m\|_2 = \sqrt{\int_{[0,1]} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx} < \epsilon$$

である．このとき $\{f_n\}$ に対応する極限に相当する関数を構成する必要がある．このために部分列 $f_{n(1)}, f_{n(2)}, \ldots, f_{n(k)}, \ldots$ で

$$n \ge n(k) \Rightarrow \|f_n - f_{n(k)}\|_2 < \frac{1}{2^k}$$

となるものを選ぶ. 選び方は Cauchy 列の定義より $\epsilon = \frac{1}{2}$ に対応する N を $n(1)$ とする. 次に $n(k)$ まで選べたとして, $\epsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$ に対応する N を選び $n(k+1) = \max\{N, n(k)+1\}$ とすれば良い. 次に, この部分列 $\{f_{n(k)}(x)\}$ は測度 0 の集合を除くと各点で収束することを示す.

$$f_{n(k)}(x) = f_{n(1)}(x) + \sum_{i=1}^{k-1}(f_{n(i+1)}(x) - f_{n(i)}(x))$$

だから

$$g_k(x) = |f_{n(1)}(x)| + \sum_{i=1}^{k-1}|f_{n(i+1)}(x) - f_{n(i)}(x)|$$

が測度 0 の集合を除いて有限値に収束すれば $\{f_{n(k)}(x)\}$ が収束することがわかる. $\{g_k\}$ は単調増加だから, 無限大への収束も含めて

$$g(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x)$$

とおく. 単調収束定理より

$$(\|g\|_2 =)(\int_{[0,1]} g(x)^2 dx)^{1/2} = \lim_{k\to\infty}(\int_{[0,1]} g_k(x)^2 dx)^{1/2} = \lim_{k\to\infty}\|g_k\|_2$$
$$\le \lim_{k\to\infty}(\|f_{n(1)}\|_2 + \sum_{i=1}^{k-1}\|f_{n(i+1)} - f_{n(i)}\|_2) \le \|f_{n(1)}\|_2 + 1$$

となる. したがって, g は測度 0 の集合を除いて有限値を持つので, $\{f_{n(k)}\}$ は可測関数 f にほとんどいたるところ収束することがわかる.

$$|f_{n(k)}(x)| \le g_k(x) \le g(x), \quad g \in L^2(0,1)$$

だから $|f(x)| \le g(x)$ となり $f \in L^2(0,1)$ がわかる.

$n(k) > m \ge N$ のとき

$$(\int_{[0,1]} |f_{n(k)}(x) - f_m(x)|^2 dx)^{1/2} = \|f_{n(k)} - f_m\|_2 < \epsilon$$

であり, $|f_{n(k)}| \le g(x)$ なので $n(k) \to \infty$ とすると

$$\|f - f_m\|_2 \le \epsilon$$

となる. したがって, $\lim_{m\to\infty}\|f_m - f\|_2 = 0$ となり, 完備であることがわかる.

$p \geq 1$ に対して $f \in \mathcal{L}^p(0,1)$ であるとは, f は可測関数で

$$\int_{[0,1]} |f(x)|^p m(dx) < \infty$$

であることとする. $f, g \in \mathcal{L}^p(0,1)$ に対して $f \sim g$ がほとんどいたるところ等しいことで定める. 線形空間 $L^p(0,1) = \mathcal{L}^p(0,1)/\sim$ にノルム

$$\|[f]\|_p = (\int_{[0,1]} |f(x)|^p m(dx))^{1/p}$$

を考えると上の完備性と同様の議論によって Banach 空間 $L^p(0,1)$ が得られる.

$p = \infty$ のときは,

$$L^\infty(0,1) = \{[f] : f \text{ は本質的に有界 }\}$$

ここで f が本質的に有界とは, 正の数 M が存在して

$$m(\{x : |f(x)| \leq M\}) = 0$$

となることで

$$\|[f]\|_\infty = \inf\{M : m(\{x : |f(x)| \leq M\}) = 0\}$$

と定義して, $L^\infty(0,1)$ は Banach 空間になる.

1.6 発展:完全正規直交系の例

Hilbert 空間 $L^2(0,1)$ の完全正規直交系について考える.

$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots \in L^2(0,1)$ を

$$f_n(x) = x^n, \qquad x \in [0,1]$$

とする. $\{f_n\}$ の有限一次結合全体は多項式全体と一致する. Gram-Schmidt の直交化法により

$$g_n = \frac{f_n - \sum_{i=1}^{n-1}(f_n|g_i)g_i}{\|f_n - \sum_{i=1}^{n-1}(f_n|g_i)g_i\|_2}$$

により正規直交系が得られ, 一次結合の全体は多項式全体と一致する.

f が可積分関数であるとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して可測集合 E_i の特性関数 χ_{E_i} と $a_i \in \mathbb{C}$ を用いて

$$\int_{[0,1]} |f(x) - \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{E_i}(x)| dx < \epsilon$$

とできる.

また, 特性関数 χ_E に対して連続関数 $g \in C[0,1]$ で

$$0 \leq g(x) \leq 1, \quad \int_{[0,1]} |\chi_E(x) - g(x)| dx \leq \epsilon$$

とできる.

連続関数 $g \in C[0,1]$ に対して Weierstrass の多項式近似定理により多項式 p によって

$$\max\{|g(x) - p(x)| : x \in [0,1]\} < \epsilon$$

とできる.

これらを合わせると $L^2(0,1)$ で多項式が稠密になるので, $\{g_n : n = 0,1,2,\ldots\}$ は完全正規直交系になることがわかる.

$L^2(0,1)$ の完全正規直交系の例として

$$f_n(x) = e^{2\pi inx} \quad , n = 0. \pm 1, \pm 2, \ldots$$

が知られている. したがって $f \in L^2(0,1)$ に対して

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f|f_n) f_n$$

と表せて Parseval の等式より

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(f|f_n)|^2$$

となる.

とくに $f(x) = x$ のとき

$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$(f|f_n) = \begin{cases} \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} & n = 0 \\ \int_0^1 x e^{2\pi inx} dx = \frac{1}{2\pi in} & n \neq 0 \end{cases}$$

となるので

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2 n^2}$$

となり, 関係式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

が得られる.

1.7 発展: 完全正規直交基底の存在

可算の手続きを超える議論をするには **Zorn の補題**を用います.

半順序集合 $(X, \leq)$ が半順序集合であるとは, 集合 X のある 2 点 (x, y) に関係 $x \leq y$ が定義されていて, 次の条件を満たすことである.

(1) $\forall x \in X$, $x \leq x$

(2) $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$

(3) $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$

任意の $x, y \in X$ に対して $x \leq y$ または $y \leq x$ が成立するとき**全順序集合** といいます.

帰納的順序集合 $(X, \leq)$ が半順序集合で, X の任意の全順序部分集合 $(Y, \leq)$ が最小上界 $x_0 \in X$ を持つとき, X を帰納的順序集合という.

$x_0 \in X$ が Y の最小上界であるとは, x_0 は Y の上界 ($y \leq x_0$ for all $y \in Y$) であり, Y の任意の上界 $x \in X$ に対して $x_0 \leq x$ が成立することである.

Zorn の補題 帰納的順序集合 $(X, \leq)$ は, 極大元 $x_0 \in X$ をもつ. ($x_0 \leq x$, $x \in X \Rightarrow x = x_0$)

H を Hilbert 空間とする. $\{x_i : i \in I\}(\subset H)$ が正規直交系であるとは

$$(x_i|x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

を満たすことである. 正規直交系が完全であるとは, $(x|x_i) = 0$ for all $i \in I \Rightarrow x = 0$ となることある.

Hilbert 空間は完全正規直交系を持つことを示す.

H の正規直交系の集合を S とする. つまり $I, J \in S$ とすると, $I = \{x_i : i \in \Lambda(I)\}$, $J = \{y_i : i \in \Lambda(J)\}$ で

$$(x_i|x_j) = \delta_{ij} \quad (i, j \in \Lambda(I)), \qquad (y_i|y_j) = \delta_{ij} \quad (i.j \in \Lambda(J))$$

となっている. S の元 I, J に次のような順序を考える

$$I \leq J \Leftrightarrow \{x_i : i \in \Lambda(I)\} \subset \{y_j : j \in \Lambda(J)\}.$$

S は, この順序によって半順序集合になることがわかる.

$\{I_a : a \in A\}$ を S の全順序部分集合とする. つまり I_a は H の正規直交ベクトルからなる集合で $a, b \in A$ に対して, $I_a \geq I_b$ または $I_a \leq I_b$ が成立しているとする.

このとき S の元 I_0 を

$$x \in I_0 \Longleftrightarrow \exists a \in A \text{ s.t. } x \in I_a$$

つまり $I_0 = \cup_{a \in A} I_a$ とする. $x \in I_0$ ならば $a \in A$ で $x \in I_a$ となるから, $\|x\| = 1$ である. $x, y \in I_0$, $(x \neq y)$ ならば $x \in I_a$, $y \in I_b$ となる $a, b \in A$ が存在する. $I_a \leq I_b$ または $I_a \geq I_b$ が成立するが, どちらにしても $(x|y) = 0$ が成立するので I_0 の元は正規直交ベクトルの集まり, つまり $I_0 \in S$ であることがわかる.

I_0 の作り方より, 任意の $a \in A$ に対して, $I_a \leq I_0$ となり I_0 は $\{I_a : a \in A\}$ の上界である. また $J \in S$ を $\{I_a : a \in A\}$ の上界とすると

$$J \supset I_a, \qquad a \in A$$

だから $J \supset I_0$ となり, I_0 が $\{I_a : a \in A\}$ の最小上界であることがわかる.

したがって S は帰納的順序集合であることがわかったので, Zorn の補題により極大元 K をもつ.

$$K = \{z_i : i \in \Lambda(K)\}.$$

$z \in H$ を $(z|z_i) = 0$ $(i \in \Lambda(K))$ を満たすとする. $z \neq 0$ とすると $z/\|z\|$ ととりかえて $\|z\| = 1$ としてよい. このとき

$$K \subsetneq (K \cup \{z\}) \in S$$

となるので K が極大であることに反する. したがって, $z = 0$ となるので K は H の完全正規直交系であることがわかる.

1.8 発展: Weierstrass の多項式近似定理

Theorem 1.13 (Weierstrass)**.** f を $[0,1]$ 上の実数値連続関数とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して実係数多項式 p を選んで

$$\max\{|f(t) - p(t)| : t \in [0,1]\} < \epsilon$$

とできる．

Proof. 閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数は一様連続だから $\delta > 0$ が存在して

$$|s - t| < \delta \ (s, t \in [0,1]) \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \epsilon$$

とできる．

自然数 l に対して l 次多項式を

$$p_l(t) = \sum_{k=0}^{l} f(\frac{k}{l}) \binom{l}{k} t^k (1-t)^{l-k}$$

と定める．このとき

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} t^k (1-t)^{l-k} &= (t + (1-t))^l = 1 \\
\sum_{k=0}^{l} k \binom{l}{k} t^k (1-t)^{l-k} &= \frac{d}{dx} (\sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (tx)^k (1-t)^{l-k})\Big|_{x=1} \\
&= \frac{d}{dx} (tx + (1-t))^l \Big|_{x=1} = lt
\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{l} (k - lt)^2 \binom{l}{k} t^k (1-t)^{l-k} \\
=&\sum_{k=0}^{l} (k(k-1) + (1-2lt)k + l^2 t^2) \binom{l}{k} t^k (1-t)^{l-k} \\
=&\sum_{k=0}^{l} k(k-1) \binom{l}{k} t^k (1-t)^{l-k} + (1-2lt)lt + l^2 t^2 \\
=&\frac{d^2}{dx^2} (tx + (1-t))^l \Big|_{x=1} + lt - l^2 t^2 \\
=&l(l-1)t^2 + lt - l^2 t^2 = lt(1-t)
\end{aligned}$$

となる. $f(t)$ と $p_l(t)$ を比較する.

$$\begin{aligned}
&|f(t)-p_l(t)| \\
=&|f(t)\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}t^k(1-t)^{l-k}-\sum_{k=0}^{l}f(\frac{k}{l})\binom{l}{k}t^k(1-t)^{l-k}| \\
\leq&\sum_{k=0}^{l}|f(t)-f(\frac{k}{l})|\binom{l}{k}t^k(1-t)^{l-k}
\end{aligned}$$

和を二つの場合にわける, ただし $M=\max\{|f(t)|:t\in[0,1]\}$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\sum_{|t-k/l|<\delta}|f(t)-f(\frac{k}{l})|\binom{l}{k}t^k(1-t)^{l-k} \\
<&\epsilon\sum_{|t-k/l|<\delta}\binom{l}{k}t^k(1-t)^{l-k}\leq\epsilon\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}t^k(1-t)^{l-k}=\epsilon \\
&\sum_{|t-k/l|\geq\delta}|f(t)-f(\frac{k}{l})|\binom{l}{k}t^k(1-t)^{l-k} \\
\leq&2M\sum_{|t-k/l|\geq\delta}\binom{l}{k}t^k(1-t)^{l-k} \\
\leq&2M\sum_{|t-k/l|\geq\delta}(\frac{t-k/l}{\delta})^2\binom{l}{k}t^k(1-t)^{l-k} \\
\leq&\frac{2M}{l^2\delta^2}\sum_{k=0}^{l}(k-lt)^2\binom{l}{k}t^k(1-t)^{l-k}=\frac{2M}{l\delta^2}t(1-t)\leq\frac{M}{2l\delta^2}
\end{aligned}$$

l を十分大きくすると $|f(t)-p_l(t)|<\epsilon$ となる. □

Weierstrass の多項式近似定理を拡張する命題を以下で考える.

K を compact Hausdorff 空間とする. K 上の実数値連続関数の全体を $C_{\mathbb{R}}(K)$ と表わす.

$$\|f\|=\max\{|f(x)|:x\in K\}$$

によってノルムを定義する. また $f,g\in C_{\mathbb{R}}(K)$ に対して

$$(f\vee g)(x)=\max\{f(x),g(x)\},\quad (f\wedge g)(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$

とする. $\mathcal{L}$ を $C_{\mathbb{R}}(K)$ の線形部分空間とし,

$$f,g\in\mathcal{L}\Rightarrow f\vee g,f\wedge g\in\mathcal{L}$$

を満たすとき束という.

Lemma 1.14. $\mathcal{L}$ を $C_{\mathbb{R}}(K)$ の束とし, $f_0 \in C_{\mathbb{R}}(K)$ とする. K の任意の *2* 点 x, y および任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$|f_0(x) - g(x)| < \epsilon,\ |f_0(y) - g(y)| < \epsilon$$

となる $g \in \mathcal{L}$ が存在するとする. このとき

$$\max\{|h(z) - f_0(z)| : z \in K\} < \epsilon$$

となる $h \in \mathcal{L}$ が存在する.

Proof. 仮定より, 任意の $x, y \in K$ に対して次のような $f_{x,y} \in \mathcal{L}$ を選ぶ.

$$|f_{x,y}(x) - f_0(x)| < \epsilon,\ |f_{x,y}(y) - f_0(y)| < \epsilon.$$

このとき

$$U_{x,y} = \{z \in K : f_{x,y}(z) < f_0(z) + \epsilon\},\ V_{x,y} = \{z \in K : f_{x,y}(z) > f_0(z) - \epsilon\}$$

とおくと $\{U_{x,y} : x \in K\}$ は K の開被覆になるから

$$U_{x_1,y} \cup U_{x_2,y} \cup \cdots \cup U_{x_m,y} \supset K$$

とできる. ここで

$$f_y = f_{x_1,y} \wedge f_{x_2,y} \wedge \cdots \wedge f_{x_m,y} \in \mathcal{L}$$
$$V_y = V_{x_1,y} \cap V_{x_2,y} \cap \cdots \cap V_{x_m,y}$$

とおくと $f_y(x) < f_0(x) + \epsilon\ (x \in K),\ f_y(x) > f_0(x) - \epsilon\ (x \in V_y)$ となる. $y \in V_y$ だから $\{V_y : y \in K\}$ は K の開被覆になるので

$$V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \cdots \cup V_{y_n} \supset K$$

とできる. このとき

$$g = f_{y_1} \vee f_{y_2} \vee \cdots \vee f_{y_n}$$

とおくと任意の $x \in K$ に対して

$$f_0(x) - \epsilon < g(x) < f_0(x) + \epsilon$$

となる. $\square$

$\mathcal{A}(\subset C_{\mathbb{R}}(K))$ が関数環であるとは, $f, g \in \mathcal{A}$, $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$f + g, af, fg \in \mathcal{A}$$

となるときをいう.

Lemma 1.15. 関数環 $\mathcal{A}(\subset C_{\mathbb{R}}(K))$ が閉ならば, $\mathcal{A}$ は束である.

Proof. $f, g \in \mathcal{A}$ に対して

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|),\ f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

となるので, $|f| \in \mathcal{A}$ を示すと, $f \vee g$, $f \wedge g \in \mathcal{A}$ がわかる.

$g = f^2 \in \mathcal{A}$ であり, Weierstrass の多項式近似定理より閉区間 $[0, \|g\|]$ 上の関数 $\sqrt{t}$ は, t の多項式 $p(t)$ で一様近似できる. つまり $|f| = \sqrt{g}$ が $p(g) \in \mathcal{A}$ で近似できる. $\mathcal{A}$ は閉だから, $|f| \in \mathcal{A}$. □

Theorem 1.16 (Stone-Weierstrass)**.** $\mathcal{A}(\subset C_{\mathbb{R}}(K))$ を関数環とする.

(1) K の任意の異なる *2* 点 x_1, x_2 に対して $f(x_1) \neq f(x_2)$ となる $f \in \mathcal{A}$ が存在する.

(2) K の任意の点 x に対して, $f(x) \neq 0$ となる $f \in \mathcal{A}$ が存在する.

このとき, $\mathcal{A}$ は $C_{\mathbb{R}}(K)$ で稠密である.

Proof. Lemma 1.14 より, $f_0 \in C_{\mathbb{R}}(K)$, $x_1, x_2 \in K$ に対して

$$h(x_1) = f_0(x_1), \quad h(x_2) = f_0(x_2)$$

となる $h \in \mathcal{A}$ が存在することを示せば良い.

(1) より $f(x_1) \neq f(x_2)$ となる $f \in \mathcal{A}$ を選ぶ. もし $f(x_1) = 0$ のときは, (2) を用いて $g(x_1) \neq 0$ となる $g \in \mathcal{A}$ を選び, f を適当な実数 a を用いて $f + ag \in \mathcal{A}$ に取り換えて

$$f(x_1) \neq f(x_2),\ f(x_i) \neq 0\ (i = 1, 2)$$

と仮定して良い. このとき, 次の 3 点

$$(0, 0),\ (f(x_1), f_0(x_1)),\ (f(x_2), f_0(x_2))$$

を通る 2 次以下の多項式 $p(t) = bt + ct^2$ が存在する. $h(x) = p(f(x))$ とおくと $h \in \mathcal{A}$ で $h(x_i) = f_0(x_i)$ $(i = 1, 2)$ を満たす. □

この定理の応用として, $\{f_n(x) = e^{2\pi ix} : n \in \mathbb{Z}\}$ の有限一次結合全体は $L^2(0,1)$ で稠密であることがわかる.

Weierstrass の定理に関係する興味深い命題を紹介してこの章を終わることにする.

Weierstrass の定理は $[0,1]$ 上の連続関数全体が多項式で近似できる, 言い換えれば $\{x^n : n = 1,2,3,\ldots\} \cup \{1\}$ の一次結合全体が $C[0,1]$ で稠密であることになる.

Müntz-Sźasz の定理 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$ で $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$ ならば, $\{x^{\lambda_n} : n = 1,2,3,\ldots\} \cup \{1\}$ の一次結合全体が $C[0,1]$ で稠密になる.

ことが知られている. また Euler の定理として, 素数の列 $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty$ となることが知られている. したがって, $\{x^{p_n} : n = 1,2,3,\ldots\} \cup \{1\}$ の一次結合全体は $C[0,1]$ で稠密になることがわかる.

2　有界線形作用素

2.1　線形作用素

X, Y をノルム空間とする. 写像 $T : X \longrightarrow Y$ が線形作用素であるとは

$$T(\alpha x + y) = \alpha Tx + Ty, \qquad x, y \in X, \alpha \in \mathbb{C}$$

となることである. X から Y への線形作用素の全体を $L(X, Y)$ と表わし, $S, T \in L(X, Y)$, $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$(S + T)(x) = Sx + Tx, \quad (\alpha T)(x) = \alpha Tx$$

と定義することにより, $L(X, Y)$ は線形空間になる.

$T \in L(X, Y)$ が $x_0 \in X$ で連続であるとは, $\|x - x_0\| \to 0$ のとき $\|Tx - Tx_0\| \to 0$ となることであり, X の任意の点 x で連続のとき, X で連続であるという.

$T \in L(X, Y)$ が, 正の数 M に対して

$$\|Tx\| \le M\|x\| \qquad x \in X$$

を満たすとき T を有界であるという.

Proposition 2.1. $T \in L(X, Y)$ に対して次は同値.

(1) T は X で連続.

(2) T は $0\ (\in X)$ で連続.

(3) T は有界.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) 明らか.

(2) $\Rightarrow$ (3) 0 で連続だから, 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して, $\|x\| < \delta \Rightarrow \|Tx\| < \epsilon$ となる. 任意の 0 でない $x \in X$ に対して $\|\frac{\delta}{2\|x\|}x\| < \delta$ だから

$$\|Tx\| = \frac{2\|x\|}{\delta}\|T(\frac{\delta}{2\|x\|}x)\| \le \frac{2\epsilon}{\delta}\|x\|$$

となり T は有界である.

(3) $\Rightarrow$ (1) $x, y \in X$ に対して

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \leq M\|x-y\|$$

なので $\|x-y\| \to 0$ のとき $\|Tx - Ty\| \to 0$ となる. $\square$

以後, 連続な線形作用素を有界線形作用素と呼び, X から Y への有界線形作用素の全体を $B(X,Y)$ と表わす. $T \in B(X,Y)$ に対して

$$\|T\| = \inf\{M : \|Tx\| \leq M\|x\| \text{ for all } x \in X\}$$

と定義する. このとき, $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ が成立する.

$T \in B(X,Y)$ に対して, そのノルムは次のように言いかえることも可能である.

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1, x \in X\} \\ &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1, x \in X\} \\ &= \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\}\}.\end{aligned}$$

このとき, ノルム $\|T\|$ によって $B(X,Y)$ はノルム空間であることがわかる.

Proposition 2.2. *Y が Banach 空間であるとき, $B(X,Y)$ も Banach 空間になる.*

Proof. $\{T_n\}$ を $B(X,Y)$ の Cauchy 列とする, つまり, 任意の $\epsilon > 0$ に対して $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n > m \geq N$ のとき $\|T_n - T_m\| < \epsilon$ となる.

$x \in X$ に対して $\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\|$ だから $\{T_n x\}$ は Y の Cauchy 列になる. Y の完備性より極限が存在し, これを

$$Sx = \lim_{n\to\infty} T_n x$$

と表わすことにする. このとき対応

$$X \ni x \mapsto Sx \in Y$$

は線形写像になることがわかる.

$\|Sx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\|$ に注意すると

$$\|T_n x\| \leq \|T_n x - T_N x\| + \|T_N x\| \leq (\epsilon + \|T_N\|)\|x\|$$

なので $\|Sx\| \leq (\epsilon + \|T_N\|)\|x\|$ となり $S \in B(X,Y)$ である．また

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \epsilon\|x\|$$

より $n \to \infty$ とすると

$$\|Sx - T_m x\| \leq \epsilon\|x\|$$

となるので $\|S - T_m\| \leq \epsilon$ となり $\{T_n\}$ は S に収束する． □

線形代数学では, 2 つの線形空間 X, Y に対して, X から Y への全単射線形写像が存在するとき, X と Y を同型と呼び, 同一視するように考えた．また, X から Y への単射線形写像が存在するとき X と X の像を同一視して X を Y の部分空間と考えた.

ノルム空間 X, Y に対しては, X から Y への全射等距離線形写像 T が存在するとき X と Y を同型と呼び, 同一視する．ここで, T が全射であるとは, $TX = Y$ であり, T が**等距離写像**であるとは, $\|Tx\| = \|x\|$ $(x \in X)$ のことであり, T が単射であることが導かれる．X から Y への等距離線形写像 T が存在するときは X と $TX(\subset Y)$ を同一視し, X を Y の部分空間と考える.

2.2 有界線形汎関数

X をノルム空間とする．X から $\mathbb{C}$ への線形写像を**線形汎関数**という. $\mathbb{C}$ は絶対値を考えることによって Banach 空間であるから、$B(X,\mathbb{C})$ は Proposition 2.2 より Banach 空間であることがわかる.

X 上の有界線形汎関数の全体 $B(X,\mathbb{C})$ を X' と表わし, X の**双対空間**という．$f \in X'$ に対して, 定義より

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| = 1\}$$

となる.

後で証明を与える Hahn-Banach の定理の系として次の命題が知られている.

Theorem 2.3. ノルム空間 X の任意の $x \in X$ に対して, $f \in X'$ で

$$\|f\| = 1, \quad f(x) = \|x\|$$

を満たすものが存在する.

Corollary 2.4. $x \in X$ に対して

$$\|x\| = \max\{|f(x)| : f \in X', \|f\| = 1\}$$

が成立する.

X をノルム空間とするとき, $X' = B(X, \mathbb{C})$ は Banach 空間であることをみた. さらに, X'' も Banach 空間になる. このとき $x \in X$ に対して

$$\tilde{x} : X' \ni f \mapsto \tilde{x}(f) = f(x) \in \mathbb{C}$$

を定義すると $\tilde{x}$ は線形汎関数で $|\tilde{x}(f)| \leq \|x\|\|f\|$ となり, $\tilde{x} \in X''$ であることと

$$\|\tilde{x}\| \leq \|x\|$$

を満たすことがわかる.

また Theorem 2.3 より $f_x \in X'$ で $\|f_x\| = 1$, $f_x(x) = \|x\|$ となるものを選ぶと

$$\tilde{x}(f_x) = f_x(x) = \|x\|$$

となるので, $\|\tilde{x}\| = \|x\|$ である.

この等距離線形写像 $i : X \ni x \mapsto i(x) = \tilde{x} \in X''$ によってノルム空間 X を Banach 空間 X'' の部分空間とみることができる. $i(X)$ のノルムによる閉包は, X'' の閉部分空間になり Banach 空間であり, $i(X)$ を稠密な部分集合として含んでいる. この閉包を X の**完備化**といい, 任意のノルム空間は完備化を持つことがわかる.

X をノルム空間, Y_1, Y_2 を Banach 空間とする. $\varphi_i : X \longrightarrow Y_i$ $(i = 1, 2)$ が等距離線形作用素で $\varphi_i(X)$ が Y_i で稠密であるとき, 等距離線形作用素 $\Phi : Y_1 \longrightarrow Y_2$ で

$$\Phi(\varphi_1(x)) = \varphi_2(x) \qquad x \in X$$

となるものが存在することがわかるので, この等距離作用素で同一視することによって完備化の一意であることがわかる.

Proposition 2.5. X, Y をノルム空間とする. 任意の $T \in B(X,Y)$ に対して, 次の関係で定まる ${}^tT \in B(Y', X')$ が存在する

$$g(Tx) = ({}^tTg)(x) \quad x \in X, g \in Y'.$$

このとき $\|T\| = \|{}^tT\|$ となる.

Proof. $g \circ T : X \longrightarrow \mathbb{C}$ は線形汎関数であり

$$|(g \circ T)(x)| = |g(Tx)| \leq \|g\|\|Tx\| \leq \|g\|\|T\|\|x\|$$

なので $g \circ T \in X'$ である. 写像 ${}^tT$ を

$${}^tT : Y' \ni g \mapsto g \circ T \in X'$$

によって定義すると Y' から X' への線形写像になる.

$$\|{}^tTg\| = \|g \circ T\| \leq \|g\|\|T\|$$

だから ${}^tT \in B(Y', X')$ で $\|{}^tT\| \leq \|T\|$.

不等式の逆向きをしめす. 作用素のノルムの定義より, 任意の $\epsilon > 0$ に対して $x \in X$ で

$$\|x\| = 1, \quad \|T\| \leq \|Tx\| + \epsilon$$

となるものを選ぶ. また Theorem 3.2 より $g \in X'$ で

$$\|g\| = 1, \quad \|Tx\| = g(Tx)$$

なるものを選べる. このとき

$$\begin{aligned}\|T\| - \epsilon \leq \|Tx\| &= g(Tx) = ({}^tTg)(x) \\ =&\|{}^tTg\|\|x\| \leq \|{}^tT\|\|g\| = \|{}^tT\|\end{aligned}$$

となり, ϵ が任意だから $\|T\| \leq \|{}^tT\|$. □

2.3 Baire のカテゴリー定理

X は位相空間とする. ここでは, とくに距離空間を対象として, 完備距離空間が第 2 類であることを示す.

位相空間 X の部分集合 A が全疎 (rare) であるとは, A の閉包 $\bar{A}$ が内点を持たないことをいう. $\bar{A}$ が内点を持たないことと $\bar{A}$ の補集合が X の

稠密な開集合であることが同値であるから, A が全疎であることと A の補集合が稠密な開集合を含むことが同値であることがわかる.

X の部分集合 A が **第1類**であるとは, A が可算個の全疎集合の和集合で表されることである. A が第1類でないとき, **第2類** という.

次の定理により, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, Banach 空間, Hilbert 空間は第2類集合であることがわかる.

Theorem 2.6. *完備距離空間 X は第 2 類集合である.*

Proof. X が第1類であると仮定する, つまり全疎集合 A_n が存在して

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$$

とする. A_n の閉包の補集合を B_n とすると, B_n は X の稠密な開集合であり

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \phi$$

を満たす.

B_1 が開集合なので $x_1 \in X$, $d_1 > 0$ で

$$U_1 = \{x \in X : d(x, x_1) < d_1\} \subset B_1$$

となるものを選ぶ.

B_2 が稠密なので $x_2 \in B_2 \cap U_1$ を選ぶ. $d_2 < (d_1 - d(x_1, x_2))/2$ とし

$$U_2 = \{x \in X : d(x, x_2) < d_2\}$$

とおく.

同様に, B_3 が稠密なので $x_3 \in B_3 \cap U_2$ を選び $d_3 = (d_2 - d(x_2, x_3))/2$ として

$$U_3 = \{x \in X : d(x, x_3) < d_3\}$$

とおく.

この操作を繰り返して $\{x_n\}, \{U_n\}, d_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を作ると

$$U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \cdots$$

$$d_n \leq \frac{d_1}{2^{n-1}}$$

$$x_n \in U_n, \quad d(x_n, x_m) < d_n \ (\text{if } m > n)$$

となる. $\{x_n\}$ は Cauchy 列になるので, X の完備性より極限 $x_0 \in X$ が存在する. x_n, U_n, d_n の選び方より

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

となり矛盾となる. したがって, 完備距離空間は第 1 類ではないことがわかる. $\square$

Baire のカテゴリー定理は, 派手な命題では無いのですが, 重要な応用を持つ定理です. まず命題を紹介しておきます.

Theorem 2.7 (一様有界性の原理)**.** *X を Banach 空間, Y をノルム空間とする. $A \subset B(X,Y)$ とし, 各 $x \in X$ に対して*

$$\sup\{\|Tx\| : T \in A\} < \infty$$

ならば

$$\sup\{\|T\| : T \in A\} < \infty$$

である.

一様有界性の原理は, こうであって欲しいとだんだんそういう気分になって, そのうち便利な命題だと感じるようになると思います. 次の開写像定理も便利な命題なのですが, 使いたい局面において, いろいろな変形がある命題です. その変形については次のセクションで述べます.

Theorem 2.8 (開写像定理)**.** *X, Y を Banach 空間とする. $T : X \longrightarrow Y$ は有界線形作用素で全射 ($TX = Y$) と仮定する. このとき T は開写像である (開集合を開集合に写す).*

一様有界性の原理を証明します.

Proof. 各 $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して

$$C_n = \{x \in X : \|Tx\| \leq n \text{ for all } T \in A\}$$

とおく. 各 $x \in X$ に対して

$$\sup\{\|Tx\| : T \in A\} < \infty$$

の仮定より

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

であることがわかる. 完備距離空間 X が可算個の集合の和集合で表されるので Baire の定理より, どれかの C_n は全疎集合ではない. いま T は連続なので, C_n は閉集合となり, ある番号 n_0 について C_{n_0} は内点を持つと仮定してよい.

つまり $x_0 \in C_{n_0}$ と $\delta > 0$ が存在して

$$\{x \in X : \|x - x_0\| \leq \delta\} \subset C_{n_0}$$

とできる. $\|x\| \leq 1$ である $x \in X$ に対して, $\|(x_0+\delta x)-x_0\| = \|\delta x\| \leq \delta$ である. $x_0 + \delta x \in C_{n_0}$ だから, すべての $T \in A$ に対して $\|T(x_0 + \delta x)\| \leq n_0$ である. これより

$$\|Tx\| \leq \frac{1}{\delta}(\|Tx_0\| + n_0) \leq \frac{2n_0}{\delta}$$

なので

$$\sup\{\|T\| : T \in A\} \leq \frac{2n_0}{\delta}$$

となる. □

開写像定理の証明の前に少し言葉を定義しておく.

X をノルム空間として, C を X の部分集合とする. C が対称であるとは

$$x \in C \Rightarrow -x \in C,$$

convex であるとは

$$x, y \in C,\ t \in [0,1] \Rightarrow tx + (1-t)y \in C$$

となることをいう.

Lemma 2.9. *C をノルム空間 X の対称な convex な集合とする. このとき C が内点を持てば, 原点も C の内点である.*

Proof. C の内点を x_0 とし, $x_0 \in U \subset C$ となる開集合 U を選ぶ. ノルム空間でスカラー倍, 平行移動は同相写像なので

$$-U \cap (U - 2x_0) \subset C$$

は $-x_0$ の開近傍である.

$$(-U \cap (U - 2x_0)) + 2x_0 = (2x_0 - U) \cap U \subset C$$

は x の開近傍である. これより, 原点の開近傍 V で

$$x_0 + V \subset U, \quad -x_0 + V \subset -U \cap (U - 2x_0)$$

となるものが選べる. C が convex であることを用いると, 各 $v \in V$ に対して

$$v = \frac{1}{2}(x_0 + v) + \frac{1}{2}(-x_0 + v) \in C$$

となり $0 \in V \subset C$ であることがわかる. □

線形作用素 $T : X \longrightarrow Y$ が開写像であることと, 原点の近傍 U に対して TU も原点の近傍になることが同値である.

以下に, 開写像定理の証明を与える.

Proof. $U = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ とおく. $X = \cup_{n=1}^{\infty} nU$ であるから T が全射であることより

$$Y = TX = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nU)$$

である.

Y は Banach 空間 (第 2 類集合) だから, ある番号 n_0 が存在して $\overline{T(n_0U)}$ は内点を持つ. T が有界だから

$$\overline{T(n_0U)} = \overline{n_0T(U)} = n_0\overline{T(U)}$$

となり, $\overline{T(U)}$ が内点を持つ. U が convex かつ対称より, $\overline{T(U)}$ も convex かつ対称で内点を持つ. Lemma 2.8 より正数 r が存在して

$$\{y \in Y : \|y\| < r\} \subset \overline{T(U)}$$

とできる. このとき

$$\{y \in Y : \|y\| < \frac{r}{2}\} \subset T(U)$$

を示すと原点の近傍が T により原点の近傍に写されたことになり開写像であることがわかる.

$\|y_0\| < \frac{r}{2}$ とする. $\{y \in Y : \|y\| < r\} \subset \overline{T(U)}$ より $\{y \in Y : \|y\| < \frac{r}{2}\} \subset \overline{T(\frac{1}{2}U)}$ だから

$$\|y_0 - Tx_1\| < \frac{r}{4}$$

となる $x_1 \in \frac{1}{2}U$ を選ぶことができる. この $y_0 - Tx_1$ を y_0 とみて同じ議論によって

$$\|y_0 - Tx_1 - Tx_2\| < \frac{r}{8}$$

となる $x_1 \in \frac{1}{4}U$ を選ぶことができる. これを繰り返して

$$\|y_0 - Tx_1 - Tx_2 - \cdots - Tx_n\| < \frac{r}{2^{n+1}}$$

となる $x_n \in \frac{1}{2^n}U$ を選ぶことができる. このとき $\{x_1 + x_2 + \cdots + x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列になるから次の極限が存在する

$$x = \lim_{n\to\infty}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \in X.$$

$\|x\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \|x_3\| + \cdots < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$ だから $\|x\| < 1$, つまり $x \in U$. T の連続性より

$$Tx = \lim_{n\to\infty}(Tx_1 + Tx_2 + \cdots + Tx_n) = y_0.$$

したがって $y_0 = Tx \in T(U)$. □

2.4 閉作用素と開写像定理

線形作用素はノルム空間上で定義されたものであるが, Banach 空間であれば第 2 類の集合であったり, 強い性質を有することもあり, 考察する線形作用素を考えたいノルム空間全体で定義することが困難な場合もある. ここで少し広い意味で線形作用素を考えることにする.

X, Y をノルム空間とする. $T : X \longrightarrow Y$ が線形作用素であるとは, X の線形部分空間 $D(T)$ が存在して,

$$T(x + \alpha y) = Tx + \alpha Ty, \quad x, y \in D(T), \alpha \in \mathbb{C}$$

が成立することである.

このとき $D(T)$ を T の定義域, $R(T) = \{Tx : x \in D(T)\}$ を T の値域といい, それぞれ X, Y の部分空間である.

$$G(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\}$$

を T のグラフといい, $X \times Y$ の部分空間になる. $(x, Tx) \in G(T)$ にノルム

$$\|(x, Tx)\| = \|x\| + \|Tx\|, \text{ or } \sqrt{\|x\|^2 + \|Tx\|^2}$$

を考えることによって $G(T)$ もノルム空間になる.

Proposition 2.10. *X, Y をノルム空間, G を $X \times Y$ の部分空間とする. 線形作用素 $T : X \longrightarrow T$ が存在して $G = G(T)$ となるための必要十分条件は*

$$(0, y) \in G \Rightarrow y = 0$$

が成立することである.

Proof. $G = G(T)$ のとき, $(0, y) \in G$ であれば, $0 \in D(T)$ で $y = T0 = 0$ となる.

G が条件を満たすとき, $(x, y) \in G$ に対して, $Tx = y$ と定義する. 写像 T が well-defined であることは, $(x, y_1), (x, y_2) \in G$ のとき

$$(x, y_1) - (x, y_2) = (0, y_1 - y_2) \in G$$

より, $y_1 = y_2$ となり Tx が定義できることになる.

$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G, \alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$\alpha(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (\alpha x_1 + x_2, \alpha y_1 + y_2) \in G$$

だから, $T(\alpha x_1 + x_2) = \alpha T x_1 + T x_2$ となり T が線形作用素であることがわかる. □

ノルム空間 X から Y への線形作用素 T が **閉作用素**であるとは,

$$x_n \in D(T), x_n \to x, Tx_n \to y \Rightarrow x \in D(T), Tx = y$$

が成立することである.

T が閉作用素であることは, $G(T)$ が $X \times Y$ の閉部分集合であることと言い換えることもできる. 有界線形作用素は, 閉作用素である. 有界線形作用素で閉作用素でない例を挙げておく.

閉区間 $[0, 1]$ 上の複素数値連続関数全体 $C[0, 1]$ にノルム

$$\|f\| = \max\{|f(t)| : t \in [0, 1]\}, \quad \in C[0, 1]$$

を考える．つまり $C[0,1]$ に一様収束のノルムを考える．$X = C[0,1]$ の線形部分空間として 連続的微分可能な関数全体 $D = C^1[0,1]$ を考える．このとき

$$Tf = f', \quad f \in C^1[0,1]$$

によって定まる微分作用素 T は閉作用素であり, 連続ではない.

微積分学で述べられる, 連続的微分可能な関数列が一様収束し, かつその導関数列がまた一様収束すれば, 極限関数も連続的微分可能で, 導関数列は極限関数の導関数に収束する, という命題が閉作用素の定義と言ってもよいほど, 大事な概念です.

T が閉作用素で単射であれば, T の逆写像 T^{-1} が考えられる．その定義域 $D(T^{-1})$ は T の値域 $R(T) = \{Tx : x \in D(T)\}$ に一致し, T が閉であることから T^{-1} も閉作用素になる.

閉作用素がどのようなとき, 有界線形作用素になるかという条件が, 開写像定理に関連する話題として, いくつか知られている.

Theorem 2.11 (閉グラフ定理)**.** *X, Y を Banach 空間とする．閉作用素 $T : X \longrightarrow Y$ が $D(T) = X$ を満たすならば, T は連続である.*

Proof. T が閉作用素なので, $G(T)$ は $X \times Y$ の閉部分空間になる．とくに, $G(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$ は Banach 空間である．線形作用素 S を次のように定義する

$$S : G(T) \ni (x, Tx) \mapsto x \in X.$$

このとき

$$\|S((x, Tx))\| = \|x\| \le \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\|$$

なので S は有界線形作用素になる．また $S(G(T)) = X$ なので開写像定理より, S は開写像になる.

$\{(x, TX) : \|(x, Tx)\| < 1\}$ は $G(T)$ の開集合なので

$$S(\{(x, TX) : \|(x, Tx)\| < 1\}) = \{x \in X : \|x\| + \|Tx\| < 1\}$$

は X の開集合で原点を含む．したがって

$$\{x \in X : \|x\| < r\} \subset \{x \in X : \|x\| + \|Tx\| < 1\}$$

となる正数 r が存在する．これより $\|x\| \le 1 \Rightarrow \|Tx\| \le \frac{1}{r}$ となり T は有界であることがわかる. $\square$

Theorem 2.12 (逆写像定理)**.** X, Y を *Banach* 空間とする. 有界線形作用素 $T : X \longrightarrow Y$ が 全単射であるとき, T^{-1} も連続である.

Proof. T が全単射なので $D(T^{-1}) = Y$, また既に注意したように T^{-1} は閉作用素になる. したがって閉グラフ定理より T^{-1} は有界である. $\square$

3 Hahn-Banach の定理

3.1 Hahn-Banach の定理

X を実線形空間とする. $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ が X 上の半ノルムであるとは

$$
\begin{gathered}
p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad x, y \in X \\
p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad \alpha \geq 0
\end{gathered}
$$

を満たすことである.

Theorem 3.1. E を実線形空間 X の部分空間とし, p を X 上の半ノルムとする. 線形汎関数 $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ が

$$\phi(x) \leq p(x), \quad x \in E$$

であるとき, 線形汎関数 $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ で

$$\Phi(x) \leq p(x) \quad (x \in X), \ \Phi(x) = \phi(x) \quad (x \in E)$$

となるものが存在する.

Proof. $x_0 \notin E$ とし, E_0 を E の元と x_0 によって張られる部分空間とする. このとき

$$\psi(x) \leq p(x) \quad (x \in E_0), \ \psi(x) = \phi(x) \quad (x \in E)$$

となる E_0 上の線形汎関数 ψ を構成する.

$x \in E_0$ は $x = x_1 + \alpha x_0$ ($x_1 \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$) と表される. ψ が上の性質を持つと仮定すると

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= \psi(x_1) + \alpha\psi(x_0) \\
&= \phi(x_1) + \alpha\psi(x_0) \leq p(x) = p(x_1 + \alpha x_0)
\end{aligned}
$$

となり, $\alpha > 0$ のとき

$$\phi(\frac{1}{\alpha}x_1) + \psi(x_0) \leq p(\frac{1}{\alpha}x_1 + x_0)$$

$\alpha < 0$ のとき

$$\phi(-\frac{1}{\alpha}x_1) - \psi(x_0) \leq p(-\frac{1}{\alpha}x_1 - x_0)$$

となる. つまり

$$\psi(x_0)\begin{cases}\geq \phi(-\frac{1}{\alpha}x_1)-p(-\frac{1}{\alpha}x_1-x_0) & \alpha<0\\ \leq p(\frac{1}{\alpha}x_1+x_0)-\phi(\frac{1}{\alpha}x_1) & \alpha>0\end{cases}$$

を満たすような $\psi(x_0)$ が存在すれば, 上の条件を満たす ψ が構成できることになる.

$x_1, x_2 \in E$ として

$$\begin{aligned}&(p(x_2+x_0)-\phi(x_2))-(\phi(x_1)-p(x_1-x_0))\\=&p(x_2+x_0)+p(x_1-x_0)-\phi(x_2)-\phi(x_1)\\\geq&p((x_2+x_0)+(x_1-x_0))-\phi(x_1+x_2)\\=&p(x_1+x_2)-\phi(x_1+x_2)\geq 0\end{aligned}$$

だから

$$\inf_{x_2\in E}(p(x_2+x_0)-\phi(x_2))-\sup_{x_1\in E}(\phi(x_1)-p(x_1-x_0))\geq 0$$

となり, $\psi(x_0)$ を

$$\sup_{x_1\in E}(\phi(x_1)-p(x_1-x_0))\leq\psi(x_0)\leq\inf_{x_2\in E}(p(x_2+x_0)-\phi(x_2))$$

のように選べば良い.

E を含む部分空間 F と F 上の線形汎関数 ψ で

$$\psi|_E=\phi,\quad \psi(x)\leq p(x)\ (x\in F)$$

となる (F,ψ) の組を考える. このような組 (F_1,ψ_1), (F_2,ψ_2) に対して順序

$$(F_1,\psi_1)\leq(F_2,\psi_2)$$

を $F_1\subset F_2$ かつ $\psi_2|_{F_1}=\psi_1$ と定義する. このとき, この組の全体 $\{(F,\psi)\}$ は帰納的な半順序集合になる.

半順序集合であることは明らかである. この集合から全順序部分集合 $\{(F_a,\psi_a);a\in A\}$ を選ぶとき

$$\tilde{F}=\cup_{a\in A}F_a,\quad \tilde{\psi}(x)=\psi_a(x)\text{ if }x\in F_a$$

と定義して $(\tilde{F},\tilde{\psi})$ は, この全順序部分集合の上界になる. したがって, 帰納的であることがわかる.

Zorn の補題を用いると, この半順序集合は極大元 (F_0,ψ_0) を持つことになる. もし, $F_0\neq X$ であれば, はじめの議論より F_0 をさらに大きくとることができ, 極大であることに反する. したがって $F_0=X$ となる. □

Theorem 3.2 (Hahn-Banach の定理 (real vesion)). X を実ノルム空間, Y をその部分空間とする. 有界な線形汎関数 $\phi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して, X 上の有界線形汎関数 $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ で

$$\Phi|_Y = \phi, \quad \|\Phi\| = \|\phi\|$$

となるものが存在する.

Proof. 定義より

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(x)| : \|x\| \leq 1, x \in Y\}$$

である. このとき, 半ノルム $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$p(x) = \|\phi\|\|x\|$$

と定義すると, $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ で

$$\Phi|_Y = \phi, \quad \Phi(x) \leq p(x) \ (x \in X)$$

となるものが存在する. このとき

$$\begin{aligned}\|\phi\| \leq \|\Phi\| &= \sup\{|\Phi(x)| : x \in X, \|x\| = 1\} \\ &\leq \sup\{p(x) : x \in X, \|x\| = 1\} = \|\phi\|\end{aligned}$$

となり $\|\phi\| = \|\Phi\|$ である. □

Theorem 3.3 (Hahn-Banach の定理 (complex vesion)). X を複素ノルム空間, Y をその部分空間とする. 有界な線形汎関数 $\phi : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ に対して, X 上の有界線形汎関数 $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ で

$$\Phi|_Y = \phi, \quad \|\Phi\| = \|\phi\|$$

となるものが存在する.

Proof. 複素ノルム空間は実ノルム空間と見ることができ, 複素線形写像は実線形写像と見ることができる. 複素線形汎関数の実部, 虚部は実線形汎関数となる.

$$\phi(x) = \mathrm{Re}\phi(x) + i\mathrm{Im}\phi(x) = \psi_1(x) + i\psi_2(x)$$

ただし
$$\psi_1(x) = \frac{\phi(x) + \overline{\phi(x)}}{2}, \quad \psi_2(x) = \frac{\phi(x) - \overline{\phi(x)}}{2i}.$$
このとき, 以下の計算より
$$\psi_1(ix) = -\psi_2(x),\ \psi_2(ix) = \psi_1(x),\ \|\phi\| = \|\psi_1\| = \|\psi_2\|$$
がわかる.
$$\begin{aligned}\phi(ix) &= \psi_1(ix) + i\psi_2(ix)\\ =& i\phi(x) = i(\psi_1(x) + i\psi_2(x)) = -\psi_2(x) + i\psi_1(x),\end{aligned}$$
$$|\phi(x)| = \phi(x)e^{i\theta} = \phi(e^{i\theta}x) = \psi_1(e^{i\theta}x) = \psi_2(ie^{i\theta}x).$$
実線形汎関数 $\psi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ に Hahn-Banach (real vrsion) を適用すると実線形汎関数 $\Psi_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ で
$$\Psi_1|_Y = \psi_1, \quad \|\Psi_1\| = \|\psi_1\|$$
となるものが存在する. この Ψ_1 を用いて
$$\Phi(x) = \Psi_1(x) - i\Psi_1(ix)$$
と定義すると以下のように線形性が確かめられる.
$$\begin{aligned}\Phi(x+y) &= \Psi_1(x+y) - i\Psi_1(ix+iy)\\ &= \Psi_1(x) - i\Psi_1(ix) + \Psi_1(y) - i\Psi_1(iy) = \Phi(x) + \Phi(y),\\ \Phi(\alpha x) &= \alpha\Phi(x) \qquad (\alpha \in \mathbb{R})\\ \Phi(ix) &= \Psi_1(ix) - i\Psi_1(-x) = \Psi_1(ix) + i\Psi_1(x)\\ & i(\Psi_1(x) - i\Psi_1(ix)) = i\Phi(x).\end{aligned}$$
ノルムについても
$$|\Phi(x)| = \Phi(x)e^{i\theta} = \Phi(e^{i\theta}x) = \Psi_1(e^{i\theta}x)$$
より $\|\Phi\| = \|\Psi_1\| = \|\psi_1\| = \|\phi\|$ となる. □

ノルム空間 X に対して X 上の有界線形汎関数の全体を X^* と書き, X の双対空間と呼ぶ. $x \in X$, $x' \in X^*$ に対してスカラー値 $x'(x)$ を
$$\langle x, x' \rangle$$
と書き表すこともある.

Corollary 3.4. $x_0 \in X$ に対して

$$\Phi(x_0) = \|x_0\|, \quad \|\Phi\| = 1$$

となる $\Phi \in X^*$ が存在する.

Proof. x_0 が生成する部分空間 $Y = \{ax_0 : a \in \mathbb{C}(\text{or } \mathbb{R})\}$ を考える. Y 上の有界線形汎関数 ϕ を

$$\phi(ax_0) = a_0\|x_0\|$$

と定義する. このとき

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(x)| : x \in Y, \|x\| = 1\} = \sup\{\phi(\frac{ax_0}{\|ax_0\|}) : ax_0 \in Y\} = 1$$

なので X 上の有界線形汎関数 Φ で $\Phi|_Y = \phi$, $\|\Phi\| = \|\phi\| = 1$ となるものが存在し $\Phi(x_0) = \phi(x_0) = 1$ となる. □

Corollary 3.5. $x \in X$ に対して

$$\|x\| = \sup\{|\langle x, x'\rangle| : \|x'\| \leq 1, x' \in X^*\}.$$

Proof. $\|x'\| \leq 1$ だから

$$|\langle x, x'\rangle| = |x'(x)| \leq \|x\|\|x'\| \leq \|x\|.$$

したがって $\|x\| \geq \sup\{|\langle x, x'\rangle| : \|x'\| \leq 1, x' \in X'\}$ となる. 逆の不等号は、前の corollary よりしたがう. □

3.2 局所凸空間

ここまでノルム空間を中心に話を進めてきたが, さらに広い対象である局所凸空間について述べることにする.

E を $\mathbb{K}(= \mathbb{R} \text{ or } \mathbb{C})$ 上の線形空間とする. E に位相が定義されていて (開集合系が与えられていて), この位相に関して

$$E \times E \ni (x, y) \mapsto x + y \in E$$
$$\mathbb{K} \times E \ni (\alpha, x) \mapsto \alpha x \in E$$

が連続となるとき, E を**線形位相空間**という.

V が線形位相空間 E の点 $x \in E$ の近傍であるとは, E の開集合 U で

$$x \in U \subset V$$

となるものが存在することである. x の近傍の集合 $\mathcal{U}_x$ が x の基本近傍系であるとは, x の任意の近傍 V に対して

$$x \in U \subset V$$

となる $u \in \mathcal{U}_x$ が存在することである. 線形位相空間においては, $\mathcal{U}$ が $0 \in E$ の基本近傍系であれば, 加法の連続性を用いて

$$\{x + U : u \in \mathcal{U}\}$$

は, $x \in E$ の基本近傍系になることがわかる.

線形位相空間 E が凸集合からなる $0 \in E$ の基本近傍系をもつとき, E を**局所凸空間**という.

例 ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ は局所凸空間である.

$$U_n = \{x \in X : \|x\| < 1/n\}$$

とおくと, $\{U_n : n = 1, 2, \ldots\}$ は 0 の基本近傍系であり, U_n は凸集合である.

U_n が凸であることは, $x, y \in U_n$, $0 \leq t \leq 1$ に対して

$$\|(1-t)x + ty\| \leq (1-t)\|x\| + t\|y\| < \frac{1}{n}$$

なので $(1-t)x + ty \in U_n$.

E を線形空間とし E 上の汎関数 $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ が次を満たすとき E 上の劣加法的汎関数という.

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad x, y \in X$$
$$p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad \alpha \geq 0.。$$

を満たすとき E 上の劣加法的汎関数という. さらに

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad x, y \in X$$
$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x),$$

を満たすとき半ノルムという.

線形空間 E の部分集合 A が吸収的 (absorbing) であるとは

$$\forall x \in E\ \exists \lambda > 0\ s.t.\ \lambda x \in A.$$

特に, 吸収的であれば 0 を含む.

各 $x \in E$ に対して, $\lambda \to 0$ のとき, $\lambda x \to 0$ となるので, 0 の近傍は吸収的であることがわかる.

Proposition 3.6 (Minkowski 汎関数)**.** *V を線形空間 E の吸収的な凸集合とする.*

$$p(x) = \inf\{\rho > 0 : x \in \rho V\}$$

と定義すると $p(x)$ は劣加法的である.

さらに, V が円形であるとき, つまり $\mu V = V$ for all $|\mu| = 1$ のとき, p は半ノルムである.

Proof. $x, y \in E$, $\epsilon > 0$ とする. p の定義より

$$\frac{x}{p(x)+\epsilon}, \frac{y}{p(y)+\epsilon} \in V.$$

V が凸であることから

$$\begin{aligned}&\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\epsilon}\\ =&\frac{p(x)+\epsilon}{p(x)+p(y)+2\epsilon}\frac{x}{p(x)+\epsilon} + \frac{p(y)+\epsilon}{p(x)+p(y)+2\epsilon}\frac{y}{p(y)+\epsilon} \in V\end{aligned}$$

となり, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ がわかる.

$\alpha = 0$ のときは明らかなので, $\alpha > 0$ のとき

$$\frac{\alpha x}{\alpha p(x) + \alpha\epsilon} = \frac{x}{p(x)+\epsilon} \in V$$

だから

$$p(\alpha x) \leq \alpha p(x) = \alpha p(\frac{1}{\alpha}\alpha x) \leq p(\alpha x)$$

となり, $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ である.

最後の条件のもと, $\alpha \neq 0$ とすると, $\frac{\alpha x}{p(\alpha x)+\epsilon} \in V$ より $\frac{\mu\alpha x}{p(\alpha x)+\epsilon} \in V$ となるので

$$p(\mu\alpha x) \leq p(\alpha x)$$

がなりたつ. $p(\alpha x) = p(\bar{\mu}\mu\alpha x) \leq p(\mu\alpha x) \leq p(\alpha x)$ だから

$$p(\alpha x) = p(|\alpha|x) = |\alpha|p(x).$$

□

例　Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする. $C(\Omega)$ を Ω 上の複素数値連続関数の全体とする. Ω のコンパクト部分集合 K と $\epsilon > 0$ に対して

$$V(K,\epsilon) = \{x \in C(\Omega) : \max_{t\in K} |x(t)| < \epsilon\}$$

と定義すると $V(K,\epsilon)$ は吸収的, 円形な凸集合になる.

$C(\Omega)$ の各点 x に対して

$$\{x + V(K,\epsilon) : K \text{ は } \Omega \text{ のコンパクト部分集合 }, \epsilon > 0\}$$

が x の基本近傍系となる位相を考えると $C(\Omega)$ は局所凸空間になる.

$V(K,1)$ の定義から明らかであるが, これに対応する半ノルムは

$$p_K(x) = \max\{|x(t)| : t \in K\}$$

であり, 上の $C(\Omega)$ の位相は, 半ノルムの族 $\{p_K : K$ はコンパクト部分集合 $\}$ が連続になるような最も弱い位相と考えることができる.

3.3　弱位相

E, F を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする. 写像 $E \times F \ni (x,f) \mapsto \langle x,f\rangle \in \mathbb{K}$ が

$$\langle x, f+g\rangle = \langle x,f\rangle + \langle xg\rangle \ \langle x+y, f\rangle = \langle x,f\rangle + \langle yf\rangle$$
$$\langle \alpha x, f\rangle = \alpha\langle x,f\rangle$$
$$\langle x, \alpha f\rangle = \alpha\langle x,f\rangle$$
$$\langle x,f\rangle = 0 \text{ for all } x \in E \Rightarrow f = 0$$
$$\langle x,f\rangle = 0 \text{ for all } f \in F \Rightarrow x = 0$$

を満たすとき F を E の随伴空間 (adjoint space) という.

E をノルム空間とするとき, E の双対空間 E' は E の随伴空間である. また, E を E' の随伴空間ということもできる. したがって E, E'' はともに E の随伴空間である.

F が線形空間 E の随伴空間であるとき $x_0 \in E$, $f_1, \ldots, f_n \in F$, $\epsilon > 0$ に対して

$$U(x_0; f_1, \ldots, f_n; \epsilon) = \{x \in E : |\langle x, f_i \rangle - \langle x_0, f_i \rangle| < \epsilon, i = 1, \ldots, n\}$$

とおき

$$\{U(x_0; f_1, \ldots, f_n; \epsilon) : n \in \mathbb{N}, f_1, \ldots, f_n \in F, \epsilon > 0\}$$

が x_0 の基本近傍系となる E の位相を F から E に導入された弱位相といい, $\sigma(E, F)$ とあらわす.

$f \in F$ に対して

$$p_f(x) = |\langle x, f \rangle| \qquad x \in E$$

と定義すると p_f は E 上の半ノルムである.

$$U(x_0; f_1, \ldots, f_n; \epsilon) = \{x \in E : p_{f_1}(x - x_0) < \epsilon, \ldots, p_{f_n}(x - x_0) < \epsilon\}$$

となり, E 上の $\sigma(E, F)$ 位相は半ノルムの族 $\{p_f : f \in F\}$ によって導入された位相ということになる. このとき E は局所凸空間である.

ノルム空間 E において, 随伴空間を用いた局所凸空間の位相など以下のような位相が用いられる.

- $\sigma(E, E')$ を E の弱位相 (weak topology)
- ノルムによる位相 を E の強位相 (strong topology)
- $\sigma(E', E)$ を E' の w*-位相 (weak* topology)

という.

Lemma 3.7. F を E の随伴空間とする. $f_1, \ldots, f_n \in F$ が一次独立なとき, $x_1, \ldots, x_n \in E$ で

$$\langle x_i, f_j \rangle = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

となるものが存在する.

Proof. $n=1$ のとき随伴空間の定義より $\langle x, f_1\rangle \neq 0$ となる $x \in E$ が存在するので

$$x_1 = \frac{x}{\langle x, f_1\rangle}$$

と選べばよい.

n のとき, $x_1, \ldots, x_{n-1}$ が選べて

$$\langle x_i, f_j\rangle = \begin{cases} 1 & (1 \leq i = j \leq n-1) \\ 0 & (1 \leq i \neq j \leq n-1) \end{cases}$$

と仮定する. $x \in E$ で $\langle x, f_1\rangle = \cdots = \langle x, f_{n-1}\rangle = 0$ かつ $\langle x, f_n\rangle \neq 0$ となるものが存在すれば

$$x_n = \frac{x}{\langle x, f_n\rangle}$$

と選べばよい. したがって

$$\{x \in E : \langle x, f_1\rangle = \cdots = \langle x, f_{n-1}\rangle = 0\} \subset \{x \in E : \langle x, f_n\rangle = 0\}$$

と仮定して矛盾することを示せばよい.

任意の $x \in E$ に対して

$$x_0 = x - \sum_{i=1}^{n-1} \langle x, f_i\rangle x_i$$

とおくと, $\langle x_0, f_1\rangle = \cdots = \langle x_0, f_{n-1}\rangle = 0$ となる. 仮定より $\langle x_0, f_n\rangle = 0$ となる. このとき

$$\begin{aligned} \langle x, f_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle x, f_n\rangle f_i\rangle &= \langle x, f_n\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \langle x, f_i\rangle\langle x_i, f_n\rangle \\ &= \langle x_0, f_n\rangle = 0 \end{aligned}$$

なので

$$f_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle x, f_n\rangle f_i = 0$$

となり $f_1, \ldots, f_n$ が一次独立であることに反する. □

Theorem 3.8. F を E の随伴空間, ψ を E 上の線形汎関数とする. このとき, ψ が $\sigma(E,F)$ 位相で連続であるための必要十分条件は

$$\psi(x) = \langle x, f\rangle \quad \textit{for all } x \in E$$

となる $f \in F$ が存在することである.

Proof. $\psi(x) = \langle x, f\rangle$ のとき, $\epsilon > 0$ に対して

$$p_f(x) < \epsilon \Rightarrow |\psi(x)| < \epsilon$$

なので $\sigma(E,F)$ 位相に関して 0 で連続になる. ψ の線形性より $\sigma(E,F)$ 位相に関して連続であることがわかる.

ψ が $\sigma(E,F)$ 位相に関して連続であるとする. このとき, 0 の基本近傍系の形から

$$p_{f_1}(x) < 1, \ldots, p_{f_n}(x) < 1 \Rightarrow |\psi(x)| < 1$$

となる $f_1, \ldots, f_n \in F$ を選ぶことができる. さらに $f_1, \ldots, f_n$ は一次独立であると仮定してよい. このとき

$$|\psi(x)| \le \max_{1\le i\le n} |\langle x, f_i\rangle|$$

となるから, $\langle x, f_1\rangle = \cdots = \langle x, f_n\rangle = 0$ ならば $\psi(x) = 0$ となることがわかる.

この $f_1, \ldots, f_n$ に対して, Lemma 3.7 のような $x_1, \ldots, x_n \in E$ を選ぶ. 任意の $x \in E$ に対して

$$x_0 = x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, f_i\rangle x_i$$

とおくと $\langle x_0, f_j\rangle = \langle x, f_j\rangle - \langle x, f_j\rangle = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ なので $\psi(x_0) = 0$ となる. つまり

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, f_i\rangle \psi(x_i) = \langle x, \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i) f_i\rangle$$

なので, $f = \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i) f_i$ とすればよい. □

Corollary 3.9. *E をノルム空間, ψ を E' 上の線形汎関数とする. ψ が w^* 位相 $(\sigma(E', E))$ で連続であるための必要十分条件は $x \in E$ で $\psi(f) = \langle x, f\rangle$ $(f \in F)$ となる x が存在することである.*

Theorem 3.10 (Alaoglu)**.** *E をノルム空間とする. E' の単位球 $S' = \{f \in E' : \|f\| \leq 1\}$ は w^*-位相に関してコンパクトである.*

Proof. E の単位球を $S = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ と表す. 各 $x \in S$ に対して $I_x = \{|\lambda| \leq 1\}$ とおく. I_x は実数または複素数の単位球 (有界閉集合) なのでコンパクトである. チコノフの定理よりコンパクト集合の直積空間

$$\Gamma = \prod_{x \in S} I_x$$

はまたコンパクトである.

$S' = \{f \in E' : \|f\| \leq 1\}$ の元 f に対して, 次の対応

$$\prod_{x \in S} (\langle x, f\rangle) \in \Gamma$$

で S' を Γ の部分集合とみることにする. このとき S' の $\sigma(E', E)$ の制限と, Γ の直積位相は同じものであるので, S' の Γ での閉包はコンパクトになる.

したがって S' が Γ の部分集合として閉であることをみればよい. つまり $g = (g_x)_{x \in S} \in \Gamma$ が S' の集積点とする. このとき

$$g_{\alpha x} = \alpha g_x,\ g_x + g_y = g_{x+y},\ \sup_{x \in S} |g_x| \leq 1$$

が $x, y, \alpha x, x + y \in S$ に対して確かめられれば, g は S' の元であることがわかる. 少し雑な記述だが, 例えば

$$g_x + g_y = \lim_{f \to g} \langle x, f\rangle + \lim_{f \to g} \langle y, f\rangle = \lim_{f \to g} \langle x + y, f\rangle = g_{x+y}$$

というように確かめられる. □

3.4 Hilbert 空間上の有界線形作用素の位相

H を Hilbert 空間とする. Cauchy-Schwarz の不等式 $|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|$ より

$$H \ni x \mapsto (x|y) \in \mathbb{C}$$

で定まる線形汎関数は有界であることがわかる, また, この汎関数のノルムは $\|y\|$ である.

Theorem 3.11 (Riesz)**.** ϕ を H 上の有界線形汎関数とする. このとき $y_\phi \in H$ が存在して

$$\phi(x) = (x|y_\phi) \qquad \textit{for all } x \in H$$

が成立する.

Proof. H の完全正規直交系を $\{x_\alpha\}$ とする. このとき

$$y_\phi = \sum_\alpha \overline{\phi(x_\alpha)} x_\alpha$$

で与えられることを示す.

この直交系の有限個の $x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}$ に対して

$$z = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{\phi(x_{\alpha(i)})} x_{\alpha(i)}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\phi(x_{\alpha(j)})|^2}}$$

とおくと $\|z\| = 1$ なので

$$\phi(z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\phi(x_{\alpha(i)})|^2} \leq \|\phi\|.$$

したがって $y_\phi \in H$ であることがわかる.

任意の $x = \sum_\alpha a_\alpha x_\alpha$, $(\|x\| = \sqrt{\sum_\alpha |a_\alpha|^2})$ に対して

$$\phi(x) = \sum_\alpha a_\alpha \phi(x_\alpha) = (x|y_\alpha)$$

となる. $\square$

Hilbert 空間の位相として 内積 $(\cdot|\cdot)$ から定まるノルムによる位相がある. この位相を強位相という.

H の双対空間 H' の元 ϕ を用いて半ノルム

$$p_\phi(x) = |\phi(x)| \quad (x \in H)$$

を定義し $x_0 \in H$ の近傍

$$U(x_0 : \phi_1, \ldots, \phi_n : \epsilon) = \{x \in H : p_{\phi_i}(x) < \epsilon,\ i = 1, \ldots, n\}$$

を定める局所凸空間の位相が考えられる. この位相を弱位相という.

Riesz の定理より $\phi \in H'$ は $y_\phi \in H$ と見ることができるので, 弱位相は, $y \in H$ を用いた半ノルム

$$p_y(x) = |(x|y)| \quad (x \in H)$$

によって得られる局所凸空間の位相である.

H の点列 $\{x_n\}$ が $\tilde{x} \in H$ に強収束するとは

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - \tilde{x}\| = 0$$

となることである.

H の点列 $\{x_n\}$ が $\tilde{x} \in H$ に弱収束するとは

$$\lim_{n\to\infty} |\langle x_n - \tilde{x}, y\rangle| = 0 \quad \text{for all } y \in H$$

となることである.

H の点列 $\{x_n\}$ が $\tilde{x} \in H$ に強収束するとき, Cauchy-Schwarz の不等式を用いて, $\tilde{x} \in H$ に弱収束することがわかる. しかし, $\{x_n\}$ を正規直交列とするとき, $\{x_n\}$ は 0 に弱収束するが, 強収束列ではない.

H の元の収束は, H から H への有界線形作用素の収束にもいろいろな違いがでてくる. 有界線形作用素の列 $\{T_n\} \subset B(H, H)$ が

- $\{T_n\}$ が $T \in B(H, H)$ にノルム収束するとは,

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0.$$

- $\{T_n\}$ が $T \in B(H, H)$ に強収束するとは,

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0 \quad \text{for all } x \in H.$$

- $\{T_n\}$ が $T \in B(H, H)$ に弱収束するとは,

$$\lim_{n\to\infty} |\langle T_n x - Tx, y\rangle| = 0 \quad \text{for all } x, y \in H.$$

明らかに, ノルム収束 $\Rightarrow$ 強収束 $\Rightarrow$ 弱収束が成立する.
　また一様有界性の原理を用いれば, $\{T_n\} \subset B(H,H)$ が

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0 \quad \text{for all } x \in H.$$

のとき, $T \in B(H,H)$ で

$$\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$$

となる.
　実際, 各 $x \in H$ に対して $\{T_n x\}$ が強収束することから

$$T : H \ni x \mapsto \lim_{n\to\infty} T_n x \in H$$

によって写像 T を定義することができる. $x, y \in H$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} T(\alpha x + y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + y) = \lim_{n\to\infty} (\alpha T_n x + T_n y) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n x + \lim_{n\to\infty} T_n y = \alpha Tx + Ty \end{aligned}$$

となるので T は線形作用素である. また, 各 $x \in H$ に対して $\{\|T_n x\|\}$ が有界であるので, 一様有界性の原理により $\{\|T_n\|\}$ も有界になる.

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| = \liminf_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| \|x\|$$

と $\|T\|$ の評価を得ることができる.

　Riesz の定理を用いて $T \in B(H,H)$ の**共役線形作用素** $T^* \in B(H,H)$ を定義しておく.
　$y \in H$ に対して

$$\varphi_y(x) = (Tx|y)$$

と定義すると $\varphi_y \in H'$ となる. Riesz の定理より

$$\varphi_y(x) = (x|z) \quad \text{for all } x \in H$$

となる $z \in H$ が φ_y に対してただ一つ定まる. ここで

$$T^* y = z$$

として H から H への写像 T^* を定義する. $y_1, y_2 \in H$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}(x|T^*(\alpha y_1 + y_2)) &= \varphi_{\alpha y_1 + y_2}(x) = (Tx|\alpha y_1 + y_2) \\ &= \bar{\alpha}(Tx|y_1) + (Tx|y_2) = \bar{\alpha}\varphi_{y_1}(x) + \varphi_{y_2}(x) \\ &= \bar{\alpha}(x|T^*y_1) + (x|T^*y_2) = (x|\alpha T^*y_1 + T^*y_2)\end{aligned}$$

となり T^* が線形作用素であることがわかる.
任意の $x, y \in H$ に対して

$$(Tx|y) = (x|T^*y)$$

の関係を持つことと, 有界線形作用素のノルムが

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} = \sup\{|(Tx|y)| : \|x\| = \|y\| = 1\}$$

で与えられることから, $\|T\| = \|T^*\|$ であることがわかる.

4　Hilbert 空間上の有界線形作用素

4.1　直交分解

H をヒルベルト空間とし, H から H への有界線形作用素の全体を $B(H)$ と書くことにする.

S を H の部分集合とする. S の直交補空間を

$$S^\perp = \{x \in H : (x|y) = 0 \text{ for all } y \in S\}$$

で定義する. この定義から H の 2 つの部分集合 S, T について

$$S \subset T \Rightarrow S^\perp \supset T^\perp$$

であることがわかる.

Lemma 4.1. *H の部分集合 S に対して S の直交補空間 $S^\perp$ は H の閉部分空間である.*

Proof. $\alpha \in \mathbb{C}$, $x_1, x_2 \in S^\perp$ に対して

$$(\alpha x_1 + x_2|y) = \alpha(x_1|y) + (x_2|y) = 0 \quad \text{for all } y \in S$$

なので $\alpha x_1 + x_2 \in S^\perp$ がわかる. また, $(x_n|y) = 0$, $\|x_n - x\| \to 0$ $(n \to \infty)$ のとき

$$(x|y) = \lim_{n\to\infty} (x_n|y) = 0$$

となり $S^\perp$ が閉であることがわかる. □

Proposition 4.2. *C を H の閉凸集合とする. $x \notin C$ のとき C の元 x_0 で*

$$\|x - x_0\| = \inf\{\|x - y\| : y \in C\}$$

となるものが, ただ一つ存在する.

Proof. $d = \inf\{\|x - y\| : y \in C\}$ とおき, $\{x_n\} \subset C$ を

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = d$$

となるように選ぶ．中線定理より

$$\|(x_n-x_0)+(x_m-x_0)\|^2+\|(x_n-x_0)-(x_m-x_0)\|^2 = 2(\|x_n-x_0\|^2+\|x_m-x_0\|^2)$$

となるので

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\|^2 &= 2\|x_n - x_0\|^2 + 2\|x_m - x_0\|^2 - 4\|\frac{x_n + x_m}{2} - x_0\|^2 \\ &\le 2\|x_n - x_0\|^2 + 2\|x_m - x_0\|^2 - 4d^2,\end{aligned}$$

ここで $\frac{x_n+x_m}{2} \in C$ を用いた．$n, m \to \infty$ のとき, 上の最後の項は 0 に近づくので $\{x_n\}$ は Cauchy 列である．この極限を $y \in C$ とすると

$$\|x_0 - y\| = \lim_{n\to\infty} \|x_0 - x_n\| = d$$

となる．

もし $y_1 \in C$ で $\|x_0 - y_1\| = d$ であるとすると

$$\|y - y_1\|^2 \le 2\|y - x_0\|^2 + 2\|y_1 - x_0\|^2 - 4d^2 = 0$$

となるので $y = y_1$ となり, 一意性がわかる． □

Theorem 4.3. K を H の閉部分空間とする．このとき, 任意の $x \in H$ に対して

$$x = y + z$$

となる $(y, z) \in K \times K^\perp$ が一意に存在する．

Proof. $x \in K \cap K^\perp$ であれば $(x|x) = 0$ となり $x = 0$ であることがわかる．これより, $x = y + z = y_1 + z_1$ $(y, y_1 \in K,\ z, z_1 \in K^\perp)$ となると $y - y_1 = z_1 - z \in K \cap K^\perp$ となり $y = y_1, z = z_1$ であり, 上の分解ができれば, 一意的であることがわかる．

$x \in K$ のときは, $x = x + 0$ で上の分解が得られたことになる．

$x \notin K$ のとき, K は閉凸集合であるから Proposition 4.2 より $y \in K$ で

$$\|x - y\| = \inf\{\|x - w\| : w \in K\}$$

となるものが存在する．もし $z = x - y \notin K^\perp$ であるとすると, $y' \in K$ を

$$\|y'\| = 1, \quad (z|x) \ne 0$$

となるように選ぶ.

$$z = (z|y')y' + (z - (z|y')y'), \quad (z|y')y' \perp (z - (z|y')y')$$

だから

$$\|x - (y + (z|y')y')\| = \|z - (z|y')y'\| < \|z\| = \inf\{\|x - w\| : w \in K\}$$

のように矛盾となる. したがって $z \in K^\perp$ である. □

Corollary 4.4. H の部分集合 S に対して, $(S^\perp)^\perp$ は S を含む最小の閉部分空間である.

Proof. S を含む閉部分空間は, S の元の一次結合からできる部分空間のノルム閉包 $\tilde{S}$ を含むので $\tilde{S}$ が S を含む最小の閉部分空間となる. このとき, $\tilde{S}$ の構成より $S^\perp = \tilde{S}^\perp$ であり, $\tilde{S}$ に定理の分解を適用すると, $x \in (S^\perp)^\perp$ に対して

$$x = y + z, \quad y \in \tilde{S}, z \in \tilde{S}^\perp = S^\perp$$

が得られる. $(x|z) = (y|z) = 0$ なので $(z|z) = 0$ となり, $x = y \in \tilde{S}$. したがって $(S^\perp)^\perp = \tilde{S}$ である. □

H の閉部分空間 K に対して, 上の定理より, $x \in H$ に対して $x = x_1 + x_2$ ($x_1 \in K$, $x_2 \in K^\perp$) と分解できる. このとき $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$ となっている. この分解の一意性から線形作用素 P_K, $P_{K^\perp}$ を

$$P_K x = x_1, \quad P_{K^\perp} x = x_2$$

によって定義することができる. P_K を K への直交射影という.

Proposition 4.5. 閉部分空間 K への直交射影 P_K は次の性質をもつ

$$P_K = P_K^2 = P_K^*, \quad \|P_K\| = 1.$$

逆に, 有界線形作用素 P が

$$P = P^2 = P^*$$

を満たせば, 閉部分空間 $\tilde{K}$ が存在して $P = P_{\tilde{K}}$ となる.

Proof. $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$ より $\|P_K x\| = \|x_1\| \le \|x\|$ となるので $\|P_K\| \le 1$ となる. また $x \in K$ のとき $\|P_K x\| = \|x\|$ なので $\|P_K\| = 1$ であり, また直交分解の一意性より $P_K^2 = P_K$ がわかる.

$x, y \in H$ を K を用いて直交分解する

$$x = x_1 + x_2,\ y = y_1 + y_2,\ x_1, y_1 \in K,\ x_2, y_2 \in K^\perp.$$

このとき

$$(P_K x|y) = (x_1|y_1 + y_2) = (x_1|y_1) = (x_1 + x_2|y_1) = (x|P_K y)$$

となるので $P^* = P$ である.

$P \in B(H)$ が $P = P^2 = P^*$ を満たすとする. P の線形性より $\tilde{K} = PH = \{Px : x \in H\}$ は H の部分空間である.

$x \in \tilde{K}$ とすると $x = Py$ となる $y \in H$ がとれる. このとき $Px = PPy = Py = x$ である.

$\{x_n\} \subset \tilde{K}$ で $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ とする. P の連続性より

$$Px = \lim_{n\to\infty} Px_n = \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

となるので, $x \in K$ となり K が閉集合であることがわかる.

$x \in H$ に対して $x = Px + (x - Px)$ なので $x - Px \in \tilde{K}^\perp$ を示せば, $P = P_{\tilde{K}}$ であることがわかる. $y \in \tilde{K}$ に対して

$$(x - Px|y) = (x - Px|Py) = (P^*(x - Px)|y) = (P(x - Px)|y) = 0$$

だから $x - Px \in \tilde{K}^\perp$ である. □

4.2 作用素のスペクトル

$T \in B(H)$ が可逆であるとは, $S \in B(H)$ で

$$ST = I = TS$$

となるものが存在すること, ここで I は恒等作用素である ($Ix = x$ for all $x \in H$).

$T \in B(H)$ に対して, T の核 $\mathrm{Ker}(T) = \{x \in H : Tx = 0\}$ は, 閉部分空間である. $\mathrm{Ker}(T)^\perp$ への直交射影を T のサポート射影といい, $s(T)$ と書く. T の値域 $R(T) = \{Tx : x \in H\}$ は, H の部分空間であるが, 一般的

には閉集合とはならない. $R(T)$ の閉包への射影を T の値域射影といい, $r(T)$ と書く. このとき

$$T = r(T)Ts(T)$$

である

Lemma 4.6. $T \in B(H)$ が $\gamma > 0$ に対して

$$\|Tx\| \geq \gamma\|x\| \quad \textit{for all } x \in H$$

を満たすとき, $R(T)$ は閉となる.

Proof. $y_n \in R(T), \lim_{n\to\infty} \|y_n - y\| = 0$ とする. $y_n \in R(T)$ より $y_n = Tx_n$ となる $x_n \in H$ を選ぶと

$$\|y_n - y_m\| = \|Tx_n - Tx_m\| \geq \gamma\|x_n - x_m\|$$

なので $\{x_n\}$ は Cauchy 列になり極限 x_∞ をもつ. T は連続だから $Tx_\infty = y$ となり $y \in R(T)$ である. □

Theorem 2.12 より $T \in B(H)$ のとき, T が全単射であれば, T は可逆である.

Corollary 4.7. $T \in B(H)$ が $\gamma > 0$ に対して

$$\|Tx\| \geq \gamma\|x\| \quad \textit{for all } x \in H$$

を満たし, $R(T)$ が H で稠密であれば, T は可逆である.

複素数 λ 対して作用素 $\lambda I - T$ を考える.

- $\mathrm{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$ のとき, λ を T の点スペクトル (固有値) という.
- $\mathrm{Ker}(\lambda I - T) = \{0\}$ のとき
  - $\overline{R(\lambda I - T)} \neq H$ のとき, λ を T の剰余スペクトルという.
  - $\overline{R(\lambda I - T)} = H$ かつ $R(\lambda I - T) \neq H$ のとき, λ を T の連続スペクトルという.
  - $R(\lambda I - T) = H$ のとき, λ を T のリゾルベントという.

T の点スペクトル $\sigma_p(T)$, 剰余スペクトル $\sigma_r(T)$, 連続スペクトル $\sigma_c(T)$ をあわせて T のスペクトル $\sigma(T)$ という.

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T).$$

λ が T のリゾルベント $\rho(T)$ であること $\lambda I - T$ は可逆であることは同値である.

$$\sigma(T) \cup \rho(T) = \mathbb{C}$$

である.

Proposition 4.8. *$T \in B(H)$ が $\|I - T\| < 1$ を満たすとき, T は可逆である.*

Proof. $\|I - T\| < 1$ より

$$S = I + (I - T) + (I - T)^2 + (I - T)^3 + \cdots$$

はノルム収束し, $ST = I = TS$ となる. □

Corollary 4.9. *$\lambda > \|T\|$ のとき $\lambda I - T$ は可逆である. つまり $\lambda \in \rho(T)$.*

Proof. $\|I - (I - \frac{T}{\lambda})\| = \frac{\|T\|}{\lambda} < 1$ より $I - \frac{T}{\lambda}$ が可逆であることがわかる. □

Corollary 4.10. *$T \in B(H)$ が可逆で $\|T - S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ のとき, S も可逆である.*

Proof. $\|I - T^{-1}S\| \leq \|T^{-1}\|\|T - S\| < 1$ なので $T^{-1}S$ が可逆になり, S が可逆であることがわかる. □

有限次元のときは線形代数の知識として予想される性質もあるが, 無限次元の場合は議論の違いや, 注意すべき事柄も増えてくる. それらをまとめて紹介する.

Proposition 4.11. *$S, T \in B(H)$ のとき*

(1) $\sigma(ST) \cup \{0\} = \sigma(TS) \cup \{0\}$.

(2) $\sigma(S) \neq \phi$.

Proof. (1)　補集合を考えて $\rho(ST) \setminus \{0\} = \rho(TS) \setminus \{0\}$ を示せば良い. $\lambda \in \rho(ST) \setminus \{0\}$ とすると $\lambda \neq 0$ で

$$(\lambda I - ST)R = I = R(\lambda I - ST)$$

となる $R \in B(H)$ が存在する. このとき

$$\begin{aligned}(\lambda I - TS)\lambda^{-1}(I + TRS) &= I + TRS - \lambda^{-1}T(I + SRT)S \\ &= I + TRS - \lambda^{-1}T(\lambda R)S = I,\end{aligned}$$

同様に

$$\lambda^{-1}(I + TRS)(\lambda I - TS) = I$$

となるので, $\lambda \in \rho(TS) \setminus \{0\}$ である.

(2) $x, y \in H$, $\lambda \in \rho(T)$ に対して

$$f_{x,y}(\lambda) = ((\lambda I - T)^{-1}x|y)$$

と定義する. $|\lambda - \mu|$ が十分小さいとき, $\mu \in \rho(T)$ であり

$$\begin{aligned}&(\mu I - T)^{-1} = ((\mu I - \lambda I) + (\lambda I - T))^{-1} \\ =&(\lambda I - T)^{-1}(I - (\lambda - \mu)(\lambda I - T)^{-1})^{-1} \\ =&(\lambda I - T)^{-1} + (\lambda - \mu)(\lambda I - T)^{-2} + (\lambda - \mu)^2(\lambda I - T)^{-3} + \cdots\end{aligned}$$

となるので

$$f_{x,y}(\mu) = f_{x,y}(\lambda) + f^1_{x,y}(\lambda)(\mu - \lambda) + f^2_{x,y}(\lambda)(\mu - \lambda)^2 + \cdots,$$

ここで $f^n_{x,y}(\lambda) = (-1)^n((\lambda I - T)^{-n-1}x|y)$ である. したがって $f_{x,y}$ は $\rho(T)$ 上で正則な関数になる.

$\sigma(T) = \phi$ であれば, $f_{x,y}$ は $\mathbb{C}$ 上で正則な関数になり,

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} f_{x,y}(\lambda) = 0$$

となるので Liouville の定理より $f_{x,y}(\lambda) = 0$ である. したがって $(\lambda I - T)^{-1} = 0$ となり矛盾. □

$T \in B(H)$ に対して $r(T)$ を

$$r(T) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

で定義し T のスペクトル半径という.

Proposition 4.12.

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Proof. 上でみたように $|\lambda| > \|T\|$ のとき

$$(\lambda I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} + \frac{T}{\lambda^2} + \frac{T^2}{\lambda^3} + \cdots$$

と Laurent 展開できる. $r(T) \le \|T\|$ であり $|\lambda| > r(T)$ ならば, 同様に

$$(\lambda I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} + \frac{T}{\lambda^2} + \frac{T^2}{\lambda^3} + \cdots$$

と Laurent 展開できる. この右辺は収束するので n が十分大きければ $\|T^n/\lambda^{n+1}\| < 1$ となる. したがって

$$|\lambda| = \lim_{n\to\infty} |\lambda|^{(n+1)/n} \ge \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

となり $r(A) \ge \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ である.

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} \lambda^n I - T^n &= (\lambda I - T)(\lambda^{n-1} I + \lambda^{n-2} T + \cdots + T^{n-1}) \\ &= (\lambda^{n-1} I + \lambda^{n-2} T + \cdots + T^{n-1})(\lambda I - T) \end{aligned}$$

だから $\lambda^n \in \rho(T^n)$ ならば $\lambda \in \rho(T)$ となる. $|\lambda|^n \le \|T^n\|$ だから $|\lambda| \le \liminf_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$. したがって

$$r(T) \le \liminf_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$$

となり題意が示された. □

4.3 エルミート作用素

$T \in B(H)$ がエルミート作用素であるとは, $T = T^*$ となることである. つまり

$$(Tx|y) = (x|Ty) \quad \text{for all } x, y \in H.$$

Lemma 4.13. $T \in B(H)$ がエルミートであることと

$$(Tx|x) \in \mathbb{R} \ \ \textit{for all } x \in H$$

が同値.

Proof. T がエルミートであれば

$$(Tx|x) = (x|Tx) = \overline{(Tx|x)} \in \mathbb{R}.$$

$(Tx|x) \in \mathbb{R}$ であれば $(Tx|x) = (x|Tx)$ だから

$$\begin{aligned}(Tx|y) &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} i^k (T(x+i^k y)|x+i^k y) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} i^k (x+i^k y|T(x+i^k y)) = (x|Ty)\end{aligned}$$

となり $T = T^*$ がわかる. □

$T \in B(H)$ が正規であるとは, $T^*T = TT^*$ となることである. T は二つのエルミート作用素, T の実部 $\mathrm{Re}T$, 虚部 $\mathrm{Im}T$ を用いて

$$T = \mathrm{Re}T + i\mathrm{Im}T$$

$$\mathrm{Re}T = \frac{T+T^*}{2}, \quad \mathrm{Im}T = \frac{T-T^*}{2i}$$

と表すことができる. このとき, $T^*T = TT^*$ となることと $(\mathrm{Re}T)(\mathrm{Im}T) = (\mathrm{Im}T)(\mathrm{Re}T)$ が同値であることが確かめられる.

$T \in B(H)$ が正値作用素であるとは

$$(Tx|x) \geq 0 \qquad x \in H$$

となることである.

エルミート作用素の全体は実線形空間であり, 二つのエルミート作用素 S, T に対して $S - T$ が正値作用素であることで半順序を定義することができる.

$$S \geq T \ \Leftrightarrow \ S - T \geq 0 \ \Leftrightarrow \ (Sx|x) \geq (Tx|x) \quad x \in H.$$

$X \in B(H)$ のとき

$$X^*X \leq \|X\|^2 I$$
$$S \geq T \Rightarrow X^*SX \geq X^*TX$$

が成立する.

T 正値作用素であるとき, $x, y \in H$ に対して

$$[x|y] = (Tx|y)$$

と定義すると

- $[x|x] \geq 0$.
- $[x|y] = \overline{[y|x]}$.
- $[\alpha x_1 + x_2|y] = \alpha[x_1|y] + [x_2|y]$.

と内積に近い性質を持つ (半内積). Cauchy-Schwarz の不等式の証明と同様にして, 不等式

$$|[x|y]|^2 \leq [x|x][y|y]$$

つまり

$$|(Tx|y)|^2 \leq (Tx|x)(Ty|y)$$

が得られる.

エルミート作用素は 正規作用素であり, 正値作用素はエルミート作用素である. また, 射影作用素は正値作用素である.

Lemma 4.14. *H の二つの閉部分空間 K_1, K_2 に対して以下は同値*

(1) $K_1 \subset K_2$.

(2) $P_{K_1} \leq P_{K_2}$

(3) $P_{K_2}P_{K_1} = P_{K_1}$.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) K_1 は K_2 の閉部分集合でもあるから, $s \in H$ は $x = x_1 + x_2 + x_3$ で $x_1 + x_2 \in K_2$, $x_3 \in K^\perp$, $x_1 \in K_1$, $x_2 \in K_1^\perp \cap K_2$ という形に分解できる. このとき

$$\begin{aligned}(P_{K_1}x|x) &= (x_1|x_1 + x_2 + x_3) = (x_1|x_1) \\ &\leq (x_1|x_1) + (x_2|x_2) = (x_1 + x_2|x_1 + x_2 + x_3) = (P_{K_2}x|x)\end{aligned}$$

である.

(2) $\Rightarrow$ (3) $x \in K_1^{\perp}$ のとき $P_{K_2}P_{K_1}x = 0 = P_{K_1}x$ だから, $x \in K_1$ に対して $P_{K_2}x = x$ を示せば良い. $\|x\| = 1$ としておく. このとき

$$1 \geq (P_{K_2}x|x) \geq (P_{K_1}x|x) = 1$$

だから $(P_{K_2}x|x) = 1$. $(x|P_{K_2}x - x) = 0$ より $P_{K_2}x = x + (P_{K_2}x - x)$ が直交分解なので $P_{K_2}x - x = 0$ がわかる.

(3) $\Rightarrow$ (1) $x \in K_1$ に対して $P_{K_2}x = x$ を示せば良い.

$$P_{K_2}x = P_{K_2}P_{K_1}x = P_{K_1}x = x.$$

□

Lemma 4.15. $T \in B(H)$, K を H の閉部分空間とする. このとき

$$TK \subset K \;\Leftrightarrow\; TP_K = P_KTP_K.$$

Proof.

$$\begin{aligned} TK \subset K &\Leftrightarrow \forall y \in K,\ Ty \in K \\ &\Leftrightarrow \forall x \in H,\ TP_Kx \in K \\ &\Leftrightarrow \forall x \in H,\ TP_Kx = P_KTP_Kx \\ &\Leftrightarrow TP_K = P_KTP_K \end{aligned}$$

□

$T \in B(H)$ に対して

$$w(T) = \sup\{|(Tx|x)| : x \in H, \|x\| = 1\}$$

を T の数域半径という.

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\| : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{|(Tx|y)| : x, y \in H, \|x\| = \|y\| = 1\} \end{aligned}$$

より

$$w(T) \leq \|T\|$$

である. 一般的に $w(T)$ と $\|T\|$ は等しくない.

Proposition 4.16. T がエルミート作用素のとき

$$w(T) = \|T\|$$

となる.

Proof. $w(T)$ の定義より

$$|(Tx|x)| \leq w(T)\|x\|^2 \qquad \text{for all } x \in H$$

が成立する.

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{|(Tx|y)| : \|x\| = \|y\| = 1\} \\ &= \sup\{|\mathrm{Re}(Tx|y))| : \|x\| = \|y\| = 1\}\end{aligned}$$

となることに注意する. $T = T^*$ より

$$\begin{aligned}|\mathrm{Re}(Tx|y)| &= \frac{1}{4}|(T(x+y)|x+y) - (T(x-y)|x-y)| \\ &\leq \frac{1}{4}(|(T(x+y)|x+y)| + |(T(x-y)|(x-y))|) \\ &\leq \frac{1}{4}w(T)(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \\ &= \frac{1}{2}w(T)(\|x\|^2 + \|y\|^2)\end{aligned}$$

となり $\|T\| \leq w(T)$ が導かれる. □

この結果より, 次の結果を導くことができる.

Corollary 4.17.

$$0 \leq S \leq T \ \Rightarrow \ \|S\| \leq \|T\|.$$

Lemma 4.18. $T \in B(H)$, $T \geq 0$ とする.

(1) $p(t)$ を非負係数をもつ t の多項式とする. このとき, $p(T) \geq 0$ である.

(2) $0 \leq T \leq I$ のとき, $0 \leq T^n \leq I$ *for any* $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Proof. (1) $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$, $a_i \geq 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ とする. 任意の $x \in H$ に対して

$$(p(T)x|x) = a_0(Ix|x) + a_1(Tx|x) + \cdots + a_n(T^n x|x)$$

となるから $(T^i x|x) \geq 0$ を示せば良い.
$i = 2k$ のとき $(T^{2k}x|x) = (T^k x|T^k x) = \|T^k x\|^2 \geq 0$.
$i = 2k+1$ のとき $(T^{2k+1}x|x) = (T(T^k x)|(T^k x)) \geq 0$ となる.
(2) (1) より $0 \leq T^n$ はわかるから $(T^n x|x) \leq (Ix|x) = \|x\|^2$ を示せば良い. $n = 2k$ のとき

$$(T^{2k}x|x) = (T^k x|T^k x) = \|T^k x\|^2 \leq \|T^k\|^2\|x\|^2 \leq \|T\|^{2k}\|x\|^2 \leq \|x\|^2,$$

$n = 2k+1$ のとき

$$(T^{2k+1}x|x) = (T(T^k x)|(T^k x)) \leq ((T^k x)|(T^k x)) = \|T^k x\|^2 \leq \|x\|^2$$

となる. □

Lemma 4.19. $T \in B(H)$ に対して $\mathrm{Ker}T = R(T^*)^\perp$.

Proof.

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}T &\Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow (Tx|y) = 0\ \forall y \in H \\ &\Leftrightarrow (x|T^*y) = 0\ \forall y \in H \Leftrightarrow x \in R(T^*)^\perp. \end{aligned}$$

□

Theorem 4.20. $T \in B(H)$ がエルミート作用素であるとき,

$$\sigma(T) \subset \mathbb{R} \textit{ and } \sigma_r(T) = \phi.$$

Proof. $\mathrm{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$ のとき, $\|x\| = 1, Tx = \lambda x$ となる x を選ぶ.

$$\lambda = (\lambda x|x) = (Tx|x) = (x|Tx) = (x|\lambda x) = \bar{\lambda}$$

なので $\lambda \in \mathbb{R}$ である. したがって $\lambda \notin \mathbb{R}$ であれば $\mathrm{Ker}(\lambda I - T) = \{0\}$.
$\lambda = a + ib$ $(b \neq 0)$ のとき $\mathrm{Ker}(\bar{\lambda} I - T) = R(\lambda I - T)^\perp$ だから $R(\lambda I - T)$ は H で稠密になる. したがって $\lambda \notin \sigma_r(T)$.

$\lambda \in \mathbb{R}$, $R(\lambda I - T)$ が H で稠密でないとすると $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$ となり $\lambda \in \sigma_p(T)$ となる.

$\lambda = a + ib$ $(b \neq 0)$ のとき

$$\begin{aligned}
&\|((a+bi)I - T)x\|^2 = (((a+bi)I - T)x|((a+bi)I - T)x) \\
=&(a^2+b^2)\|x\|^2 - 2a(x|Tx) + \|Tx\|^2 \\
\geq&(a^2+b^2)\|x\|^2 - 2|a|\|x\|\|Tx\| + \|Tx\|^2 \\
=&(|a|\|x\| - \|Tx\|)^2 + b^2\|x\|^2 \geq b^2\|x\|^2
\end{aligned}$$

となり $(\lambda I - T)^{-1}$ が存在する. したがって $\lambda \in \rho(T)$ である. □

Proposition 4.21. $\{T_n\}$ を有界なエルミート作用素の増加列とする. このとき $\{T_n\}$ はエルミート作用素に強収束する.

Proof.

$$0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \cdots \leq I$$

として良い. 任意の $x \in H$ に対して

$$0 \leq (T_1 x|x) \leq (T_2 x|x) \leq \cdots \leq (Ix|x) = \|x\|^2$$

だから

$$\lim_{n\to\infty} (T_n x|x)$$

が存在する. このとき, $m < n$ に対して $T_{m,n} = T_n - T_m$ とおき

$$\lim_{m\to\infty} \|T_{m,n}x\| = 0 \quad \text{for any } x \in H$$

となることを示せば, $\{T_n\}$ が強収束することがわかり,

$$0 \leq \text{s-}\lim_{n\to\infty} T_n \leq I$$

となる.

$\{(T_n x|x)\}$ が収束することより $(T_{m,n}x|x) \to 0$ $(m, n \to \infty)$ である.

$$\begin{aligned}
\|T_{m,n}x\|^4 &= (T_{m,n}x|T_{m,n}x)^2 \leq (T_{m,n}x|x)(T_{m,n}^2 x|T_{m,n}x) \\
&\leq (T_{m,n}x|x)\|T_{m,n}\|\|T_{m,n}x\|^2 \leq \|T_{m,n}\|^3\|x\|^2(T_{m,n}x|x) \\
&\leq \|x\|^2(T_{m,n}x|x) \to 0 \ (m, n \to \infty)
\end{aligned}$$

より上が示せた. □

Theorem 4.22. $T \in B(H)$ を正値作用素とする．このとき $T = S^2$ となる正値作用素がただ一つ存在する．

さらに, T と可換な作用素は S とも可換である．

Proof. $T/\|T\|$ を考えることによって $0 \leq T \leq I$ と仮定してよい．次の関係式で定まる多項式列 $\{p_n(t)\}$ を考える

$$p_1(t) = 0,\ p_{n+1}(t) = \frac{1}{2}(t + p_n(t)^2) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

$p_n(t)$ は非負の係数をもつ多項式であることは明らかである．また関係式

$$\begin{aligned} p_{n+1}(t) - p_n(t) &= \frac{1}{2}(t + p_n(t)^2) - \frac{1}{2}(t + p_{n-1}(t)^2) \\ &= \frac{1}{2}(p_n(t) + p_{n-1}(t))(p_n(t) - p_{n-1}(t)) \end{aligned}$$

に帰納法を適用すれば, $p_{n+1}(t) - p_n(t)$ も係数が非負であることがわかる．

$0 \leq T \leq I$ より $0 \leq I - T \leq I$ であり, $T_n = p_n(I - T)$ とおく．このとき, $0 \leq T_n \leq T_{n+1}$ であることがわかる．また帰納法を用いて $T_n \leq I$ であることが, $0 \leq T_{n-1} \leq I$ を仮定した関係式

$$T_n = \frac{1}{2}(I - T + T_{n-1}^2) \leq \frac{1}{2}(I + I) = I$$

より導くことができる．したがって $\{T_n\}$ は有界なエルミート作用素の増加列なので強収束する極限 T_0 $(0 \leq T_0 \leq I)$ をもつ．

$S = I - T_0$ とおくと $0 \leq S \leq I$ であり, 関係式

$$T_{n+1}x = \frac{1}{2}(I - T + T_n^2)x$$

より $2T_0x = (I - T + T_0^2)x$ となり

$$Tx = (I - 2T_0 + T_0^2)x = S^2x$$

となる．

$R \in B(H)$ が T と可換であるとする．このとき $RT_n = T_nR$ となるので, $RS = SR$ となる．

最後に S の一意性を示す．$R \in B(H)$ が $R \geq 0$ かつ $R^2 = T$ とする．$S, R \geq 0$ だから $S', R' \geq 0$ で $S = S'^2$, $R = R'^2$ となるものを選ぶ．

$$RT = RR^2 = R^2R = TR$$

より $SR = RS$ となる．したがって, $(S+R)(S-R)=0$ である．このとき

$$\begin{aligned}&\|S'(S-R)x\|^2 + \|R'(S-R)x\|^2\\ =&((S-R)S(S-R)x|x) + ((S-R)R(S-R)x|x)\\ =&((S-R)(S+R)(S-R)x|x) = 0\end{aligned}$$

より $S'(S-R)x = 0$, $R'(S-R)x = 0$ となり

$$\|(S-R)x\|^2 = ((S-R)x|(S-R)x) = (S'(S-R)x|S'x) - (R'(S-R)x|R'x) = 0$$

より $S = R$ となる． □

$T \geq 0$ に対して $T = S^2$ となる $S \geq 0$ を T の平方根といい, $\sqrt{T}$ または $T^{1/2}$ と書き表す.

$T \in B(H)$ に対して T^*T は正値作用素になり, $\sqrt{T^*T}$ が考えられる．この正値作用素 $\sqrt{T^*T}$ を T の**絶対値**といい, $|T|$ と表す.

4.4 作用素の極分解

$V \in B(H)$ が**等距離作用素**であるとは,

$$\|Vx\| = \|x\| \quad \text{for all } x \in H$$

となることである．この条件は $V^*V = I$ で表すことができる.

$U \in B(H)$ が**ユニタリ作用素**であるとは, $U^*U = I = UU^*$ が成立することである．言いかえると, H から H の上への等距離作用素である．ユニタリ作用素は, 正規作用素である.

$V \in B(H)$ が**部分等距離作用素**であるとは, H の閉部分空間から H の閉部分空間への等距離作用素である．つまり $V^*V = P$, $VV^* = Q$ で P は V のサポート射影, Q は T の値域射影となる.

Theorem 4.23. *$T \in B(H)$ のサポート射影を $s(T)$, 値域射影を $r(T)$ とする．このとき, 次の条件を満たす正値作用素 S と部分等距離作用素 V が一意的に存在する*

$$T = VS, \quad V^*V = s(T) = s(S) = r(S), \quad VV^* = r(T).$$

Proof. 上のように分解できるとすると, $T^*T = S^2$ となるので $S = \sqrt{T^*T} = |T|$ となる.

$|T|H \ni |T| \ni |T|x \mapsto Tx$ について

$$\||T|x\|^2 = (|T|x||T|x) = (T^*Tx|x) = \|Tx\|^2$$

となるので閉部分空間 $\overline{R(|T|)}$ 上で上の写像は等距離写像になっている.

また $y \in R(|T|)^\perp$ のとき

$$(T^*Ty|x) = (|T|^2y|x) = (y||T|(|T|x)) = 0 \text{ for any } x \in X$$

だから $T^*Ty = 0$.

$$0 = (T^*Ty|y) = \|Ty\|^2$$

だから $Ty = 0$. したがって $(\mathrm{Ker}T)^\perp$ 上で $V(|T|x) = Tx$, $\mathrm{Ker}T$ 上で $Vx = 0$ と定義すれば良い. □

定理の証明で示したように上の分解は

$$T = V|T|, \quad s(T) = s(V),\ r(T) = r(V)$$

の形で与えられる. これを T の**極分解**という.

T^* を極分解すると,

$$T^* = V'|T^*|, \quad |T^*| = \sqrt{TT^*},\ s(T^*) = s(V'),\ r(T^*) = r(V')$$

となり $s(T^*) = r(T)$, $r(T^*) = s(T)$ の関係と $(T^*)^* = T$ に注意すれば, 次の命題が得られる.

Corollary 4.24. $T \in B(H)$ に対して, 次の条件を満たす正値作用素 S' と部分等距離作用素 V' が一意的に存在する

$$T = S'V', \quad V'^*V' = s(T),\ V'V'^* = r(T) = s(S') = r(S').$$

分解の一意性より

$$T = V|T| = V|T|V^*V = (V|T|V^*)V = |T^*|V$$

と $|T^*| = V|T|V^*$ であることがわかる.

Proposition 4.25. $T \in B(H)$ について, T が正規作用素であるための同値条件は, 任意の $x \in H$ に対して $\|Tx\| = \|T^*x\|$ が成立することである.

Proof.

$$\begin{aligned}
&T^*T = TT^* \\
\Leftrightarrow\ &(T^*Tx|y) = (TT^*x|y) \text{ for all } x, y \in H \\
\Leftrightarrow\ &(T^*Tx|x) = (TT^*x|x) \text{ for all } x \in H \\
\Leftrightarrow\ &\|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2 \text{ for all } x \in H.
\end{aligned}$$

□

Proposition 4.26. $T \in B(H)$ が正規作用素であるとき, ユニタリ作用素 U が存在して

$$T = U|T| = |T|U$$

とできる.

Proof. T が正規なので $|T| = \sqrt{T^*T} = \sqrt{TT^*} = |T^*|$ となり, 極分解すると

$$T = V|T| = |T|V, \quad s(T) = r(T) = s(V) = r(V)$$

となる. このとき $U = V + (I - s(T))$ とおくと

$$U^*U = I = UU^*$$

となる. □

5 有限次元の場合への応用と発展

5.1 線形代数

この章では $\dim H < \infty$ と仮定する.

Lemma 5.1. *K を H の部分空間とするとき, K は閉集合となる.*

Lemma 5.2. *H から H への線形作用素は, 連続 (有界) である.*

Lemma 5.3. *$T \in B(H)$ のとき*

$$\dim s(T)H = \dim r(T)H, \quad \dim(I - s(T))H = \dim(I - r(T))H.$$

Lemma 5.4. *$V \in B(H)$ を部分等距離作用素とするとき,*

$$V = Us(V) = r(V)U$$

となるユニタリ作用素 U が存在する.

Proposition 5.5. *$T \in B(H)$ に対して*

$$\sigma(T) = \sigma_p(T), \quad \sigma_c(T) = \sigma_r(T) = \phi.$$

Proof. H が有限次元のときは, $\mathrm{Ker}T = \{0\}$ は T が可逆を導くので, $\sigma_c(T) = \sigma_r(T) = \phi$ となる. □

Theorem 5.6. *$T \in B(H)$ について, T がエルミート作用素であることと有限個の実数 $\{\lambda_i\}$ と互いに直交する射影作用素 $\{P_i\}$ があり*

$$T = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k$$

となることが同値である.

Proof. $T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$ のとき,

$$T^* = \sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i P_i^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i = T.$$

となり, エルミートであることがわかる.

T がエルミート作用素とすると $\phi \neq \sigma(T) = \sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$ より $\lambda \in \mathbb{R}$ で $\{x \in H : Tx = \lambda x\} \neq \{0\}$ となる部分空間が存在する．この部分空間への射影作用素を P とすると

$$TP = PTP, \quad PT = (TP)^* = (PTP)^* = PTP$$

より $PT = TP$ である．

$$T = T(P + I - P) = \lambda P + T(I - P)$$

となり, $I - P \neq 0$ のときは $T(I-P) \in B((I-P)H)$ にこの議論を繰り返し適用すれば, H が有限次元なので有限回で操作が終了し

$$T = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k$$

となる． □

このエルミート作用素の表示を**スペクトル分解**という．$p(t)$ を多項式とすると,

$$p(T) = p(\lambda_1)P_1 + \cdots + p(\lambda_k)P_k$$

となる．

$\dim H = n$ として, H の完全正規直交基底 $x_1, \ldots, x_n$ を固定したとき $T \in B(H)$ は

$$Tx_j = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \cdots + a_{nj}x_n \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

と表せるので, $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ を

$$x \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

と対応させると

$$Tx \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

となり $T \in B(H)$ は行列 $A_T \in M_n(\mathbb{C})$ と見ることができる．このとき

$$a_{i,j} = (Tx_j | x_i)$$

となるので

$$A_{T^*} = \overline{{}^t A_T} = A_T^*$$

である.

この対応でエルミート作用素は, エルミート行列に対応する. $U \in B(H)$ をユニタリ作用素とするとき, $y_i = Ux_i$ とおくと正規直交基底 $\{x_1, \dots, x_n\}$ が正規直交基底 $\{y_1, \dots, y_n\}$ に写ることになる. U は基底変換の意味があり, 基底を変えると行列の表示も変わることになる. ユニタリ作用素 U に対応する行列は A_U はユニタリ行列 ($A_U^* = A_U^{-1}$) である. T を基底 $\{y_1, \dots, y_n\}$ を用いて行列表示すると

$$A_U A_T A_U^*$$

となる.

エルミート作用素のスペクトル分解定理は, 行列の言葉で言い直すと, エルミート行列 A は, ユニタリ行列 U で対角行列にできる

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_k & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix} U^*$$

に相当する.

$T \in B(H)$ に対して $|T| = \sqrt{T^*T}$ は正値作用素なので, 行列 $A_{|T|}$ の固有値は

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n \geq 0$$

となる. これを行列 A_T の特異値という.

作用素の極分解を行列に適用すると, 正値行列の対角化とあわせて次の分解を得る. 一般の行列 A に対して A の特異値 ($|T|$ の固有値) を $\mu_1, \dots, \mu_n$ とするとユニタリ行列 U, V で

$$A = U \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} V$$

と表すことができる. これを行列 A の**特異値分解**という.

5.2 掛け算作用素のスペクトル分解

この章では, 無限次元の作用素の典型例について述べる.

Hilbert 空間として $L^2(0,1)$ を考える. $f \in L^\infty(0,1)$ を

$$(T_f g)(x) = (fg)(x) = f(x)g(x), \quad g \in L^2(0,1), x \in [0,1]$$

と定義する.

Proposition 5.7. T_f は $L^2(0,1)$ 上の有界線形作用素になり

$$\|T_f\| = \|f\|_\infty$$

である.

Proof.

$$\begin{aligned}\|T_f g\|^2 &= \int_0^1 |(T_f g)(x)|^2 dx \leq \int_0^1 |f(x)|^2 |g(x)|^2 dx \\ &\leq \|f\|_\infty^2 \int_0^1 |g(x)|^2 dx = \|f\|_\infty^2 \|g\|_2^2\end{aligned}$$

より, $\|T_f\| \leq \|f\|_\infty$ であることがわかる.

任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$E = \{x \in [0,1] : |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \epsilon\}$$

とし

$$g = \begin{cases} 1/\sqrt{\int_E dx} & x \in E \\ 0 & x \in [0,1] \setminus E \end{cases}$$

とすると $\|g\|_2 = 1$ となる.

$$\begin{aligned}\|T_f g\|^2 &= \int_0^1 |f(x)|^2 |g(x)|^2 dx = \frac{1}{\int_E dx} \int_E |f(x)|^2 dx \\ &\geq \frac{1}{\int_E dx} (\|f\|_\infty - \epsilon)^2 \int_E dx = (\|f\|_\infty - \epsilon)^2\end{aligned}$$

だから, ϵ が任意より $\|T_f\| \geq \|f\|_\infty$ となり, $\|T_f\| = \|f\|_\infty$ である. $\square$

$f \in L^\infty(0,1)$ が実数値関数であるとき, $g, h \in L^2(0,1)$ に対して

$$(T_f g|h) = \int_0^1 (T_f g)(x)\overline{h(x)}dx = \int_0^1 f(x)g(x)\overline{h(x)}dx$$
$$= \int_0^1 g(x)\overline{f(x)h(x)}dx = (g|T_f h)$$

となるので T_f はエルミート作用素であることがわかる.

E を $[0,1]$ の可測集合として, E の特性関数 $\chi(E)$ を

$$\chi(E)(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

とおく. このとき $\chi(E)^2 = \chi(E)$ なので

$$T_{\chi(E)}^2 = T_{\chi(E)} = T_{\chi(E)}^*$$

を満たすことがわかる. したがって, $T_{\chi(E)}$ は射影作用素になる.

とくに $f(x) = x$ のとき, 次のエルミート作用素

$$(Tg)(x) = xg(x), \qquad g \in L^2(0,1),\ x \in [0,1]$$

を考える. $t \in \mathbb{R}$ に対して, 特性関数 $\chi((-\infty, t])$ を考え, $f = \chi((-\infty, t])$ として射影作用素 $P(t)$ を定義する. このとき,

$$(P(t)g)(x) = \begin{cases} 0 & x \le t \\ g(x) & x > t \end{cases},$$

であり, $P(t) = 0\ (t < 0)$, $P(t) = I\ (t > 1)$ をみたす.

Proposition 5.8. このとき

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} t dP(t)$$

と表わすことができる.

この命題の右辺の積分の意味は, 被積分関数が連続なので Riemann-Stieltjes 積分と考えて, 分割 $-\infty < x_0 < x_1 < \cdots < x_n < +\infty$ ($x_N > 1$ とする) をとり

$$x_0(P(x_0) - P(-\infty)) + x_1(P(x_1) - P(x_0)) + \cdots + x_N(P(x_N) - P(x_{N-1}))$$

の分割の幅を小さくするときの極限を考えれば良い. しかし, 射影作用素の和の収束は考えにくいので, 内積を用いてスカラー値の積分として

$$(Tg|g) = \int_{-\infty}^{\infty} td(P(t)g|g), \qquad g \in L^2(0,1)$$

を考える.

まず

$$(Tg|g) = \int_0^1 (Tg)(x)\overline{g(x)}dx = \int_0^1 xg(x)\overline{g(x)}dx = \int_0^1 x|g(x)|^2 dx$$

である. 次に $t \in [0,1]$ のとき

$$(P(t)g|g) = \int_0^1 \chi((\infty,t])(x)g(x)\overline{g(x)}dx = \int_0^t |g(x)|^2 dx,$$

$(P(t)g|g) = \|g\|_2^2$ $(t > 1)$, $(P(t)g|g) = 0$ $(t < 0)$ となるので

$$\frac{d}{dt}(P(t)g|g) = \begin{cases} |g(t)|^2 & t \in [0,1] \\ 0 & t \notin [0,1] \end{cases}.$$

したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty} td(P(t)g|g) = \int_0^1 t|g(t)|^2 dt = (Tg|g)$$

である.

有限次元のとき, エルミート作用素のスペクトル分解について述べた. つまり, エルミート作用素 T に対して, 直交射影 $P_1, P_2, \ldots, P_k$ と実数 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k$ が存在して

$$T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_k P_k$$
$$P_1 + P_2 + \cdots + P_k = I, \quad \|T\| = \max\{-\lambda_1, \lambda_k\}$$

とできる. これを積分と関連つけて以下に述べる.

T が上のように分解されるとき

$$P(t) = \begin{cases} 0 & t < \lambda_1 \\ P_1 & \lambda_1 \leq t < \lambda_2 \\ P_1 + P_2 & \lambda_2 \leq t < \lambda_3 \\ \cdots & \cdots \\ P_1 + P_2 + \cdots + P_{k-1} & \lambda_{k-1} \leq t < \lambda_k \\ I & \lambda_k \leq t \end{cases}$$

とおくと

(1) $s < t \Rightarrow P(s) \leq P(t)$ (i.e., $P(s)H \subset P(t)H$).

(2) $\lim\limits_{t \to s+0} P(t) = P(s)$.

(3) $\lim\limits_{t \to -\infty} P(t) = 0$, $\lim_{t \to \infty} P(t) = I$.

をみたす. このとき

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} t dP(t)$$

と表せる.

実際, 分割 $\Delta : x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N$ $(x_1 < \lambda_1, \lambda_k < x_N)$ に対して

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{N} x_i (P(x_i) - P(x_{i-1}))$$

を考えると

$$\lambda_{j-1} < x_{i-1} < x_i < \lambda_j \Rightarrow x_i(P(x_i) - P(x_{i-1})) = 0$$
$$x_{i-1} < \lambda_j \leq x_i \Rightarrow x_i(P(x_i) - P(x_{i-1})) \to \lambda_j P_j$$

なので

$$\int_{-\infty}^{\infty} t dP(t) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$$

となる.

$i \neq j$ のとき $P_i P_j = 0$ となるから, 多項式 $q(x)$ に対して, $T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$ だから,

$$q(T) = \sum_{i=1}^{k} q(\lambda_i) P_i$$

となる. 積分形で書くと

$$q(T)=\int_{-\infty}^{\infty}q(t)dP(t)$$

である.

計算例　$H=\ell^2(3)$ とする. $T:H\ni\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in H$, ただし

$$T=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\-2&2&1\end{pmatrix}.$$

$\det(xI-T)=(x-3)^2(x+3)$ となるので T の固有値は $3,-3$ となる. T はエルミート行列なので, 固有値 3 の固有空間への直交射影を P_3, 固有値 -3 の固有空間への直交射影を P_{-3} を用いて

$$T=3P_3+(-3)P_{-3}$$

と表わすことができる. 直交射影 P_3,P_{-3} は次のように求めることができる.

多項式

$$q(x)=-\frac{1}{6}(x-3)$$

は, $q(3)=0,q(-3)=1$ をみたすので

$$q(T)=q(3)P_3+q(-3)P_{-3}=P_{-3}$$

となる ($q(3)=0,q(-3)=1$ を満たす一番簡単な式=一次式を $q(x)$ とした). したがって

$$P_{-3}=q(T)=-\frac{1}{6}(T-3I)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix},$$

$P_3+P_{-3}=I$ より

$$P_3=I-P_{-3}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}$$

となる.

ここで P_{-3} の計算において, 少し工夫した計算を行った. 通常の計算方法としては, 固有値 -3 の固有ベクトル, 例えば

$$T\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

を求め, 固有ベクトルの長さを 1 にして直交射影

$$P_{-3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

を求める.

5.3 エルミート作用素のスペクトル分解

H を Hilbert 空間とする. T を H 上の有界線形作用素とする.

Theorem 5.9. T がエルミートであるとき,

$$(Tx|x) = \int_{-\infty}^{\infty} td(P(t)x|x), \quad x \in H$$

と表わすことができる. ただし, $P(t)$ は以下の条件を満たす射影作用素である.

(1) $s < t \Rightarrow P(s) \leq P(t)$ *(i.e.,* $P(s)H \subset P(t)H$*).*

(2) $\lim\limits_{t\to s+0} P(t)x = P(s)x.$

(3) $\lim\limits_{t\to -\infty} P(t)x = 0, \lim_{t\to\infty} P(t)x = x.$

この証明については, 今後の課題として残ることになる. T に対して $P(t)$ の構成の方法について述べておく.

$T = T^*$ のとき

$$T = T^+ - T^-$$

と分解ができる. ここで

$$T^+ = \frac{T + |T|}{2}, \quad T^- = \frac{|T| - T}{2}$$

上の定理の射影作用素 $P(t)$ は $\mathrm{Ker}(T-tI)^+$ への直交射影として定義される.

以下は注意として述べておく.

Theorem 5.10. $U \in B(H)$ がユニタリ作用素であるとき *(i.e.,* $UU^* = U^*U = I$*),*

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} dP(\theta)$$

と表せる*.*

スペクトル分解を用いて, 作用素の多項式, 作用素の連続関数計算が考えられるが, 本質的に有界な関数による関数計算も考えることができる. $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ に対して

$$(Tx|x) = \int_{-\infty}^{\infty} td(P(t)x|x)$$

のとき

$$(f(T)x|x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)d(P(t)x|x)$$

が成立する.

関数解析学入門演習問題

1. $(X.\|\cdot\|)$ がノルム空間であるとき

$$d(x,y)=\|x-y\|$$

は X 上の距離になることを示せ.

2. $(X,(\cdot|\cdot))$ が内積空間であるとき,

$$\|x\|=\sqrt{(x|x)}$$

は X 上のノルムであることを示せ.

3. $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ が連続で $f(s+t)=f(s)+f(t)$ を満たすならば, $f(t)=tf(1)$ であることを示せ.

4. X を実線形空間とし, $(X,\|\cdot\|)$ をノルム空間とする.

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

を満たすとき

$$(x|y)=\frac{1}{4}\{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\}$$

と定義する.

(1) $(x|z)+(y|z)=2(\frac{x+y}{2}|z)=(x+y|z)$ を示せ.

(2) 実数 α,β に対して

$$|\|\alpha x+y\|-\|\beta x+y\||\leq|\alpha-\beta|\|x\|$$

を示せ.

(3) $x,y\in X$ に対して $f(\alpha)=(\alpha x|y)$ とおくと $f(\alpha)=\alpha(x|y)$ となることを示せ.

(4) $(x|y)$ は X 上の実数値内積になることを示せ.

5. $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して
$$\lim_{p \to \infty} \|\mathbf{x}\|_p = \|\mathbf{x}\|_\infty$$
であることを証明せよ

6. $f \in C[0,1]$ に対して
$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$$
は $C[0,1]$ 上のノルムであることを示せ.

7. ℓ^∞ が完備であることを示せ.

8. ℓ^2 が完備であることを示せ.

9. $L^2(0,1)$ が内積空間であることを示せ.

10. $L^1(0,1)$ が Banach 空間であることを示せ.

11. $\{e^{2\pi ix} : n \in \mathbb{Z}\}$ の一次結合の全体は $L^2(0,1)$ で稠密であることを示せ.

12.$T \in B(X,Y)$ に対して
$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1, x \in X\} \\ &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1, x \in X\} \\ &= \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\}\}\end{aligned}$$
を示せ.

13. $B(X,Y)$ は作用素ノルムでノルム空間であることを示せ.

14. ノルム空間 X, Y に対して, 線形作用素 $T : X \longrightarrow Y$ のグラフ
$$G(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\}$$
は $\|(x,Tx)\| = \|x\| + \|Tx\|$ によってノルム空間であることを示せ.

15. $f \in C^1[0,1]$ に対して $Tf = f'$ と定義するとき **6.** のノルム空間上の閉作用素であるが, 連続でないことを示せ.

16. 線形作用素 $T : X \longrightarrow Y$ が開写像であることと, 原点の近傍 U に対して TU も原点の近傍になることが同値であることを証明せよ.

17. $S, T \in B(H)$ について, $0 \leq S \leq T$ ならば $\|S\| \leq \|T\|$ であることを示せ.

18. $g \in L^2(0,1)$ に対して

$$(Tg)(x) = xg(x)$$

と定義する. このとき $\sigma(T) = \sigma_c(T)$ を示せ.

19. (1) ヒルベルト空間 H の点列 $\{x_n\}$ が x_0 に強収束するならば, x_0 に弱収束することを示せ.

(2) $H = \ell^2 = \{(x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$ とし, 第 i 成分が 1, その他の成分が 0 のベクトルを $e_n (\in H)$ と表す. このとき, $\{e_n\}$ は強収束列ではないこと, および 0 に弱収束することを示せ.

(3) ヒルベルト空間 H の点列 $\{x_n\}$ が x_0 に弱収束し, かつ

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n\| = \|x_0\|$$

であるとき, $\{x_n\}$ は強収束することを示せ.

20. $S : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ を

$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

と定義する.

(1) S は有界線形作用素で, $\|S\| = 1$ であることを示せ.
(2) S の共役作用素 S^* を求めよ.
(3) S は固有値を持たないことを示せ.
(4) S^* の固有値を求めよ.

21. S を **20.** で定義した作用素とする.
(1) $\{S^n\}$ は強収束しないこと, および作用素 0 に弱収束することを示せ.

(2) $\{(S^*)^n\}$ は作用素 0 に強収束することを示せ.

22. 線形作用素 $T : \ell^2(n) \longrightarrow \ell^2(n)$ について

(1) $e_1, e_2, \ldots, e_n$ を $\ell^2(n)$ の完全正規直交系とする. このとき

$$\|Tx\| \leq (\sum_{i=1}^{n} \|Te_i\|^2)^{1/2} \|x\|$$

が成立することを示せ.

(2) T は固有値を持つことを示せ.

23. $T_n, T \in B(H)$ とする.

(1) $\{T_n\}$ が弱収束するとき, $\{T_n^*\}$ も弱収束することを示せ.

(2) $\{T_n\}$ が強収束するとき, $\{T_n^*\}$ も強収束するか.

24. ヒルベルト空間 $\ell(3)(= \mathbb{C}^3)$ 上の有界線形汎関数 ϕ が

$$\phi((1,0,0)) = 2,\ \phi((1,1,0) = 1 + i,\ \phi(1,1,1) = 1 - 2i$$

を満たすものとする.

(1) $\phi(x) = (x|y_\phi)$ $(x \in \ell(3))$ となる $y_\phi \in \ell(3)$ を求めよ.

(2) $\|\phi\|$ を求めよ.

25. $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ を

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \ldots, \frac{1}{n}x_n, \ldots)$$

と定義する. このとき , T の点スペクトル, 剰余スペクトル, 連続スペクトル, リゾルベントを求めよ.

26. $S, T, R \in B(H)$ とし, $\lambda \neq 0$ に対し

$$(\lambda I - ST)R = I = R(\lambda I - ST)$$

が成立するとする.

(1) このとき

$$(\lambda I - TS)\frac{1}{\lambda}(I + TRS) = I = \frac{1}{\lambda}(I + TRS)(\lambda I - TS)$$

を示せ.

(2) $\sigma(ST) \cup \{0\} = \sigma(TS) \cup \{0\}$ を示せ.

27. $S, T \in B(H)$ がともに正値作用素であるとき

$$ST \geq 0 \Leftrightarrow ST = TS$$

であることを示せ.

28. 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について

(1) $A \geq 0$ であるための同値条件は

$$a, d \geq 0, c = \bar{b}, ad - bc \geq 0$$

であることを示せ.

(2) 行列 A_1, A_2 が $A_1 \geq 0$, $A_2 \geq 0$ を満たし, $A_1A_2 \geq 0$ が成立しない例を挙げよ.

29. エルミート行列 $A = \begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 \\ -3/2 & 5/2 \end{pmatrix}$ について

(1) A の固有値 a, b を求めよ.

(2) $f(t) = \frac{1}{3}t + \frac{2}{3}$ とおくと $f(a) = \sqrt{a}$, $f(b) = \sqrt{b}$ となることを確かめよ

(3) $B = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I$ とおくとき, $A = B^2$ を確かめよ.

30. エルミート行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 \end{pmatrix}$ について

(1) A の固有値 a, b を求めよ.

(2) 多項式 $p(t), q(t)$ で

$$p(a) = 1, p(b) = 0, q(a) = 0, q(b) = 1$$

となるものを求めよ.

(3) $P = p(A)$, $Q = q(A)$ とおくと, P, Q は射影作用素で

$$A = aP + bQ$$

となることを確かめよ.

31. $T \in B(H)$ で $T \geq 0$ とする. このとき 任意の $x, y \in H$ に対して

$$|(Tx|y)|^2 \leq (Tx|x)(Ty|y)$$

が成立することを示せ.

32. X をノルム空間とする. このとき X の有限次元部分空間 Y は閉集合であるあることを示せ.