コンパクト環上の非線形トレースとマジョリゼーション

渚　勝

立命館大学客員教授 千葉大学名誉教授

March 17, 2023

この講演のもとになる論文

M. Nagisa and Y. Watatani, *Non-linear monotone positive maps*, J. Operator Theory, 87(2022), no.1, 203–228.

M. Nagisa and Y. Watatani, *Non-linear traces on matrix algebras, majorization, unitarily invariant norms and 2-positivitiy*, Anal. Math. 48(2022), no. 4, 1105–1126.

M. Nagisa and Y. Watatani, *Non-linear traces on the algebra of compact operators and majorization*, to appear in Indagationes Mathematicae.

A, B;　C^*-環

$\varphi : A \to B$ 非線形写像

$\varphi : A^+ \to B^+$ 正値写像, 単調性 $(a \leq b \Rightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b))$

- 正値作用素の Functional Calculus
- 非線形完全正値写像
- 非線形積分 (Choquet 積分, 菅野積分) を用いた非線形トレース

[参考] 河邊 淳, 非加法的測度と非線形積分, 数学 68 巻 3 号, 2016 年 7 月.

離散 Choquet 積分

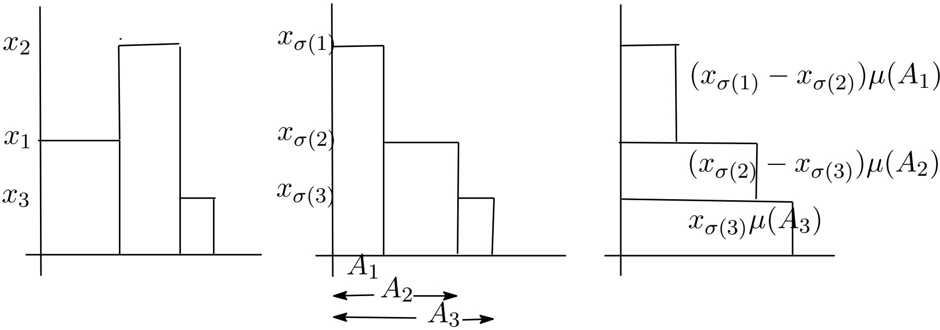
集合 Ω
$\cup$, $\setminus$ で閉じた環 $\mathcal{B}(\subset 2^{\Omega})$
単調測度 $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$
(1) $\mu(\phi) = 0$ (2) $A, B \in \mathcal{B}$, $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

有限集合 $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathcal{B} = 2^{\Omega}$, μ を Ω 上の有限単調測度とする.
関数 $f : \Omega \to [0, \infty)$ を $f = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0, \infty)^n$ とみなして
$(x_i = f(i))$

$$(C) \int f d\mu = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i+1)}) \mu(A_i) + x_{\sigma(n)} \mu(A_n)$$

と定義する. ただし, $\sigma \in S_n$, $x_{\sigma(1)} \geq x_{\sigma(2)} \geq \cdots \geq x_{\sigma(n)}$,
$A_i = \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i)\}$.

離散 Choquet 積分図



離散 Choquet 積分を用いた非線形正値汎関数

$\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, $C(\Omega) \cong \mathbb{C}^n$ に対して非線形正値写像
$(C-\varphi)_\mu : (\mathbb{C}^n)^+ \to \mathbb{C}^+$ を次で定義する

$$(C-\varphi)_\mu(f) = (C)\int f d\mu.$$

- **monotone** $0 \le f \le g \Rightarrow (C)\int f d\mu \le (C)\int g d\mu.$
- **positively homogeneous**

$$(C)\int kf d\mu = k\ (C)\int f d\mu \text{ for any scalar } k \ge 0.$$

- **comonotonic additivity** 任意の comonotonic pair $f, g \in C(\Omega)^+$ に対して

$$(C)\int (f+g) d\mu = (C)\int f d\mu + (C)\int g d\mu.$$

ここで f, g が comonotonic pair であるとは

$$(f(s) - f(t))(g(s) - g(t)) \ge 0 \text{ for any } s, t \in \Omega.$$

コンパクト環上の非線形正値汎関数

H を可分な Hilbert 空間とする.
$B(H)$: H 上の有界線形作用素の全体,
$B(H)^+$: $B(H)$ の正値作用素全体
$K(H)$: H 上のコンパクト作用素の全体,
$K(H)^+$: $K(H)$ の正値作用素全体
$F(H)$: H 上の有限階作用素の全体,
$F(H)^+$: $F(H)$ の正値作用素全体
$C(X)$: 位相空間 X 上の複素数値連続関数の全体,
$C(X)^+$: $C(X)$ の非負連続関数の全体

$\varphi : K(H)^+ \to [0, \infty)$; $K(H)^+$ 上の非線形正値汎関数とする.
任意の $a \in K(H)^+$, ユニタリ $u \in B(H)$ に対して

$$\varphi(uau^*) = \varphi(a)$$

が成立するとき, 非線形正値汎関数 φ を **trace** と定義する.

コンパクト環上の非線形正値汎関数の性質

- **monotone** $a, b \in K(H)^+$ $a \leq b \Rightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b)$.
- **positively homogeneous** 任意のスカラー $k \geq 0$ に対して

$$\varphi(ka) = k\varphi(a) \quad a \in K(H)^+.$$

- **comonotonic additive on the spectrum**

$$\varphi(f(a) + g(a)) = \varphi(f(a)) + \varphi(g(a))$$

  for any $a \in K(H)^+$, any comonotonic functions $f, g \in C(\sigma(a))^+$ with $f(0) = g(0) = 0$.

- **monotonic increasing additive on the spectrum**

$$\varphi(f(a) + g(a)) = \varphi(f(a)) + \varphi(g(a))$$

  for any $a \in K(H)^+$, any monotonic increasing functions $f, g \in C(\sigma(a))^+$ with $f(0) = g(0) = 0$.

置換不変単調測度

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots.\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
$\mathcal{R}(\mathbb{N})$ は $\mathbb{N}$ の有限部分集合の全体とする.

単調増加関数 $\alpha : \mathbb{N}_0 \to [0, \infty)$ が $\alpha(0) = 0$ を満たすとき

$$\mu_\alpha(A) = \alpha(\sharp A), \quad A \in \mathcal{R}(\mathbb{N})$$

と $\mu_\alpha : \mathcal{R}(\mathbb{N}) \to [0, \infty)$ を定義する.

- μ_α は**置換不変**単調測度になる.

$$\mu(A) = \mu(\sigma(A)), \quad A \in \mathcal{R}(\mathbb{N}), \sigma \in \mathsf{Bijec}(\mathbb{N}).$$

- 任意の置換不変単調測度 $\mu : \mathcal{R}(\mathbb{N}) \to [0, \infty)$、この形で与えられる.

$K(H)^+$ 上の trace の構成

$\alpha : \mathbb{N}_0 \to [0,\infty)$ を $\alpha(0)=0$ を満たす単調増加関数とし,
$\mu_\alpha : \mathcal{R}(\mathbb{N}) \to [0,\infty)$ を単調不変測度とする.

$a \in K(H)^+$ に対して

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(a) p_n$$

p_n は a の 1 次元スペクトル射影, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n \le I$ を満たす
$\lambda(a) := (\lambda_1(a), \lambda_2(a), \ldots, \lambda_n(a), \ldots)$ は a の固有値のリストで

$$\lambda_1(a) \ge \lambda_2(a) \ge \cdots \ge \lambda_n(a) \ge \cdots, \lim_{n\to\infty} \lambda_n(a) = 0$$

という分解を持つ.

$a \notin F(H)$ のとき $\lambda_n(a) > 0$, $\sigma(a) = \cup_{n=1}^{\infty}\{\lambda_n(a)\} \cup \{0\}$.

$a \in K(H)^+$

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(a) p_n$$

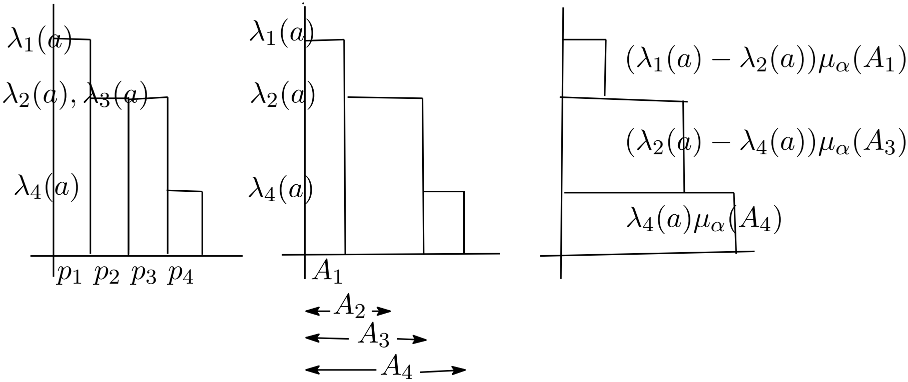
に対して

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(a) &= \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i(a) - \lambda_{i+1}(a)) \mu_\alpha(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i(a) - \lambda_{i+1}(a)) \alpha(\sharp A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i(a) - \lambda_{i+1}(a)) \alpha(i) \end{aligned}$$

と定義する．ここで $A_i = \{1, 2, \ldots, i\}$.

φ_α を **the non-linear trace of Choquet type associated with** α という．

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_1(a)-\lambda_2(a))\mu_\alpha(A_1)+(\lambda_2(a)-\lambda_3(a))\mu_\alpha(A_2)\\
&\qquad +(\lambda_3(a)-\lambda_4(a))\mu_\alpha(A_3)+\lambda_4(a)\mu_\alpha(A_4)\\
&=(\lambda_1(a)-\lambda_2(a))\mu_\alpha(A_1)+(\lambda_2(a)-\lambda_4(a))\mu_\alpha(A_3)+\lambda_4(a)\mu_\alpha(A_4)
\end{aligned}
$$



Choquet 型の非線形トレースの性質

φ_α: lower semi-continuous on $K(H)^+$

- $\varphi_\alpha(a) < \infty$ のとき

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0; \; \|x - a\| < \delta \Rightarrow \varphi_\alpha(a) - \epsilon < \varphi_\alpha(x)$$

- $\varphi_\alpha(a) = \infty$ のとき

$$\forall M > 0 \; \exists \delta > 0; \; \|x - a\| < \delta \Rightarrow M < \varphi_\alpha(x)$$

$S_n(a) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i(a) - \lambda_{i+1}(a))\alpha(i)$: continuous for the usual operator norm (by Mini-Max Theorem).

$$\varphi_\alpha(a) = \sup\{S_n(a) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Choquet 型の非線形トレースの例

単調増加列 α	Choquet 型の非線形トレース $\varphi_\alpha(a)$
$(0,1,2,3,\dots)$	$\sum_{i=1}^\infty \lambda_i(a) = \mathrm{Tr}(a)$ (the usual trace)
$(0,1,1,1,\dots)$	$\lambda_1(a) = \|a\|$ (the usual operator norm)
$(\overbrace{0,\dots,0}^{i},1,1,\dots)$	$\lambda_i(a)$ (the i-th eigenvalue of a)
$(0,1,2,\dots,k,k,\dots)$	$\sum_{i=1}^k \lambda_i(a)$ (Ky Fan's k-norm)
$(0,1,1+2^{\frac{1}{p}-1}, 1+2^{\frac{1}{p}-1}+3^{\frac{1}{p}-1},\dots)$	$\sum_{i=1}^\infty i^{\frac{1}{p}-1}\lambda_i(a)$ (Lorentz $(p,1)$-norm, $p\geq 1$)

$a\in K(H)^+$, $a=\sum_{n=1}^\infty \lambda_n(a)p_n$ に対して

$$\varphi_\alpha(a) = \sum_{i=1}^\infty (\lambda_i(a)-\lambda_{i+1}(a))\alpha(i) = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i(a)c_i,$$

ここで $c_1=\alpha(1),\ c_n=\alpha(n)-\alpha(n-1)\geq 0,\ \alpha(n)=\sum_{i=1}^n c_i$.

Choquet 型の非線形トレースの特徴付け

Theorem 1

$\varphi : K(H)^+ \to [0, \infty]$ を非線形正値汎関数とする．このとき，次は同値である．

(1) $\alpha(0) = 0$ を満たす単調増加列が存在して $\varphi = \varphi_\alpha$ となる．

(2) φ は *comonotonic additive on the spectrum, unitarily invariant, monotone, positively homogeneous, lower semi-continuous on* $K(H)^+$ *in the norm* である．
特に $a \in F(H)^+$ に対して $\varphi(a) < \infty$ である．

(3) φ は *monotonic increasing additive on the spectrum, unitarily invariant, monotone, positively homogeneous, lower semi-continuous on* $K(H)^+$ *in the norm* である．
特に $a \in F(H)^+$ に対して $\varphi(a) < \infty$ である．

非線形トレースと劣加法性

$\varphi = \varphi_\alpha$, $0 = \alpha(0) \le \alpha(1) \le \alpha(2) \le \cdots$ とし, $a \in K(H)$ に対して

$$|||a|||_\alpha = \varphi_\alpha(|a|) \in [0, \infty]$$

と定義する. ユニタリ $u \in B(H)$ に対して $|||ua|||_\alpha = |||a|||_\alpha = |||au|||_\alpha$ が成立する.

例 $\alpha = (0, 1, 2, \ldots .k, k, k, \ldots)$ のとき

$$\begin{aligned} |||a|||_\alpha &= \varphi_\alpha(|a|) \qquad \text{Ky Fan's k-norm } ||a||_{(k)} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(|a|) \quad |a| \text{ の固有値の和} \\ &= \sum_{i=1}^{k} s_i(a) \qquad a \text{ の特異値の和} \end{aligned}$$

$\alpha = (0, 2, 4, 5, 5, \ldots)(= (0, 1, 2, 2, \ldots) + (0, 1, 2, 3, 3, \ldots))$ のとき

$$|||a|||_\alpha = \phi_\alpha(|a|) = \|a\|_{(2)} + \|a\|_{(3)}.$$

Proposition 1

$\varphi = \varphi_\alpha$, $0 = \alpha(0) \le \alpha(1) \le \alpha(2) \le \cdots$ とする．このとき以下は同値

(1) α は次の意味で *concave* : $\dfrac{\alpha(i+1)+\alpha(i-1)}{2} \le \alpha(i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$

(2) $c_i(= \alpha(i) - \alpha(i-1))$ は単調減少．$(c_1 \ge c_2 \ge \ldots \ge 0)$

(3) $|||a+b|||_\alpha \le |||a|||_\alpha + |||b|||_\alpha$ *for any* $a, b \in K(H)$.

(1) $\Leftrightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3) は明らか.
(3) $\Rightarrow$ (2) $I = \sum_{i=1}^{\infty} p_i$ 1 次元射影の和とする.
$a = (p_1 + p_2 + p_4 + \cdots + p_{i-1}) + p_i$, $b = (p_1 + p_2 + \cdots + p_{i-1}) + p_{i+1}$ とすると

$$|||a+b|||_\alpha = \varphi_\alpha(a+b) = \alpha(i+1) + \alpha(i-1),$$
$$|||a|||_\alpha = \varphi_\alpha(a) = \varphi_\alpha(b) = \alpha(i)$$

より従う.

非線形トレースのトレースクラス作用素

$\varphi = \varphi_\alpha$, $0 = \alpha(0) < \alpha(1) \le \alpha(2) \le \alpha(3) \le \cdots$, α が concave のとき, $|||\cdot|||_\alpha$ は

$$\mathcal{C}_1^\alpha(H) = \{a \in K(H) |\ |||a|||_\alpha = \varphi_\alpha(|a|) < \infty\}$$

上のノルムになる.
$\mathcal{C}_1^\alpha(H)$ の元を Choquet 型の非線形トレース φ_α に関するトレースクラス作用素と呼ぶ.

Theorem 2

$(\mathcal{C}_1^\alpha(H), |||\cdot|||_\alpha)$ は *Banach* 空間であり, $B(H)$ の $*$*-ideal* になる.

$a \in \mathcal{C}_1^\alpha(H)$ に対して, $a = \mathrm{Re}a + i\mathrm{Im}a = a_1 - a_2 + i(a_3 - a_4)$,
$a_1, a_2, a_3, a_4 \ge 0$, $a_1 a_2 = 0 = a_3 a_4$ と分解して, 非線形汎関数（トレース)

$$\varphi_\alpha(a) = \varphi_\alpha(a_1) - \varphi_\alpha(a_2) + i(\varphi_\alpha(a_3) - \varphi_\alpha(a_4))$$

を定義することができる.

非線形トレースに関する Schatten-von Neumann class

$\varphi = \varphi_\alpha$, $0 = \alpha(0) \le \alpha(1) \le \alpha(2) \le \cdots$,
$a \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$ に対し

$$\varphi_\alpha(a) = \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i(a) - \lambda_{i+1}(a))\alpha(i) + \lambda_n(a)\alpha(n) = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i(a).$$

このとき $p \ge 1$ に対し, $|||\cdot|||_{\alpha,p}$ を次のように定義する

$$|||a|||_{\alpha,p} = \varphi_\alpha(|a|^p)^{1/p}.$$

Proposition 2

$\varphi = \varphi_\alpha$, $0 = \alpha(0) < \alpha(1) \le \alpha(2) \le \cdots$, $p \ge 1$ とするとき以下は同値

(1) α は次の意味で *concave* : $\dfrac{\alpha(i+1) + \alpha(i-1)}{2} \le \alpha(i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$

(2) $c_i (= \alpha(i) - \alpha(i-1))$ は単調減少. $(c_1 \ge c_2 \ge \ldots \ge 0)$

(3) $|||a + b|||_{\alpha,p} \le |||a|||_{\alpha,p} + |||b|||_{\alpha,p}$ *for any* $a, b \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

このとき $|||\cdot|||_{\alpha,p}$ は $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 上のユニタリ不変ノルムになる.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) は明らか.
(2) $\Rightarrow$ (3)

$$|||a|||_\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i\lambda_i(|a|) = \sum_{k=1}^{n-1}(c_k - c_{k+1})\|a\|_{(k)} + c_n\|a\|_{(n)}$$

と次の補題より

$$|||a|||_{\alpha,p} = (\sum_{i=1}^{n} c_i\lambda_i(|a|)^p)^{1/p}$$

が三角不等式を満たすことがわかる.

Lemma 3

V を線形空間, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ を V 上のノルムとする. β は $\mathbb{R}^n$ 上のノルムで $0 \le x \le y$ $(x, y \in \mathbb{R}^n) \Rightarrow \beta(x) \le \beta(y)$ を満たすものとする. このとき, $v \in V$ に対して $\gamma(v) = \beta((\nu_1(v), \nu_2(v), \ldots, \nu_n(v))$ は V 上のノルムになる.

$(3) \Rightarrow (1)$ 小さな正数 s, t に対して

$$a(s,t) = 2(p_1 + \cdots + p_i) + (1+s)p_{i+1} + (1-t)p_{i+2},$$
$$c = 2(p_1 + \cdots + p_i) + p_{i+1} + p_{i+2}$$

とおく.

$$|||a(s,s)|||_{\alpha,p}^p \geq |||c|||_{\alpha,p}^p$$

が示せれば, $s \to 0+$ として, (1) の関係式が得られる.

$\alpha(i+2) > \alpha(i+1)$ と仮定してよい.

$$\exists s_0 \in (0,1);\ \alpha(i+2) - \alpha(i) > (1+s_0)^p(\alpha(i+1) - \alpha(i)).$$

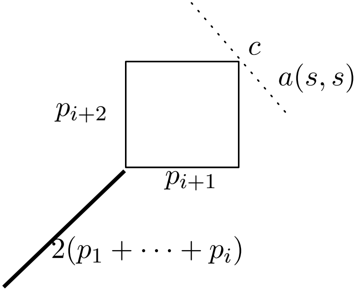
$|||a(s,t)|||^p = (2^p - (1+s)^p)\alpha(i) + ((1+s)^p - (1-t)^p)\alpha(i+1) + (1-t)^p\alpha(i+2)$
より $s \in [0, s_0]$ に対して $|||a(s,0)||| \geq |||c||| \geq |||a(s,1)|||$ となり,

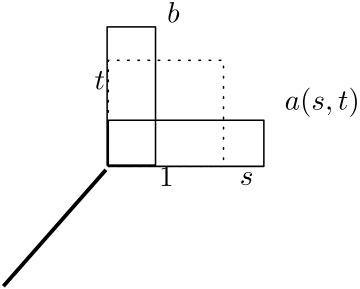
$$\exists t(s) \in [0,1];\ |||a(s,t(s))||| = |||c|||.$$

$b = 2(p_1 + \cdots + p_i) + (1 - t(s))p_{i+1} + (1 + s)p_{i+2}$ とおくと
$|||b||| = |||a(s, t(s))||| = |||c|||$

$$|||2(p_1 + \cdots + p_i) + (1 + \frac{s - t(s)}{2})(p_{i+1} + p_{i+2})||| = |||\frac{a(s, t(s)) + b}{2}||| \leq |||c|||$$

となり ,$s \leq t(s)$.
したがって $|||a(s, s)||| \geq |||a(s, t(s))||| = |||c|||$.





$p \geq 1$, $\varphi = \varphi_\alpha$, $0 = \alpha(0) < \alpha(1) \leq \alpha(2) \leq \alpha(3) \leq \cdots$, α が concave のとき, $|||\cdot|||_\alpha$ を

$$|||a|||_{\alpha,p} = \varphi_\alpha(|a|^p)^{1/p} \in [0,\infty] \quad a \in K(H)$$

で定義する.

Theorem 4

$\varphi = \varphi_\alpha$, $0 = \alpha(0) < \alpha(1) \leq \alpha(2) \leq \cdots$, $p \geq 1$ とするとき以下は同値

(1) α は次の意味で *concave* : $\dfrac{\alpha(i+1)+\alpha(i-1)}{2} \leq \alpha(i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$

(2) $c_i (= \alpha(i) - \alpha(i-1))$ は単調減少. $(c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq 0)$

(3) $|||a+b|||_{\alpha,p} \leq |||a|||_{\alpha,p} + |||b|||_{\alpha,p}$ *for any* $a, b \in K(H)$.

$$\mathcal{C}_p^\alpha(H) = \{a \in K(H) |\ |||a|||_{\alpha,p} = \varphi_\alpha(|a|^p)^{1/p} < \infty\}$$

$\mathcal{C}_p^\alpha(H)$ の元を Choquet 型の非線形トレース φ_α に関する Shatten-von Neumann p-class 作用素と呼ぶ.

例 $\alpha = (0, 1, 2, \ldots .k, k, k, \ldots)$ のとき

$$|||a|||_{\alpha,p} = \varphi_\alpha(|a|^p)^{1/p} \qquad \text{Ky Fan's p-k norm } ||a||_{p,(k)}$$
$$= (\sum_{i=1}^{k} s_i(a)^p)^{1/p} \qquad a \text{ の特異値の和}$$

Theorem 5

$p \geq 1$, $(\mathcal{C}_p^\alpha(H), ||| \cdot |||_{\alpha,p})$ は *Banach* 空間であり, $B(H)$ の $*$-*ideal* になる.

Proposition 3

$0 = \alpha(0) < \alpha(1) \leq \alpha(2) \leq \cdots$, $0 = \beta(0) < \beta(1) \leq \beta(2) \leq \cdots$, $p, q \geq 1$ とする.

(1) $1 \leq p \leq q \Rightarrow \mathcal{C}_p^\alpha(H) \subset \mathcal{C}_q^\alpha(H)$.

(2) $\alpha(n) - \alpha(n-1) \leq \beta(n) - \beta(n-1)$ *for all* $n \Rightarrow \mathcal{C}_p^\beta(H) \subset \mathcal{C}_p^\alpha(H)$.

離散菅野積分

有限集合 $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathcal{B} = 2^{\Omega}$, μ を Ω 上の単調測度とする．
関数 $f : \Omega \to [0, \infty)$ を $f = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0, \infty)^n$ とみなして
$(x_i = f(i))$

$$(S) \int f d\mu = \vee_{i=1}^{n-1} (x_{\sigma(i)} \wedge \mu(A_i))$$

と定義する．ただし, $\sigma \in S_n$, $x_{\sigma(1)} \geq x_{\sigma(2)} \geq \cdots \geq x_{\sigma(n)}$,
$A_i = \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i)\}$.
$\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, $C(\Omega) \cong \mathbb{C}^n$ に対して非線形正値写像
$(S - \varphi)_\mu : (\mathbb{C}^n)^+ \to \mathbb{C}^+$ を次で定義する

$$(S - \varphi)_\mu(f) = (S) \int f d\mu.$$

$K(H)^+$ 上の菅野型の非線形 trace の構成

$\alpha : \mathbb{N}_0 \to [0,\infty)$ を $\alpha(0) = 0$ を満たす単調増加関数とし，単調不変測度 $\mu_\alpha : \mathcal{R}(\mathbb{N}) \to [0,\infty)$ を $\mu_\alpha(A) = \alpha(\sharp A)$ で定義する．

$a \in K(H)^+$

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(a) p_n$$

に対して

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(a) &= \vee_{i=1}^{\infty}(\lambda_i(a) \wedge \mu_\alpha(A_i)) \\ &= \vee_{i=1}^{\infty}(\lambda_i(a) \wedge \alpha(\sharp A_i)) \\ &= \vee_{i=1}^{\infty}(\lambda_i(a) \wedge \alpha(i)) \end{aligned}$$

と定義する．ここで $A_i = \{1, 2, \ldots, i\}$.

ψ_α を **the non-linear trace of Sugeno type associated with** α という．

ψ_α : lower semi-continuous on $K(H)^+$ in the norm

- $\psi_\alpha(a) < \infty$ のとき

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0;\ \|x - a\| < \delta \Rightarrow \psi_\alpha(a) - \epsilon < \psi_\alpha(x)$$

- $\psi_\alpha(a) = \infty$ のとき

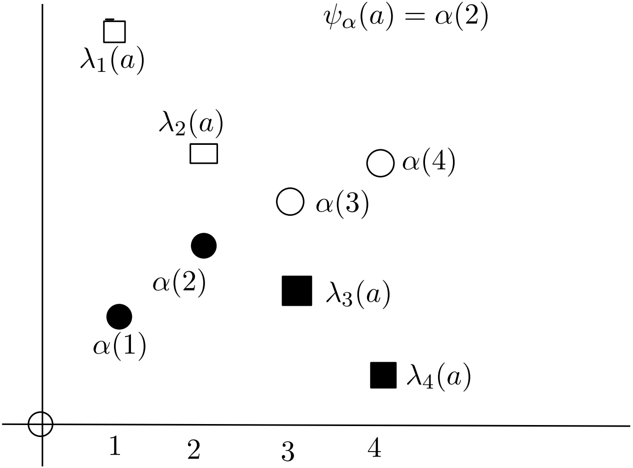
$$\forall M > 0\ \exists \delta > 0;\ \|x - a\| < \delta \Rightarrow M < \psi_\alpha(x)$$

$S_n(a) = \vee_{i=1}^n (\lambda_i(a) \wedge \alpha(i))$: continuous for the usual operator norm (by Mini-Max Theorem).

$$\psi_\alpha(a) = \sup\{S_n(a) : n \in \mathbb{N}\}.$$

任意の直交射影 p に対して

$$\lambda_i(pap) \leq \lambda_i(a), \quad \psi_\alpha(pap) \leq \psi_\alpha(a).$$



例 $\alpha = (0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$ のとき $\psi_\alpha(a) = \vee_{i=1}^{\infty}(\lambda_i(a) \wedge i)$

$$\psi_\alpha(a) \geq n \Leftrightarrow \lambda_n(a) \geq n.$$

p: 1 次元射影のとき $\psi_\alpha(2p) = \alpha(1) = 1 = \psi_\alpha(p)$.

コンパクト環上の非線形正値汎関数の性質

- **positively F-homogeneous** 任意のスカラー $k \geq 0$ に対して

$$\psi(kI \wedge a) = k \wedge \psi(a) \quad a \in K(H)^+.$$

- **comonotonic F-additive on the spectrum**

$$\psi((f \vee g)(a)) = \psi(f(a)) \vee \psi(g(a))$$

for any $a \in K(H)^+$, any comonotonic functions $f, g \in C(\sigma(a))^+$ with $f(0) = g(0) = 0$.

- **monotonic increasing F-additive on the spectrum**

$$\psi((f \vee g)(a)) = \psi(f(a)) \vee \psi(g(a))$$

for any $a \in K(H)^+$, any monotonic increasing functions $f, g \in C(\sigma(a))^+$ with $f(0) = g(0) = 0$.

菅野型の非線形トレースの特徴付け

Theorem 6

$\psi : K(H)^+ \to [0, \infty]$ を非線形正値汎関数とする．このとき, 次は同値である．

(1) $\alpha(0) = 0$ を満たす単調増加列が存在して $\psi = \psi_\alpha$ となる．

(2) ψ は *comonotonic additive on the spectrum, unitarily invariant, monotone, positively F-homogeneous, lower semi-continuous on* $K(H)^+$ *in the norm* である．$a \in F(H)^+$ に対して $\lim_{c\to\infty} \psi(ca) < \infty$ である．

(3) ψ は *monotonic increasing F-additive on the spectrum, unitarily invariant, monotone, positively F-homogeneous, lower semi-continuous on* $K(H)^+$ *in the norm* である．$a \in F(H)^+$ に対して $\lim_{c\to\infty} \psi(ca) < \infty$ である．

$\psi = \psi_\alpha$, $0 = \alpha(0) < \alpha(1) \leq \alpha(2) \leq \cdots$ とする.

Lemma 7

$a \in K(H)^+$, p, q を直交射影とする. $0 \leq p \leq q \Rightarrow \psi_\alpha(pap) \leq \psi_\alpha(qaq)$.

Lemma 8

$a \in K(H)^+$, $a = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(a) p_i$, $\lambda_1(a) \geq \lambda_2(a) \geq \cdots$ とする.

(1) 有限階数の射影 p で $pap \geq \psi_\alpha(a)p$ かつ $\psi_\alpha(a) \leq \alpha(\dim p)$ を満たすものが存在する.

(2) 有限階数の射影 q で $(I-q)a(I-q) \leq \psi_\alpha(a)(I-q)$ かつ $\psi_\alpha(a) \geq \alpha(\dim q)$ を満たすものが存在する.

Theorem 9

$a \in K(H)^+$ に対し

$$\psi_\alpha(a) = \max\{\lambda \geq 0 | \exists p;\ \text{有限階数の射影}\ , \lambda \leq \alpha(\dim p), pap \geq \lambda p\}.$$

$a \in K(H)$ に対し $||a||_\alpha = \psi_\alpha(|a|)$ と定義する.

Theorem 10

α が *concave* であるとき,

$$\|b + c\|_\alpha \leq \|b\|_\alpha + \|c\|_\alpha$$

が成立する.

$\psi = \psi_\alpha$, $0 = \alpha(0) < \alpha(1) \leq \alpha(2) \leq \cdots$, concave とする． $K(H) \ni a, b$ 対して

$$d(a,b) = \|a - b\|_\alpha$$

によって $(K(H), d)$ は距離空間となる．
$(K(H), d)$ と $(K(H), \|\cdot\|)$ は Banachspace として同相であることがわかる．

$K(H) \ni a = a_1 - a_2 + i(a_3 - a_4)$, $a_1, a_2, a_3, a_4 \geq 0$, $a_1 a_2 = 0 = a_3 a_4$ の分解に対して

$$\psi_\alpha(a) = \psi_\alpha(a_1) - \psi_\alpha(a_2) + i(\psi_\alpha(a_3) - \psi_\alpha(a_4))$$

によって非線形なトレースを定義することができる．