論　　説

Cantor 集合への有限生成アーベル群の極小作用の軌道構造について

松　井　宏　樹

1　はじめに

本小文では次の定理 ([18]) とそれに関連するいくつかの話題について解説を行う.

定理 1　$i = 1, 2$ について, $\varphi_i : G_i \curvearrowright X_i$ を有限生成アーベル群 G_i の Cantor 集合 X_i への (同相写像による) 極小作用とする. 以下は同値.

(1) φ_1 と φ_2 は軌道同型.

(2) φ_1-不変測度の全体を φ_2-不変測度の全体に移すような同相写像 $h : X_1 \to X_2$ が存在する.

まずは定理に現れる用語を説明する. 閉区間 $[0, 1]$ を 3 等分して真ん中の開区間 $(1/3, 2/3)$ を取り除き, 残った 2 つの閉区間 $[0, 1/3]$ と $[2/3, 1]$ に対してそれぞれ同様に真ん中の開区間を取り除くという操作を行い, 以下この操作を無限回繰り返すと, 閉区間 $[0, 1]$ の閉部分集合が得られる. これが Cantor 集合 (もしくは Cantor の 3 進集合) と呼ばれているものである. Cantor 集合は $[0, 1]$ からの相対位相によって, コンパクト・距離付け可能・完全不連結 (すなわち任意の連結成分が 1 点のみ)・孤立点を持たない, という 4 つの性質を持つ位相空間となる. さらに, この 4 つの性質を満たす任意の位相空間は Cantor 集合と同相になる. この小文では Cantor 集合を (閉区間 $[0, 1]$ の部分集合ではなく) このような性質で特徴付けられる抽象的な位相空間として取り扱う. 有限集合の可算無限直積に直積位相を入れたものが Cantor 集合 (と同相) になることはよく知られている. 開かつ閉な集合を clopen 集合と呼ぶ. Cantor 集合の位相は clopen 部分集合たちで生成されている. また Cantor 集合の clopen 部分集合は可算個しか無い. $\varphi : G \curvearrowright X$ を可算群 G の Cantor 集合 X への同相写像による作用とする. すなわち φ は G から X の自己同相群 $\mathrm{Homeo}(X)$ への群準同型である. $x \in X$ の φ-軌道 $R_\varphi[x]$ を $R_\varphi[x] = \{\varphi^g(x) \in X \mid g \in G\}$ で定義する. 任意の $x \in X$ に対して $R_\varphi[x]$ が X で稠密になるとき (これは φ-不変な閉集合が X と空集合に限ることと同値である), φ は極小であると言う. $i = 1, 2$ について, $\varphi_i : G_i \curvearrowright X_i$ が可算群 G_i の Cantor 集合 X_i への作用であるとする. X_1 から X_2 への同相写像 $h : X_1 \to X_2$ であって, 任意の $x \in X_1$ に対して $h(R_{\varphi_1}[x]) = R_{\varphi_2}[h(x)]$ となるものが存在するとき, φ_1 と φ_2 は軌道同型であるという. Cantor 集合への極小作用を軌道同型によって分類するというのが主な問題である. いま φ_1 と φ_2 が同相写像 $h : X_1 \to X_2$ によって軌道同型になっているとしよう. すぐにわかるように, X_1 上の確率測度 μ に対して, μ が φ_1-不変であることと $h_*(\mu)$ が φ_2-不変であることは同値になる. つまり, 上の定理 1 の (1)⇒(2) は常に成り立っている. G_i が有限生成アーベル群であって φ_i が極小作用であるときには, その逆, すなわち (2)⇒(1) が成り立つと定理は主張している.

Cantor 集合上の極小作用を軌道同型で分類するという問題意識は, 力学系から構成される作用素環

の解析の中から生じた．作用素環は von Neumann 環と C^*-環の 2 種類に大別される．可算群 G のルベーグ空間 (Ω,μ) への作用から von Neumann 環を構成する方法は研究の初期段階から使われているが, 現在もなお極めて重要な研究対象の 1 つであり続けている．G が従順で作用が自由かつエルゴード的であるときには, 作用の軌道同型類と対応する von Neumann 環の同型類とが 1 対 1 に対応するという著しい結果がある ([8, 28, 38, 6])．一方, 位相力学系と C^*-環のカテゴリーにおける類似も, 90 年代以降の C^*-環の分類理論の発展に伴い, 盛んに研究されるようになった．可算群 G がコンパクト Hausdorff 空間 X に同相写像によって作用しているとき, von Neumann 環の場合と同様の方法によって, 対応する C^*-環を構成することが出来る．von Neumann 環の設定におけるエルゴード性を極小性に置き換えることにより, 単純な (つまり自明でない閉イデアルを持たない) C^*-環が生じる．問題は, 適切な状況設定の下で, このような C^*-環を分類したり元の力学系との関連を明らかにすることである．Giordano・Putnam・Skau は, G が整数群 $\boldsymbol{Z}$ で X が Cantor 集合の場合に, この問題に対するほぼ完全な解答を与えた．以来この結果を $G=\boldsymbol{Z}^N$ の場合に拡張する努力が払われてきたが, 残念ながら, 対応する C^*-環の分類にまでは未だ至っていない．von Neumann 環の設定では全ての従順な可算群 G を統一的に扱うことが可能であったが, 位相力学系と C^*-環の設定では話はそう簡単ではない．以上のような経緯と背景の下で著者は, Cantor 集合 X への有限生成アーベル群の極小作用を軌道同型で分類することに成功した (Giordano・Putnam・Skau との共同研究)．本小文ではこの結果についての解説を試みる．

2 いくつかの例

Cantor 集合への整数群 $\boldsymbol{Z}$ の極小作用をいくつか紹介する．

2.1 odometer system

$\{m_n\}_{n=1}^\infty$ を 2 以上の自然数の増大列とし, 各 n に対して m_n は m_{n+1} を割るとする．$1\in\boldsymbol{Z}$ の $\boldsymbol{Z}/m_n\boldsymbol{Z}$ における像を $\bar{1}$ と書く．$\bar{1}$ を $\bar{1}$ に移す $\boldsymbol{Z}/m_{n+1}\boldsymbol{Z}$ から $\boldsymbol{Z}/m_n\boldsymbol{Z}$ への準同型たちによる射影的極限群を X とする．X は局所コンパクトアーベル群の構造を持つ Cantor 集合となる．X の各元に $(\bar{1},\bar{1},\bar{1},\dots)\in X$ を足すという操作は, X 上の自己同相写像 φ を与える．φ (が生成する $\boldsymbol{Z}$ の作用) が極小であることは容易に分かる．これを odometer system と呼ぶ．X 上の φ-不変な確率測度は Haar 測度 μ だけである．また,

$$\{\mu(U)\mid U\text{ は }X\text{ の clopen 部分集合 }\}=\left\{\frac{k}{m_n}\mid k=0,1,\dots,m_n,\ n\in\boldsymbol{N}\right\}$$

も簡単に分かる．

X の元 $a_1,a_2,\dots,a_N$ を, それらが生成する部分群が X で稠密になるように取る．上と同様に, X の各元に $a_i\in X$ を足すという操作を考えると, 互いに交換する N 個の同相写像が得られるので, これによって $\boldsymbol{Z}^N$ の極小作用を構成することもできる．

2.2 Denjoy system

この節に関して詳しくは [7, Chapter 3] あるいは [42] を見られたい．$\theta\in\boldsymbol{T}=\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ に対し, $r_\theta:\boldsymbol{T}\to\boldsymbol{T}$ を角度 $2\pi\theta$ の回転 $x\mapsto x+\theta$ とする．$\boldsymbol{T}$ 上の自己同相 ρ で, その回転数 $\theta\in\boldsymbol{T}$ は無理数であるが r_θ と位相共役ではないものを取る．このような ρ を Denjoy 同相写像と呼ぶ．ρ は唯一の自明で

ない不変閉集合 $X \subset \boldsymbol{T}$ を持ち, さらにこの X は Cantor 集合になる. ρ の X への制限を φ とすれば, φ は Cantor 集合 X 上の極小な $\boldsymbol{Z}$ 作用を生成する. これを Denjoy system と呼ぶ.

別の見方をしてみよう. $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots\} \subset \boldsymbol{T}$ を $r_\theta(C) = C$ となるような可算集合とする. θ が無理数なので C は $\boldsymbol{T}$ で稠密である. $\boldsymbol{T}$ を n 個の点 $c_1, c_2, \dots, c_n$ で '切断' して出来る図形を Y_n とおく. ただし切断点は 2 つに分かれて左右両方の端点になるものとする. Y_n は n 個の閉区間の和と同相である. 各 n に対し Y_{n+1} から Y_n へは自然な全射連続写像があるが, それによる射影的極限空間を Y_C とする. $\boldsymbol{T}$ を C に属する点で切断して出来た空間が Y_C である. C が $\boldsymbol{T}$ で稠密なので Y_C は Cantor 集合になる. また, Y_C から $\boldsymbol{T}$ へは自然な全射連続写像 π がある. さらに $r_\theta(C) = C$ より, Y_C 上の自己同相 ψ で $\pi \circ \psi = r_\theta \circ \pi$ を満たすものが存在する. この ψ は Y_C 上の極小な $\boldsymbol{Z}$ 作用を生成することが分かる. 前段の Denjoy 同相写像 ρ に対して可算集合 $C \subset \boldsymbol{T}$ を上手に取れば, (X, φ) と (Y_C, ψ) が位相共役になることが知られている. つまり Denjoy system は Cantor 集合における無理数回転であるとみなせる. Y_C 上の ψ-不変な確率測度は 1 つしか存在せず, それを μ とすれば,

$$\{\mu(U) \mid U \text{ は } Y_C \text{ の clopen 部分集合 }\} = G \cap [0,1]$$

となる. ただしここで G は $\{c_n - c_m \mid n, m \in \boldsymbol{N}\}$ と $\boldsymbol{Z}$ で生成される $\boldsymbol{R}$ の部分群とする.

2 つ以上の無理数による回転を同時に考えれば, 同様の方法により, Cantor 集合上の極小な $\boldsymbol{Z}^N$ 作用を得ることができる.

2.3 interval exchange

この節に関して詳しくは [7, Chapter 5], [40, Section 2], [23] を見られたい. 2 以上の自然数 n を固定し, その和がちょうど 1 になるような n 個の正の実数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ と, $\{1, 2, \dots, n\}$ の上の置換 τ を用意する.

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_i = \sum_{j=1}^{i} \alpha_j, \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_i = \sum_{j=1}^{i} \alpha_{\tau^{-1}(j)}$$

とおく. 半開区間 $[0, 1)$ 上の全単射 T を, $x \in I_i = [\beta_{i-1}, \beta_i)$ に対して

$$T(x) = x - \beta_{i-1} + \gamma_{\tau(i)-1}$$

と決めることによって定める. T は n 個の半開区間 $I_1, I_2, \dots, I_n$ を置換 τ にしたがって入れ替えるような変換になっているが, もちろん連続ではない. 任意の点 $x \in [0, 1)$ の T による軌道 $\{T^k(x) \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$ が $[0, 1)$ で稠密となるとき, T は極小であるという. $i = 0, 1, \dots, n-1$ に対して $\{T^k(\beta_i) \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$ が無限集合であって i が異なれば互いに交わりを持たないならば, T は極小になる. 以降 T が極小であるとする. 前節と同様のやり方で, $\{T^k(\beta_i) \mid k \in \boldsymbol{Z}, i = 0, 1, \dots, n-1\}$ に属する各点で $[0, 1]$ を切断し, Cantor 集合 X を構成することができる. T が定める X 上の同相写像を φ とすれば, φ が生成する $\boldsymbol{Z}$ 作用は極小であることが分かる. これを interval exchange と呼ぶ. $[0, 1]$ 上の Lebesgue 測度を自然に X 上の測度とみなして, それを μ とする. μ は明らかに φ-不変であるが, α_i や τ の選び方によってはその他に不変確率測度が存在する場合がある. ただしエルゴード的な不変確率測度は高々 n 個しか生じない. G を $\{\alpha_i \mid i{=}1, 2, \dots, n\}$ で生成される $\boldsymbol{R}$ の部分群とすれば,

$$\{\mu(U) \mid U \text{ は } X \text{ の clopen 部分集合 }\} = G \cap [0,1]$$

が成り立つ.

3 AF 同値関係

3.1 同値関係

以下では, 可算群 (特に $\boldsymbol{Z}^N$) の Cantor 集合への作用を念頭に置いているのだが, 少し枠組みを広げた方が便利になることがあるので, 同値関係を用いて問題を定式化したい.

定義 2 (同値関係) X を位相空間とする. 部分集合 $R \subset X \times X$ が, 任意の $x, y, z \in X$ について, $(x, x) \in R$ (反射律), $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ (対称律), $(x, y), (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (推移律) を満たすとき, R を X 上の同値関係と呼ぶ. $x \in X$ に対して $R[x] = \{y \in X \mid (x, y) \in R\}$ とおき, x の R による軌道と呼ぶ. 任意の $x \in X$ について $R[x]$ が高々可算となるとき, R を可算な同値関係と呼ぶ. 以降断らない限り可算な同値関係のみを考える. 任意の $x \in X$ について $R[x]$ が X で稠密となるとき, R を極小であるという.

ある種の極小な同値関係を次に述べる軌道同型という概念で分類するというのが問題である.

定義 3 (軌道同型) X_1, X_2 を位相空間とし, R_1, R_2 をそれぞれ X_1, X_2 上の同値関係とする. X_1 から X_2 への同相写像 $h : X_1 \to X_2$ があって, $(x, y) \in R_1 \Leftrightarrow (h(x), h(y)) \in R_2$ となるとき, R_1 と R_2 は軌道同型であるという.

可算群 G の作用から次のようにして X 上の同値関係が得られる.

定義 4 (群作用) X を Cantor 集合とし, $\varphi : G \curvearrowright X$ を可算群 G の同相写像による作用とする. 任意の $x \in X$ について $\{g \in G \mid \varphi^g(x){=}x\} = \{e\}$ となるとき, φ は自由な作用であると言う.

$$R_\varphi = \{(x, \varphi^g(x)) \in X \times X \mid x \in X,\ g \in G\}$$

とおき, φ から生じる同値関係と呼ぶ. R_φ が極小であることと φ が極小であることは同じである. φ が自由かつ極小であるとき (X, φ) を Cantor 極小 G 系と呼ぶ.

$i = 1, 2$ に対して, $\varphi_i : G_i \curvearrowright X_i$ を群 G_i の Cantor 集合 X_i への同相写像による作用とする. R_{φ_1} と R_{φ_2} が軌道同型であるとき, (X_1, φ_1) と (X_2, φ_2) は軌道同型である.

Cantor 集合とは限らない一般の (普通の) 位相空間の上で軌道同型を考えることにはあまり意味が無い. なぜなら, 連結なコンパクト距離空間は可算個の閉集合の直和には分割されない (Sierpinski の定理) という古典的な結果から, 次が容易に従うからである : $\varphi_i : G_i \curvearrowright X_i$ が可算群 G_i の連結コンパクト距離空間 X_i への作用で, 互いに軌道同型であるならば, 同相写像 $h : X_1 \to X_2$ と同型 $\pi : G_1 \to G_2$ が存在して任意の $g \in G_1$ に対して $h \circ \varphi_1^g = \varphi_2^{\pi(g)} \circ h$ が成り立つ.

全ての同値関係は可算群の自由な作用から生じる同値関係と軌道同型であるかどうかを問うのは, 自然な問題である. 同種の問題は, ボレル同値関係の設定においても, エルゴード的な同値関係の枠組みにおいても, 否定的に解決されている ([1, 14]). 同様のことが Cantor 集合に関しても知られている ([25]). すなわち, 可算群の Cantor 集合への極小な作用であって, どのような可算群の自由な作用とも決して軌道同型にならないようなものが, 存在する.

同値関係 R に対する不変測度を次で定義する. R が群 G の作用から生じている場合は通常の不変測度の定義と一致する.

定義 5 (不変測度) R を Cantor 集合 X 上の同値関係とする. X 上の確率 Borel 測度 μ が R-不変

であるとは, $\{(x, \gamma(x)) \mid x \in X\} \subset R$ を満たす任意の同相写像 $\gamma \in \mathrm{Homeo}(X)$ に対して, μ が γ-不変となることを言う. R-不変な確率 Borel 測度の全体を $M(R)$ と書く. $M(R)$ が 1 点のみからなるとき R は一意エルゴード的であるという.

加群 D の部分集合 D^+ が, $D^+ + D^+ \subset D^+$, $D^+ - D^+ = D$, $D^+ \cap -D^+ = \{0\}$ を満たすとき, (D, D^+) を順序群と言う. $a, b \in D$ が $b - a \in D^+$ となるとき $a \leq b$ と書く. $u \in D^+$ が次の条件を満たすとき u は順序単位元であると言う：任意の $a \in D^+$ に対してある $n \in \boldsymbol{N}$ が存在して $a \leq nu$ となる. 全ての $D^+ \setminus \{0\}$ の元が順序単位元であるとき順序群 (D, D^+) は単純であると言う. 順序群と順序単位元の組 (D, D^+, u) を単位元を持つ順序群と呼ぶ. 単位元を持つ順序群 (D_i, D_i^+, u_i), $i = 1, 2$ が同型であるとは, 同型 $\pi : D_1 \to D_2$ で $\pi(D_1^+) = D_2^+$, $\pi(u_1) = u_2$ となるものが存在するときを言う. 順序群としての構造が文脈から明らかな場合は単に D_1 と D_2 が同型と言ったりする.

X が Cantor 集合のとき X 上の整数値連続関数がなす加群を $C(X, \boldsymbol{Z})$ とする. X は clopen 部分集合を可算個しか持たないから, $C(X, \boldsymbol{Z})$ は可算である. Cantor 集合 X 上の同値関係 R に対して, $D_m(R)$ を $C(X, \boldsymbol{Z})$ の

$$\left\{ f \in C(X, \boldsymbol{Z}) \mid \int_X f \, d\mu = 0 \text{ for all } \mu \in M(R) \right\}$$

による商群とし, $f \in C(X, \boldsymbol{Z})$ の $D_m(R)$ における同値類を $[f]_m$ と表す.

$$D_m(R)^+ = \{[f]_m \in D_m(R) \mid f(x) \geq 0 \text{ for all } x \in X\}$$

とおく. $(D_m(R), D_m(R)^+, [1_X]_m)$ は単位元を持つ順序群であることが簡単に分かる.

次は簡単に分かる：R_1, R_2 が Cantor 集合 X_1, X_2 上の同値関係で, 同相写像 $h : X_1 \to X_2$ が R_1 と R_2 の間の軌道同型を導くならば, $h_*(M(R_1)) = M(R_2)$ が成り立ち, 特に, 写像 $C(X_1, \boldsymbol{Z}) \ni f \to f \circ h^{-1} \in C(X_2, \boldsymbol{Z})$ は $(D_m(R_1), D_m(R_1)^+, [1_{X_1}]_m)$ から $(D_m(R_2), D_m(R_2)^+, [1_{X_2}]_m)$ への同型を導く. 我々の目指す ‘分類’ は, 適切なクラスに属する同値関係に対してこの事実の逆に相当する事柄を示すことで成される.

3.2 AF 同値関係

同値関係の軌道同型による分類のために AF 同値関係と呼ばれるものを導入する必要があり, そのためにはまず同値関係に位相を入れなくてはならない. 軌道同型による分類を問題として述べるだけならば同値関係に位相が入っている必要は全く無いが, 証明を進めるためには位相を必要とする. この節の内容については [21, 43] を参照のこと.

定義 6 X をコンパクト・距離付け可能・完全不連結な位相空間とする (このような位相空間は必ず Cantor 集合の閉部分集合になる). R を X 上の同値関係とする. R 上の位相 $\mathcal{O}$ が次の条件を満たすとき, $(R, \mathcal{O})$ を étale な同値関係と呼び, $\mathcal{O}$ を étale な位相と言う.

- $(R, \mathcal{O})$ は局所コンパクトかつ距離付け可能
- 写像 $(x, y) \mapsto (y, x)$ は, R から R への同相写像
- 写像 $((x, y), (y, z)) \mapsto (x, z)$ は, $R \times R$ の部分集合から R への連続写像
- 写像 $r : (x, y) \mapsto x$ は, R から X への局所同相写像 (すなわち, (x, y) の clopen な近傍 U が存在し, $r(U)$ は X で clopen で, $r|U$ は U から $r(U)$ への同相写像)

2 番目の条件があるので, 4 番目の条件は写像 $s:(x,y)\mapsto y$ に対しても同様に成立する．$i=1,2$ に対して R_i が X_i 上の étale 同値関係のとき, R_1 と R_2 が同型であるとは, X_1 から X_2 への同相写像 h で $h\times h$ の R_1 への制限が R_1 から R_2 への同相写像となるようなものが存在するときを言う．R が X 上の étale 同値関係とする．$r|U, s|U$ がともに局所同相写像になるような clopen 部分集合 $U\subset R$ によって $1_{r(U)}-1_{s(U)}$ と表される関数全体を考え, それらが生成する部分群による $C(X,\boldsymbol{Z})$ の商群を $D(R)$ とおく．$f\in C(X,\boldsymbol{Z})$ の $D(R)$ における同値類を $[f]$ とし,

$$D(R)^+=\{[f]\in D(R)\mid f(x)\geq 0 \text{ for all } x\in X\}$$

とする．必ずしも $(D(R),D(R)^+)$ は順序群になるとは限らない．これに $[1_X]$ を加えた 3 つ組は étale 同値関係の不変量になっている．

同値関係 R 上の étale な位相は 1 つには定まらず, 一般には非可算無限個の étale な位相が存在しうる．また, $X\times X$ の直積位相の R への制限が étale な位相を定めることはまれである．$(R,\mathcal{O})$ が étale な同値関係で, R' が R の部分同値関係であって且つ開集合 (すなわち $R'\in\mathcal{O}$) のとき, 相対位相によって R' も étale な同値関係となる．$\varphi:G\curvearrowright X$ が自由な作用であるとき, $G\times X$ と R_φ のあいだの自然な 1 対 1 対応によって $G\times X$ における直積位相を R_φ にコピーすることが出来る．この位相によって R_φ が étale な同値関係になることは容易に確認できる．以降 R_φ にはこの自然な位相を入れるものとする．群作用の場合には

$$D(R_\varphi)=C(X,\boldsymbol{Z})/\langle f-f\circ\varphi^g\mid f\in C(X,\boldsymbol{Z}),g\in G\rangle$$

となることが明らかに分かる．G が有限群である場合には, R_φ に定まる位相は $X\times X$ の直積位相の制限と一致する．

次の命題はコンパクトで étale な同値関係の構造を決定している．

命題 7　X をコンパクト・距離付け可能・完全不連結な位相空間とし, $(R,\mathcal{O})$ を X 上のコンパクトで étale な同値関係とする．すると, clopen 部分集合による X の分割 $X_1,X_2,\dots,X_K$ と, 自然数 $n_1,n_2,\dots,n_K$ と, 自由な作用 $\varphi_k:\boldsymbol{Z}/n_k\boldsymbol{Z}\curvearrowright X_k$ $(k=1,2,\dots,K)$ が存在し,

$$R=\bigcup_{k=1}^K\{(x,\varphi_k^l(x))\in X\times X\mid x\in X_k,\ l=1,2,\dots,n_k\}$$

が成立する．特に $\sup_x\#R[x]$ は有限となる ($\#R[x]$ は $R[x]$ の濃度)．また, 位相 $\mathcal{O}$ は $X\times X$ の直積位相の制限に一致する．

定義 8 (AF 同値関係)　X をコンパクト・距離付け可能・完全不連結な位相空間とし, $(R,\mathcal{O})$ を X 上の étale な同値関係とする．R の開かつコンパクトな部分同値関係の列 $R_1,R_2,\dots$ が存在して

$$R_1\subset R_2\subset\dots\ \text{かつ}\ R=\bigcup_{n=1}^\infty R_n$$

となるとき, R を AF 同値関係と呼ぶ.

換言すれば, コンパクトで étale な同値関係の増大和として書けるような同値関係を AF 同値関係と呼ぶ, という事である．AF は Approximately Finite を表す．命題 7 から分かるように, コンパクトで étale な同値関係はある意味で ‘有限な同値関係’ とみなされる．AF 同値関係はその極限という

わけである．エルゴード的な同値関係やボレル同値関係の研究においても，このような '近似的に有限' と呼ぶべき同値関係が重要な役割を演じる．Cantor 集合の場合も似たような道筋を辿る．R が AF ならば $M(R)$ は空ではない．R が AF で R' が部分同値関係であって且つ開集合であれば，自動的に R' も AF となる．可算群の自由な作用から生じる同値関係 R_φ が (その自然な位相によって) AF 同値関係となることはほとんど期待できないことにも注意しておく．

3.3 Bratteli 図式と AF 同値関係の分類

Bratteli 図式とは，AF 環と呼ばれるクラスの C^* 環の分類理論に現れる，ある種の無限有向グラフである．有向グラフは 2 つの集合 V, E と 2 つの写像 $s, r : E \to V$ で書ける．ただし V が頂点の集合，E が辺の集合で，s と r はそれぞれ始点と終点を表す．V と E がそれぞれ互いに素な空でない有限集合たちの和として $V = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup \dots$, $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots$ と書けていて，各 $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $s(E_n) = V_{n-1}$, $r(E_n) = V_n$ を満たしているとき，グラフ (V, E) を Bratteli 図式と呼ぶ．Bratteli 図式 (V, E) に対して，その infinite path space $X_{(V,E)}$ を

$$X_{(V,E)} = \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty \in \prod_{n=1}^\infty E_n \mid r(x_n) = s(x_{n+1}) \text{ for all } n \in \boldsymbol{N} \right\}$$

で定義する．直積集合 $\prod E_n$ には直積位相を入れ $X_{(V,E)}$ にはそこからの相対位相を入れると，$X_{(V,E)}$ はコンパクト・距離付け可能・完全不連結な位相空間になる．$x \in X_{(V,E)}$ に対して x の第 n 成分を x_n と書く．$X_{(V,E)}$ 上の同値関係 $R_{(V,E)}$ を次のようにして定める．各 $n \in \boldsymbol{N}$ に対して

$$R_n = \{(x, y) \in X_{(V,E)} \times X_{(V,E)} \mid x_k = y_k \text{ for all } k > n\}$$

とする．$X_{(V,E)} \times X_{(V,E)}$ の直積位相の制限により R_n に位相を入れると，R_n はコンパクトな étale 同値関係になる．

$$R_{(V,E)} = \bigcup_{n=1}^\infty R_n$$

とし，$R_{(V,E)}$ には帰納的極限位相を入れる．定義より明らかに $R_{(V,E)}$ は AF 同値関係となるが，逆に次が成り立つ ([21])．

定理 9 X がコンパクト・距離付け可能・完全不連結な位相空間で R が X 上の AF 同値関係であるとき，ある Bratteli 図式 (V, E) が存在して R と $R_{(V,E)}$ は同型となる．

Bratteli 図式 (V, E) が単純であるとは，任意の $v \in V$ が次の条件を満たすことを言う：ある $n \in \boldsymbol{N}$ が存在して，全ての $w \in V_n$ に対して v から w へ至る path が存在する．(V, E) が単純であることと $R_{(V,E)}$ が極小であることは同値である．

不変量 $D(R_{(V,E)})$ は次のようにして計算される．各 V_n に対して，V_n を基とする自由アーベル群を $\boldsymbol{Z}^{V_n}$ とおく．全ての係数が非負整数であるような $\boldsymbol{Z}^{V_n}$ の元の全体を $\boldsymbol{Z}^{V_n}_+$ とすれば，$(\boldsymbol{Z}^{V_n}, \boldsymbol{Z}^{V_n}_+)$ は順序群である．準同型 $\rho_n : \boldsymbol{Z}^{V_n} \to \boldsymbol{Z}^{V_{n+1}}$ を

$$\rho_n(v) = \sum_{w \in V_{n+1}} \#(s^{-1}(v) \cap r^{-1}(w)) w, \quad v \in V_n$$

によって定める．ただし $\#(s^{-1}(v) \cap r^{-1}(w))$ は v と w を始点と終点に持つような辺の個数である．

帰納系 $\{\boldsymbol{Z}^{V_n}, \rho_n\}$ による帰納的極限群を D とする．$\boldsymbol{Z}^{V_n}$ から D への自然な準同型を $\rho_{n,\infty}$ とし，

$$D^+ = \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho_{n,\infty}(\boldsymbol{Z}_+^{V_n}), \quad u = \rho_{0,\infty}\left(\sum_{v \in V_0} v\right)$$

とおくと，(D, D^+, u) は単位元を持つ順序群となる．(V, E) が単純であることと (D, D^+, u) が単純であることは同値になる．そして $(D(R_{(V,E)}), D(R_{(V,E)})^+, [1_{X_{(V,E)}}])$ は (D, D^+, u) に同型である．一般に，$(\boldsymbol{Z}^m, \boldsymbol{Z}_+^m)$ の帰納的極限として書けるような順序群を次元群と呼ぶ．

G. A. Elliott による AF 環の分類定理 ([10]) に触発され，W. Krieger は次の AF 同値関係の分類定理 ([29]) を示した．

定理 10　X_1, X_2 をコンパクト・距離付け可能・完全不連結な位相空間とし，R_1, R_2 をそれぞれ X_1, X_2 上の AF 同値関係とする．次は同値．

(1)　R_1 と R_2 が同型．

(2)　$(D(R_1), D(R_1)^+, [1_{X_1}])$ と $(D(R_2), D(R_2)^+, [1_{X_2}])$ が同型．

順序群 (D, D^+) が unperforated であるとは，$a \in D$, $k \in \boldsymbol{N}$, $ka \in D^+$ ならば $a \in D^+$ となることを言い，(D, D^+) が Riesz の補間条件を満たすとは，$a_1, a_2, b_1, b_2 \in D$, $a_i \leq b_j$ $(i, j = 1, 2)$ ならばある $c \in D$ が存在して $a_i \leq c \leq b_j$ $(i, j = 1, 2)$ となることを言う．unperforated ならば捩れ元を含まない．unperforated かつ Riesz の補間条件を満たすものは Riesz 群と呼ばれる．次元群が Riesz 群であることは簡単に分かる．逆に，可算な Riesz 群は次元群であることが知られている ([9])．これにより，AF 同値関係の (同型に関する) 不変量 $(D(R), D(R)^+)$ として現れうる順序群の全体は，可算な Riesz 群の全体と一致することが分かる．また，R が極小であることと $D(R)$ が単純であることが対応する．

次に極小な AF 同値関係の軌道同型による分類定理について述べる．そのためにまず次元群の状態空間と無限小部分群を導入する．単位元を持つ次元群 (D, D^+, u) に対して，$\rho(D^+) \subset \boldsymbol{R}_+$, $\rho(u) = 1$ を満たすような準同型 $\rho : D \to \boldsymbol{R}$ の全体を $S(D)$ と書き，状態空間と呼ぶ．任意の $n \in \boldsymbol{Z}$ と順序単位元 c に対して $na \leq c$ となるような $a \in D$ は無限小元と呼ばれる．無限小元の全体がなす部分群を $\mathrm{Inf}(D)$ と書いて D の無限小部分群と呼ぶ．

$$\mathrm{Inf}(D) = \{a \in D \mid \rho(a) = 0 \text{ for all } \rho \in S(D)\}$$

が成り立つ．$\tau : D \to D/\mathrm{Inf}(D)$ を商写像とすると，$(\tau(D), \tau(D^+), \tau(u))$ もまた単位元を持つ次元群となることが分かる．$\tau(D)$ の無限小部分群は $\{0\}$ である．R が X 上の AF 同値関係のとき，$\mu \in M(R)$ に対して $\rho_\mu : D \to \boldsymbol{R}$ を

$$\rho_\mu([f]) = \int_X f \, d\mu, \quad [f] \in D(R)$$

で定めると $\rho_\mu \in S(D(R))$ となり，$\mu \mapsto \rho_\mu$ は $M(R)$ と状態空間 $S(D(R))$ の間の全単射写像となる．これにより，$D_m(R)$ は単位元を持つ順序群として自然に $\tau(D(R))$ と同型となることが分かる．また，AF 同値関係の軌道同型に関する不変量 $(D_m(R), D_m(R)^+)$ として現れうる順序群の全体は，無限小部分群が $\{0\}$ となるような次元群の全体と一致する．次の定理が重要である ([19])．

定理 11　X_1, X_2 を Cantor 集合とし，R_1, R_2 をそれぞれ X_1, X_2 上の極小な AF 同値関係とする．

次は同値.

(1) R_1 と R_2 が軌道同型.

(2) X_1 から X_2 への同相写像 h で, $h_*(M(R_1)) = M(R_2)$ となるものが存在する.

(3) $(D_m(R_1), D_m(R_1)^+, [1_{X_1}]_m)$ と $(D_m(R_2), D_m(R_2)^+, [1_{X_2}]_m)$ が同型.

前にも述べたように (1)⇒(2)⇒(3) は自明であり, 厄介なのは (3)⇒(1) である. [19] のオリジナルの証明よりも, 吸収定理 (後述) を用いる [41] の証明の方が見通しが良い. この定理により, Cantor 集合上の極小な AF 同値関係の軌道同型による同値類は, 無限小部分群が $\{0\}$ となるような単純な次元群であって $\boldsymbol{Z}$ と同型ではないものの全体と, 1 対 1 対応することが分かる. 無論, そのような次元群を全てリストアップすることは (多分) 不可能なので, 何やらよく分からないものと別の分からないものの間に 1 対 1 対応を付けただけと言えなくもない. しかし, AF 環と呼ばれるクラスの C^* 環が次元群を完全不変量として持つ ([10]) という基本的な事実があるため, 少なくとも C^* 環の研究者にとっては, この 1 対 1 対応が十分意味のある分類を与えてくれているという気分がする.

定理 11 を一意エルゴード的な場合に適用することにより, 次の系を得る.

系 12　X_1, X_2 を Cantor 集合とし, R_1, R_2 をそれぞれ X_1, X_2 上の極小な AF 同値関係とする. $i = 1, 2$ に対して $M(R_i) = \{\mu_i\}$ であるとき, 次は同値.

(1) R_1 と R_2 が軌道同型.

(2) $\{\mu_1(U) \mid U$ は X_1 の clopen 部分集合 $\} = \{\mu_2(U) \mid U$ は X_2 の clopen 部分集合 $\}$

4　主定理の証明

冒頭に述べた定理 1 の証明の概略を述べたい.

4.1　吸収定理

定義 13　Cantor 集合 X 上の同値関係 R が affable であるとは, R が AF 同値関係と軌道同型になることを言う.

R 上の étale な位相 $\mathcal{O}$ が存在して $(R, \mathcal{O})$ が AF 同値関係となるときに R を affable であると言う, と言い換えることもできる. affable は AF-able からの連想による命名である. 定義より明らかに, 定理 11 および系 12 は極小で affable な同値関係に対してそのまま成り立つ. 有限生成アーベル群は $\boldsymbol{Z}^N$ と有限アーベル群の直和になるので, Cantor 集合への有限生成アーベル群の極小作用は Cantor 極小 $\boldsymbol{Z}^N$ 系と軌道同型になることが簡単に分かる. 従って, Cantor 極小 $\boldsymbol{Z}^N$ 系 (X, φ) から生じる同値関係 R_φ が affable であることが言えれば, 定理 1 の証明は完了する.

定理 14 ([18])　Cantor 極小 $\boldsymbol{Z}^N$ 系から生じる同値関係は affable である.

この定理の $N = 1$ の場合は実質的には [19] で示されたが, 整理された形で述べられたのは [21] である. [32, 33] において $N = 2$ の特殊な場合が解決され, [16] で $N = 2$ の場合が完全に解決された. 任意の N に対しては [18] で証明が与えられた.

与えられた同値関係の affability を示すための道具が吸収定理 (定理 15) である. その本質的なアイデアは既に [19] に現れているが, 明示的に定理として述べられたのは [21, Theorem 4.18] が最初である. $\boldsymbol{Z}^2$ 極小系の攻略に必要な形に改良されたバージョンが [17, Theorem 4.6] で, そのさらなる改良版が [35, Theorem 3.2] である. $\boldsymbol{Z}^N$ 極小系に対する軌道同型定理を得るにはこの最終改良版が必要である. 定理を述べるために言葉を準備する. R を Cantor 集合 X 上の AF 同値関係とする. 閉集

合 $Y \subset X$ への R の制限 $R \cap (Y \times Y)$ を $R|Y$ と書く．R からの相対位相によって $R|Y$ が étale な同値関係となるとき, Y を R-étale であるという．このとき $R|Y$ は自動的に AF 同値関係となる ([21, Theorem 3.11])．閉集合 $Y \subset X$ が任意の $\mu \in M(R)$ に対して $\mu(Y) = 0$ を満たすとき, Y は R-thin であるという．

定理 15 ([35, Theorem 3.2])　R を Cantor 集合 X 上の極小な AF 同値関係とする．X の閉集合 Y が R-étale かつ R-thin であるとする．Y 上に別の AF 同値関係 Q があって, $R|Y$ が Q の開集合であり, $R|Y$ から Q への包含写像が連続であるとする．このとき次の条件を満たす同相写像 $h : X \to X$ が存在する．

(1) $(h \times h)(R \vee Q) = R$ (ただし $R \vee Q$ は R と Q で代数的に生成される同値関係)

(2) $h(Y)$ は R-étale かつ R-thin

(3) $h|Y \times h|Y$ は Q から $R|h(Y)$ への同相写像を導く

特に $R \vee Q$ は affable である．

Y が R-thin であるということは相対的に Y が小さい集合であることを意味している．X 全体で定義された R は Y 上の Q を吸収してしまえるというのが定理の意味である．いま同値関係 S の affability を示すのが目標であるとすると, $S = R \vee Q$ となるような AF 同値関係 R と Q を S の中に構成しそれらに対して吸収定理を適用する, というのが大雑把な作戦である．実際にはこの定理を繰り返し ($\boldsymbol{Z}^N$ 作用の場合ならちょうど N 回) 使う必要があり, その議論を滞りなく進めるために (2) および (3) の条件を必要とする．

4.2　大きな AF 部分同値関係の構成 (N=1 の場合)

Cantor 極小 $\boldsymbol{Z}^N$ 系 (X, φ) から生じる同値関係 R_φ に対して吸収定理 (定理 15) を適用するには, R_φ の中に ‘大きな’AF 部分同値関係 R を構成しなければならない．N=1 の場合にはそのような AF 同値関係が自然に取れるので, まずはそれを説明する．$\boldsymbol{Z}$ 作用 φ を X 上の自己同相写像とみなす．R_φ には 3.2 節で説明した自然な étale 位相が入っている．$x \in X$ に対して $R_x \subset R_\varphi$ を次で定義する．

$$R_x = R_\varphi \setminus \{(\varphi^n(x), \varphi^m(x)), (\varphi^m(x), \varphi^n(x)) \mid n \leq 0,\ m \geq 1\}$$

すなわち, もし $y \notin R_\varphi[x]$ であれば $R_x[y] = R_\varphi[y]$ である．そして, x の R_φ-軌道 $R_\varphi[x]$ は x と $\varphi(x)$ との間で ‘分断’ され, 2 つの R_x-軌道 $R_x[x]$ と $R_x[\varphi(x)]$ の和になる．R_x は R_φ の開集合であることが容易に分かるので, 相対位相によって R_x も étale な同値関係になる．驚くべきことに, R_x はこの位相で AF 同値関係になる ([24, 19])．これは Cantor 極小系の軌道構造の研究の初期段階で発見された重要な事実であり, その後の研究の方向性を決定したと言える．$Y = \{x, \varphi(x)\}$ とおくと, 閉集合 Y は R_x-étale かつ R_x-thin であることがわかる．$Q = Y \times Y$ とおく．これら R_x, Y, Q は定理 15 の仮定を全て満たしているので, $R_x \vee Q$ が affable であることが結論される．構成より $R_\varphi = R_x \vee Q$ であるから, N=1 の場合の定理 14 が証明できたことになる．ちなみに,

$$\{f - f \circ \varphi \mid f \in C(X, \boldsymbol{Z})\} = \{f - f \circ \varphi \mid f \in C(X, \boldsymbol{Z}),\ f(x) = 0\}$$

が簡単に分かるので, $D(R_\varphi)$ と $D(R_x)$ は一致している．特に $D(R_\varphi)$ は次元群になる．次節で述べるように, N が 2 以上の場合にも R_φ の中に適当な AF 部分同値関係 R を構成するのだが, $D(R_\varphi) = D(R)$ となるようには出来ない．この事実が $N \geq 2$ の場合の $D(R_\varphi)$ の計算を困難なものにしている．

N=1 の場合の最も分かりやすい具体例を 1 つあげる．(X, φ) を 2.1 節で説明した odometer system とする．簡単のために $m_n = 2^n$ とする．X は $\boldsymbol{Z}/2^n\boldsymbol{Z}$ の射影的極限であるが, 次のようにして φ を $Y = \{0,1\}^{\boldsymbol{N}}$ 上の作用と思い直す．$(a_1, a_2, a_3, \dots) \in Y$ を

$$(a_1\bar{1},\ (a_1 + 2a_2)\bar{1},\ (a_1 + 2a_2 + 2^2a_3)\bar{1}, \dots) \in X$$

に送る写像を $\pi : Y \to X$ とする．Y に直積位相を入れておくと π は同相写像になる．$\psi = \pi^{-1} \circ \varphi \circ \pi$ とおくと, ψ は $(1, 0, 0, \dots)$ を '繰り上がりつきで足す' という Y 上の自己同相になる．$(1, 0, 0, \dots)$ を足しても大抵の場合は繰り上がりは有限回でストップするので, 数列のある項から先は変わらないことになる．繰り上がりが無限に続くのは $y = (1, 1, 1, \dots) \in Y$ に足したときで, $\psi(y) = (0, 0, 0, \dots)$ となる．R_ψ の部分同値関係 R_y を考える．y と $\psi(y)$ は R_y においては同値ではなく,

$$((a_n)_n, (b_n)_n) \in R_y \Leftrightarrow \exists k \in \boldsymbol{N}\ \forall n > k\ a_n = b_n$$

が成り立つことが分かる．つまり, ある項から先が一致しているような数列を同値とみなすのが R_y である．R_y の部分同値関係 R_k を

$$R_k = \{((a_n)_n, (b_n)_n) \in Y \times Y \mid a_n = b_n \text{ for all } n > k\}$$

で定めると, R_k は R_y のコンパクト開集合であることが分かる．さらに, $R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \dots$ かつ $R_y = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$ となるので, R_y は AF 同値関係となる．

4.3 大きな AF 部分同値関係の構成 (一般の場合)

N が一般の場合には Forrest が次の定理を示した ([11]).

定理 16 $\varphi : \boldsymbol{Z}^N \curvearrowright X$ を Cantor 極小 $\boldsymbol{Z}^N$ 系とする．R_φ の極小な部分同値関係 R と X の閉集合 Y で次の条件を満たすものが存在する．

(1) R は R_φ の開集合であり, 相対位相によって R は AF 同値関係.

(2) Y は R-thin である．

(3) $x \in X \setminus \bigcup_{n \in \boldsymbol{Z}^N} \varphi^n(Y)$ ならば $R[x] = R_\varphi[x]$ である．

(2) と (3) は, 測度がゼロになるような集合を除いて R と R_φ は一致している, と言っている．特に $M(R) = M(R_\varphi)$ が成り立つので, $D(R)$ から $D(R_\varphi)$ への自然な商写像 π は $\pi^{-1}(D(R_\varphi)^+ \setminus \{0\}) = D(R)^+ \setminus \{0\}$ を満たすことが分かる． これより, $D(R_\varphi)$ は weakly unperforated (すなわち $a \in D(R_\varphi)$, $k \in \boldsymbol{N}$, $ka > 0$ ならば $a > 0$) で Riesz の補間条件を満たす単純な順序群であることが示せる ($D(R_\varphi)$ が次元群になるとの記述が [11] にはあるが, [34] で示されたように一般には $D(R_\varphi)$ は捩れ元を持つので, 次元群にはならない)．N. C. Phillips はこの定理で構成された AF 部分同値関係 R を用いて, 接合積 C^* 環 $C(X) \rtimes_\varphi \boldsymbol{Z}^N$ が安定階数 1・実階数 0 を持つなどの結果を示した ([39]).

しかし, 吸収定理 (定理 15) を適用するには, 上の Forrest の定理はまだ十分ではない．R と R_φ との差のコントロールが甘いのである．この点をもう少し詳しく見るために, Forrest による AF 部分同値関係 $R \subset R_\varphi$ の構成を説明する．R_φ の中に '大きな'AF 部分同値関係を作りたいのだが, AF 同値関係はコンパクト同値関係の増大和であるから, R_φ の中に '大きな' コンパクト同値関係が作れればよい．X の clopen 部分集合 U を取り,

$$P_U(x) = \{n \in \boldsymbol{Z}^N \mid \varphi^n(x) \in U\}$$

とおく．$P_U(x)$ は x の U に対する hitting time と呼ばれる．U という部分集合が小さくなればなるほど (小ささを具体的に測りたければ X に距離を定めておいて U の直径を見ればよい), $\varphi^n(x)$ はなかなか U に入らない．つまり $P_U(x)$ はまばらな集合になっていく．この $P_U(x)$ に対してボロノイ分割を考える．各 $p \in P_U(x)$ に対して

$$T_U(x,p) = \{q \in \boldsymbol{R}^N \mid d(q,p) = d(q, P_U(x))\}$$

とする．ただし $d(\cdot,\cdot)$ はユークリッド距離である．$T_U(x,p)$ は $\boldsymbol{R}^N$ の閉凸多面体であり, ボロノイ領域と呼ばれる．$T_U(x,p)$ は $p \in P_U(x)$ に関して和を取ると $\boldsymbol{R}^N$ 全体になる．また相異なる $T_U(x,p_1)$ と $T_U(x,p_2)$ は内点を共有しない．このようなとき $\{T_U(x,p) \mid p \in P_U(x)\}$ は $\boldsymbol{R}^N$ のタイリングであると言う．一般には, ある $n \in \boldsymbol{Z}^N$ がある $T_U(x,p)$ の境界に属することが考えられるが, 面倒なので, そのような事は起こらないと仮定してしまおう．すると,

$$(\varphi^n(x), \varphi^m(x)) \in R_0 \Leftrightarrow \exists p \in P_U(x)\ n, m \in T_U(x,p)$$

と定めることによって, R_φ の部分同値関係 R_0 で開かつコンパクトなものが作れる．粗っぽく言えば, 1 つの $T_U(x,p)$ が 1 つの R_0-軌道に対応する．clopen 集合 U を小さくすれば, $P_U(x)$ はまばらになり, $T_U(x,p)$ は大きくなる．つまり各 R_0-軌道が大きくなる．どんどん小さくなっていくような clopen 部分集合の列 $U_1, U_2, U_3, \ldots$ を取れば, 各同値類がどんどん大きくなっていくようなコンパクト部分同値関係の列が得られる．それらが増大和を成すように調整をすることにより, 所望の AF 部分同値関係 R を構成できる．R_φ と R との差はボロノイ領域の境界の挙動によって生じる．2 点 $\varphi^n(x)$, $\varphi^m(x)$ は, ある段階でのボロノイ分割において同一のボロノイ領域に入れば R において同値になるが, どの段階でのボロノイ分割においても相異なるボロノイ領域に入れば R において同値にならない．ボロノイ領域が大きくなるにつれ, ボロノイ領域の境界付近に存在する $\boldsymbol{Z}^N$ の個数は相対的に少なくなる．これらの観察をもとに, AF 部分同値関係 R が定理 16 の (2)・(3) を満たすことを Forrest は示した．

吸収定理を適用できるような状況にするには, R の構成にさらに工夫が必要となる．R_φ と R の差はボロノイ領域の境界の挙動から生じることを既に見た．ボロノイ領域は $\boldsymbol{R}^N$ の閉凸多面体だから, その境界は k 次元 ($k = 0, 1, \ldots, N-1$) の面たちの組み合わせで書ける．これに対応して, 定理 16 に現れる閉集合 Y の中に, $Y = B_2 \supset B_3 \supset \cdots \supset B_{N+1}$ となるような閉集合 B_l を構成することが出来る．B_l は相異なる l 個のボロノイ領域の交わりに対応している．各 B_l に対して順番に定理 15 を計 N 回使うことにより, R_φ が R と軌道同型である事を示すというのが [18] の粗筋である．その際の問題点の 1 つは, 各 B_l に沿って定理 15 を順番に適用していく際に, 連続して適用しようとしても上手く行かないので, 各段階で (吸収定理の逆に相当する) 分裂定理 ([35, Theorem 2.1]) を間に挟まないといけない点である．もう 1 つは, Y を閉集合 B_l の包含列によって分解するためには通常のボロノイ分割では駄目で, その適当な変形が必要となる点である．ボロノイ分割の変形は数理工学の分野で様々な応用上の観点から研究されている．[5] で考察された ‘変形’ の N 次元版がここでは役に立った．ボロノイ分割全般に関する参考文献として [36] をあげておく．

5　タイリング空間

この節ではタイリング空間について簡単に紹介したい．タイリング空間は Cantor 集合上の同値関係と密接に関わっており, 定理 14 の証明においても重要な役割を果たす．タイリング空間やそこから生じる C^* 環などに関するサーベイとしては [26] が読みやすい．またもう少し詳しい文献としては [45] がある．

5.1　タイリング空間から生じる同値関係

$\boldsymbol{R}^N$ を N 次元ユークリッド空間とする．$p \in \boldsymbol{R}^N$ を中心とする半径 $r > 0$ の開球体を $B(p, r)$ と書く．$t \subset \boldsymbol{R}^N$, $p \in \boldsymbol{R}^N$ に対して $t + p = \{x + p \mid x \in t\}$ と書き, t の平行移動と呼ぶ．$\boldsymbol{R}^N$ の空でないコンパクト集合の族 T が, $\boldsymbol{R}^N$ の被覆であって, 相異なる $t, t' \in T$ が内点を共有しないとき, T を $\boldsymbol{R}^N$ のタイリングと呼び, $t \in T$ をタイルと呼ぶ．タイルは閉単位球に同相であることを要求するのが普通である．また, 予め有限個のコンパクト集合を指定しておき, タイルはそれらの平行移動に限るという制約を付けるという設定もある．単にタイルを $\boldsymbol{R}^N$ の部分集合と思うのではなくて何らかのラベル付けが成されている対象とみなす場合もある．

タイリングの集合に位相を入れたい．$\boldsymbol{R}^N$ の集合族 S と $p \in \boldsymbol{R}^N, r > 0$ に対して

$$S + p = \{s + p \mid s \in S\}, \qquad S \cap B(p, r) = \{s \in S \mid s \cap B(p, r) \neq \emptyset\}$$

とおく．T がタイリングなら $T + p$ もタイリングである．タイリング T_0 の近傍系を, 正の実数 $r > 0$ を用いて

$$\{T \mid (T + p) \cap B(0, r) = T_0 \cap B(0, r) \text{ for some } p \in B(0, r^{-1})\}$$

で定めることにより, 位相が定まる．この位相空間が完備距離空間であることや, $\boldsymbol{R}^N$ が平行移動によって自然に作用していることも簡単に分かる．T がタイリングのとき $\{T + p \mid p \in \boldsymbol{R}^N\}$ の (上述の位相による) 閉包を Ω_T と書き, T の hull と呼ぶ．$\boldsymbol{R}^N$ による平行移動を Ω_T に制限したものを φ_T と書く．φ_T は $\boldsymbol{R}^N$ の Ω_T への同相写像による作用である．Ω_T もしくは力学系 (Ω_T, φ_T) をタイリング空間と呼ぶ．可算群の作用が自由であることや極小であることの定義を既に与えたが, $\boldsymbol{R}^N$ の作用についてもその定義を踏襲する．

T をタイリングとする．T の局所的な形状が平行移動によるずれを除いて有限個しかないとき, T は finite local complexity を持つと言う．正確に言えば, 任意の $r > 0$ に対して

$$\{T \cap B(p, r) \mid p \in \boldsymbol{R}^N\} / \sim$$

が必ず有限集合ということである．ただし $S \sim S' \Leftrightarrow S = S' + p$ for some $p \in \boldsymbol{R}^N$ である．T が aperiodic であるとは, $T + p = T$ となるのは $p = 0$ のときに限ることを言う．T が次の性質を持つとき repetitive であると言う：任意の有限部分集合 $S \subset T$ に対してある $r > 0$ が存在し, どのような $p \in \boldsymbol{R}^N$ に対しても,

$$S' \subset T \cap B(p, r) \text{ かつ } S \sim S'$$

となる S' が見つかる．T のどの部分を取っても, ある一定の間隔以上の頻繁さでその形状が繰り返し現れる, というような意味である．次の命題が知られている．

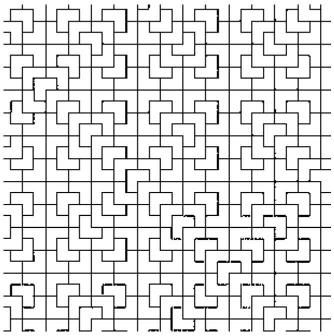

図 1：chair tiling

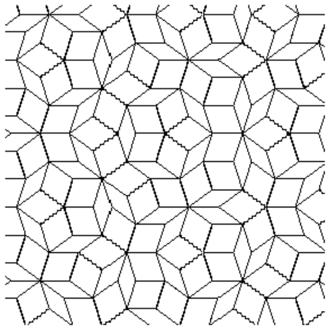

図 2：Penrose tiling

命題 17　(1) タイリング T が finite local complexity を持てば, Ω_T はコンパクトになる.

(2) さらに T が aperiodic かつ repetitive であれば, $\varphi_T : \boldsymbol{R}^N \curvearrowright \Omega_T$ は自由かつ極小な作用である.

以降, $\boldsymbol{R}^N$ のタイリング T で, finite local complexity・aperiodicity・repetitivity という 3 つの性質を持つものを考える (Penrose tiling を初めとしてこのようなタイリングの実例は豊富に知られている). 上の命題により (Ω_T, φ_T) はコンパクト距離空間の上の $\boldsymbol{R}^N$ の自由かつ極小な作用である. この力学系がどのようにして Cantor 集合と関わるのかを説明する. T が finite local complexity を持つことから $T/\sim$ は有限である. 有限集合 $S \subset T$ を代表元の集まりとする. 1 つ 1 つの $s \in S$ に対して s の内点 $\omega(s)$ を割り当てておく. s の平行移動 $s + p$ に対しては $\omega(s + p) = \omega(s) + p$ と決める. $\omega(s)$ は s の穴と呼ばれる. タイルに針で穴を開けたつもりである. s の情報を記憶させるために穴にラベルを付けておくことも出来る.

$$X = \{T' \in \Omega_T \mid \exists t \in T' \text{ such that } \omega(t) = 0\}$$

とおくと, X は Ω_T の閉集合で, さらに Cantor 集合になる. 原点に穴が開いているタイリングだけに限定すれば, $\boldsymbol{R}^N$ 方向の連続的な動きが封じられ, タイルをどのように配置するかという情報だけが生き残る. 有限の範囲内ではタイルの配置は有限通りなので, 有限集合の可算無限直積 (のようなもの) が現れ, それが Cantor 集合である. 作用 φ_T の横断方向に Cantor 集合が現れると言うこともできる.

$$R_T = \{(T', \varphi_T^p(T')) \mid T' \in X,\ p \in \boldsymbol{R}^N,\ \varphi_T^p(T') \in X\}$$

は X 上の同値関係となる. 作用 φ_T の情報を横断方向に写し取ったものが R_T である. φ_T の極小性から R_T の極小性が得られる. R_T には自然な位相が入り étale な同値関係となることも分かる.

定理 18 ([18])　上のようにして生じる極小な同値関係 R_T は affable である.

この定理の適用例を 2 つ挙げる. 図 1・図 2 はそれぞれ chair tiling・Penrose tiling と呼ばれるもので, どちらも substitution tiling と呼ばれるクラスに属する. substitution tiling に関しては [2] が詳しい. 一般に substitution tiling から生じる極小な同値関係は一意エルゴード的になることが知られている. その一意的な不変測度を μ とすると, chair tiling の場合には

$$\{\mu(U) \mid U \text{ は } X_T \text{ の clopen 部分集合}\} = \left\{ \frac{k}{2^n} \mid k = 0, 1, \ldots, 2^n,\ n \in \boldsymbol{N} \right\}$$

となり, Penrose tiling の場合には

$$\{\mu(U) \mid U \text{ は } X_T \text{ の clopen 部分集合 }\} = \{(a+b\lambda)/20 \mid a,b \in \boldsymbol{Z}\} \cap [0,1]$$

となる．ただし $\lambda = (\sqrt{5}-1)/2$ である．従って, 系 12・定理 14・定理 18 より, chair tiling から生じる同値関係は 2.1 節で $m_n = 2^n$ とした場合の odometer system と軌道同型になり, Penrose tiling から生じる同値関係は 2.2 節で説明した Denjoy sytem で適当なパラメータを設定したものと軌道同型になる．

5.2 タイリング空間のコホモロジー

タイリング空間 Ω_T は局所的には Cantor 集合と $\boldsymbol{R}^N$ の直積に同相であり, 特に弧状連結ではなく, 特異コホモロジーやホモトピー群は用を成さない．しかし Čech のコホモロジー $\check{H}^*(\Omega_T;\boldsymbol{Z})$ は意味を持ち (たとえば Ω_T は連結ではあるので $\check{H}^0 \cong \boldsymbol{Z}$ である), しかも具体的な計算例も知られている．Anderson–Putnam は substitution tiling の場合に, Ω_T が有限 CW 複体の射影的極限として表されることを示した ([2])．空間の射影的極限の Čech コホモロジーはČech コホモロジーの帰納的極限に同型であるから, この表示を用いて $\check{H}^*(\Omega_T)$ が計算できる．タイリング空間を有限 CW 複体の射影的極限に表す方法は, その後 [3] や [44] で任意のタイリングに対して一般化された．しかし実際に $\check{H}^*(\Omega_T)$ を計算しようとすると, 胞体の個数が膨大になることが多く, あまり容易ではない．前節に述べた 2 つの例については計算結果はよく知られており, chair tiling の場合には $\check{H}^0 \cong \boldsymbol{Z}$, $\check{H}^1 \cong \boldsymbol{Z}[1/2]^2$, $\check{H}^2 \cong \boldsymbol{Z}[1/2]^3$ で, Penrose tiling の場合には $\check{H}^0 \cong \boldsymbol{Z}$, $\check{H}^1 \cong \boldsymbol{Z}^5$, $\check{H}^2 \cong \boldsymbol{Z}^8$ となる．また, 射影法 (projection method) によって生じるタイリングに対しては, コホモロジーを計算する別の方法が知られている ([12, 13, 15])．このクラスのタイリングは, 固体物理学における準結晶のモデルとして特によく研究されている．

タイリング空間に関する重要な結果として次の Sadun–Williams の定理がある ([46])．

定理 19 T が $\boldsymbol{R}^N$ のタイリングで, finite local complexity・aperiodicity・repetitivity という 3 つの性質を持つとする．このとき, ある Cantor 極小 $\boldsymbol{Z}^N$ 系 (X,φ) が存在して, Ω_T は (X,φ) の懸垂空間 (suspension space) と同相になる．

(X,φ) の懸垂空間とは, 直積空間 $X \times \boldsymbol{R}^N$ を

$$(x,p) \sim (x',p') \Leftrightarrow \exists n \in \boldsymbol{Z}^N \ \ \varphi^n(x) = x',\ \ p - n = p'$$

で定義される同値関係 $\sim$ で割った商空間をいう．この定理により, タイリング空間 Ω_T の Čech のコホモロジーは, $C(X,\boldsymbol{Z})$ を係数とする群コホモロジー $H^*(\boldsymbol{Z}^N, C(X,\boldsymbol{Z}))$ と同型であることになる．しかし $H^*(\boldsymbol{Z}^N, C(X,\boldsymbol{Z}))$ を計算する一般的な方法は知られていない．一部の文献に $\check{H}^*(\Omega_T)$ あるいは $H^*(\boldsymbol{Z}^N, C(X,\boldsymbol{Z}))$ がねじれ元を含まないとの記述があるが, [15, 34] で示されたように一般にはねじれ元が存在する．

6 $\boldsymbol{Z}$ 作用の場合

Cantor 極小 $\boldsymbol{Z}$ 系に対しては (下に述べる) モデル定理などを利用して, 軌道同型による分類の他にも, いくつかの研究が行われている．それらを簡単に紹介してこの小文を終わりとしたい．

(V,E) を 3.3 節で説明した Bratteli 図式とする． (V,E) は単純で, その infinite path space が

Cantor 集合であるとする．各 $v \in V$ に対して $r^{-1}(v)$ は辺の有限集合であるが, そこに線形順序が与えられているとしよう．さらに 2 点 $p, q \in X_{(V,E)}$ が存在して

$$\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X_{(V,E)} \mid x_n \text{ is maximum in } r^{-1}(r(x_n)) \ \forall n\} = \{p\}$$

$$\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X_{(V,E)} \mid x_n \text{ is minimum in } r^{-1}(r(x_n)) \ \forall n\} = \{q\}$$

が成り立っているとする．実はこのような対象から Cantor 極小 $\boldsymbol{Z}$ 系を定めることが出来る．まず $X_{(V,E)}$ に次のようにして順序を入れる．

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} < (y_n)_{n=1}^{\infty} \Leftrightarrow m{=}\max\{n \in \boldsymbol{N} \mid x_n{\neq}y_n\} \text{ is well-defined and } x_m{<}y_m$$

$x \in X_{(V,E)} \setminus \{p\}$ に対しては, x よりも大きい元の中で最小のもの x' が定まるので, $\varphi(x) = x'$ とし, p に対しては $\varphi(p) = q$ と決める．するとこの φ は $X_{(V,E)}$ 上の極小な自己同相写像となることが分かる．つまり $(X_{(V,E)}, \varphi)$ は Cantor 極小 $\boldsymbol{Z}$ 系である．φ は Bratteli–Vershik 写像と呼ばれる．逆に, 任意の Cantor 極小 $\boldsymbol{Z}$ 系はある $X_{(V,E)}$ の上の Bratteli–Vershik 写像と位相共役になる ([24])．モデル定理と呼ばれるこの結果を利用して, Giordano–Putnam–Skau は次を示した ([19])．

定理 20 $i = 1, 2$ に対して (X_i, φ_i) を Cantor 極小 $\boldsymbol{Z}$ 系とする．以下は同値．

(1) (X_1, φ_1) と (X_2, φ_2) が強軌道同型．

(2) $(D(R_{\varphi_1}), D(R_{\varphi_1})^+, [1_{X_1}])$ と $(D(R_{\varphi_1}), D(R_{\varphi_1})^+, [1_{X_2}])$ が同型．

強軌道同型とは, ある位相同相 $h : X_1 \to X_2$ と $n : X_1 \to \boldsymbol{Z}$, $m : X_2 \to \boldsymbol{Z}$ が存在して $h(\varphi_1(x)) = \varphi_2^{n(x)}(h(x))$, $h^{-1}(\varphi_2(y)) = \varphi_1^{m(y)}(h^{-1}(y))$ が成り立ち (ここまでが軌道同型), さらに n も m も高々 1 点を除いて連続となるときをいう．詳しくは触れないが, 上の定理の 2 条件は, 対応する接合積 C^* 環が同型になる事とも同値である．強軌道同型と位相エントロピーは互いに無関係な情報と言ってよく, 任意の強軌道同型類の中に, 任意の値を位相エントロピーとして取る Cantor 極小 $\boldsymbol{Z}$ 系が存在する ([47, 48])．

(X, φ) が Cantor 極小 $\boldsymbol{Z}$ 系で μ が $M(R_\varphi)$ の端点とすると, φ は確率空間 (X, μ) 上の保測エルゴード変換とみなせる．逆に, 確率空間上の保測エルゴード変換が 1 つ与えられたとき, それと同型になるような (X, φ) と $\mu \in M(R_\varphi)$ の組を見つけることを位相的実現と呼ぶ．N. Ormes は, 与えられた強軌道同型類の中から (X, φ) を見つけることができるための必要十分条件を求めた ([37])．さらに, 可算無限個の保測エルゴード変換を同時に実現する問題についても, 肯定的な解決が得られている ([27])．

(X, φ) を Cantor 極小 $\boldsymbol{Z}$ 系とする．任意の $x \in X$ に対し $\gamma(x) \in R_\varphi[x]$ となるような同相写像 $\gamma : X \to X$ の全体は群をなす．これを $[\varphi]$ と書き φ の充足群と呼ぶ．$\gamma \in [\varphi]$ に対して $\gamma(x) = \varphi^{n(x)}(x)$ となる $n : X \to \boldsymbol{Z}$ が唯一に定まるが, この n が連続となるような γ の全体を $[[\varphi]]$ と書き φ の位相充足群と呼ぶ．充足群は非可算群であるが位相充足群は可算群である．次が成り立つ ([20])．

定理 21 $i = 1, 2$ に対して (X_i, φ_i) を Cantor 極小 $\boldsymbol{Z}$ 系とする．

(1) $[\varphi_1]$ と $[\varphi_2]$ が群として同型 $\Leftrightarrow$ φ_1 と φ_2 が軌道同型

(2) $[[\varphi_1]]$ と $[[\varphi_2]]$ が群として同型 $\Leftrightarrow$ φ_1 は φ_2 または φ_2^{-1} に位相共役

$[[\varphi]]$ の交換子群 $[[\varphi]]'$ は単純群であり, $[[\varphi]]/[[\varphi]]' \cong \boldsymbol{Z} \oplus (D(R_\varphi) \otimes \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})$ である事が知られている ([31])．また, $[[\varphi]]'$ が有限生成になる事と φ が拡大的であることが同値である ([31])．$[\varphi]$ の交換

子群 $[\varphi]'$ が単純である事は [4] で示された.

Cantor 集合 X から 1 点を取り除いた空間 $X_0 = X \setminus \{y\}$ は, 局所コンパクトかつ非コンパクト・距離付け可能・完全不連結・孤立点を持たない, という 4 つの性質を持つ位相空間として特徴付けられる. X_0 は直積空間 $X \times \boldsymbol{N}$ と同相である. X_0 上の極小な同相写像 φ に関しても軌道同型による分類が得られているので, それを紹介する. X_0 上の整数値連続関数でコンパクト台を持つものの全体を $C_c(X_0, \boldsymbol{Z})$ とおく. X_0 上の (確率測度とは限らない) φ-不変測度の全体を M_φ とし, $C_c(X_0, \boldsymbol{Z})$ の

$$\left\{ f \in C_c(X_0, \boldsymbol{Z}) \mid \int_{X_0} f \, d\mu = 0 \text{ for all } \mu \in M_\varphi \right\}$$

による商群を D_φ とする. f の D_φ における同値類を $[f]$ とし,

$$D_\varphi^+ = \{[f] \in D \mid f(x) \geq 0 \text{ for all } x \in X_0\}$$

とすれば, (D_φ, D_φ^+) は次元群になる. これに $\Sigma_\varphi = \{[f] \in D \mid 0 \leq f(x) \leq 1 \text{ for all } x \in X_0\}$ を加えた 3 つ組 $(D_\varphi, D_\varphi^+, \Sigma_\varphi)$ が, 極小同相写像 φ の軌道同型に関する完全不変量となる ([30]).

文　献

[1] S. Adams, An equivalence relation that is not freely generated, Proc. Amer. Math. Soc. 102 (1988), 565–566.

[2] J. Anderson and I. F. Putnam, Topological invariants for substitution tilings and their associated C^*-algebras, Ergodic Theory Dynam. Systems 18 (1998), 509–537.

[3] J. Bellissard, R. Benedetti and J.-M. Gambaudo, Spaces of tilings, finite telescopic approximations and gap-labeling, Comm. Math. Phys. 261 (2006), 1–41.

[4] S. Bezuglyi and K. Medynets, Full groups, flip conjugacy, and orbit equivalence of Cantor minimal systems, Colloq. Math. 110 (2008), 409–429.

[5] Siu-Wing Cheng, Tamal K. Dey, Herbert Edelsbrunner, Michael A. Facello and Shang-Hua Teng, Sliver exudation, J. ACM 47 (2000), 883–904.

[6] A. Connes, J. Feldman and B. Weiss, An amenable equivalence relation is generated by a single transformation, Ergodic Theory Dynamical Systems 1 (1981), 431–450.

[7] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin and Ya. G. Sinai, Ergodic theory, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 245. Springer-Verlag, New York, 1982.

[8] H. A. Dye, On groups of measure preserving transformation. I, Amer. J. Math. 81 (1959), 119–159.

[9] E. G. Effros, D. Handelman and C. L. Shen, Dimension groups and their affine representations, Amer. J. Math. 102 (1980), 385-407.

[10] G. A. Elliott, On the classification of inductive limits of sequences of semisimple finite-dimensional algebras, J. Algebra 38 (1976), 29–44.

[11] A. Forrest, A Bratteli diagram for commuting homeomorphisms of the Cantor set, Internat. J. Math. 11 (2000), 177–200.

[12] A. H. Forrest, J. R. Hunton and J. Kellendonk, Cohomology of canonical projection tilings, Comm. Math. Phys. 226 (2002), 289–322.

[13] A. H. Forrest, J. R. Hunton and J. Kellendonk, Topological invariants for projection method patterns, Mem. Amer. Math. Soc. 159 (2002), no. 758.

[14] A. Furman, Orbit equivalence rigidity, Ann. of Math. 150 (1999), 1083–1108.

[15] F. Gähler, J. R. Hunton and J. Kellendonk, Torsion in tiling homology and cohomology, preprint. math-ph/0505048.

[16] T. Giordano, H. Matui, I. F. Putnam and C. F. Skau, Orbit equivalence for Cantor minimal $\boldsymbol{Z}^2$-systems, J. Amer. Math. Soc. 21 (2008), 863–892.

[17] T. Giordano, H. Matui, I. F. Putnam and C. F. Skau, The absorption theorem for affable equivalence relations, Ergodic Theory Dynam. Systems 28 (2008), 1509–1531.

[18] T. Giordano, H. Matui, I. F. Putnam and C. F. Skau, Orbit equivalence for Cantor minimal $\boldsymbol{Z}^d$-systems, Invent. Math. 179 (2010), 119–158.

[19] T. Giordano, I. F. Putnam and C. F. Skau, Topological orbit equivalence and C^*-crossed products, J. Reine Angew. Math. 469 (1995), 51–111.

[20] T. Giordano, I. F. Putnam and C. F. Skau, Full groups of Cantor minimal systems. Israel J. Math. 111 (1999), 285–320.

[21] T. Giordano, I. F. Putnam and C. F. Skau, Affable equivalence relations and orbit structure of Cantor dynamical systems, Ergodic Theory Dynam. Systems 24 (2004), 441–475.

[22] T. Giordano, I. F. Putnam and C. F. Skau, The orbit structure of Cantor minimal $\boldsymbol{Z}^2$-systems, Operator Algebras: The Abel Symposium 2004, 145–160, Abel Symp., 1, Springer, Berlin, 2006.
[23] R. Gjerde and Ø. Johansen, Bratteli-Vershik models for Cantor minimal systems associated to interval exchange transformations, Math. Scand. 90 (2002), 87–100.
[24] R. H. Herman, I. F. Putnam and C. F. Skau, Ordered Bratteli diagrams, dimension groups and topological dynamics, Internat. J. Math. 3 (1992), 827–864.
[25] G. Hjorth and M. Molberg, Free continuous actions on zero-dimensional spaces, Topology Appl. 153 (2006), 1116–1131.
[26] J. Kellendonk and I. F. Putnam, Tilings, C^*-algebras, and K-theory, Directions in Mathematical Quasicrystals, 177–206, CRM Monogr. Ser. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
[27] I. Kornfeld and N. Ormes, Topological realizations of families of ergodic automorphisms, multitowers and orbit equivalence, Israel J. Math. 155 (2006), 335–357.
[28] W. Krieger, On ergodic flows and the isomorphism of factors, Math. Ann. 223 (1976), 19–70.
[29] W. Krieger, On a dimension for a class of homeomorphism groups, Math. Ann. 252 (1979/80), 87–95.
[30] H. Matui, Topological orbit equivalence of locally compact Cantor minimal systems, Ergodic Theory Dynam. Systems 22 (2002), 1871–1903.
[31] H. Matui, Some remarks on topological full groups of Cantor minimal systems, Internat. J. Math. 17 (2006), 231–251.
[32] H. Matui, Affability of equivalence relations arising from two-dimensional substitution tilings, Ergodic Theory Dynam. Systems 26 (2006), 467–480.
[33] H. Matui, A short proof of affability for certain Cantor minimal $\boldsymbol{Z}^2$-systems, Canad. Math. Bull. 50 (2007), 418–426.
[34] H. Matui, Torsion in coinvariants of certain Cantor minimal $\boldsymbol{Z}^2$-systems, Trans. Amer. Math. Soc. 360 (2008), 4913–4928.
[35] H. Matui, An absorption theorem for minimal AF equivalence relations on Cantor sets, J. Math. Soc. Japan 60 (2008), 1171–1185.
[36] A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara and S. N. Chiu, Spatial tessellations: concepts and applications of Voronoi diagrams, with a foreword by D. G. Kendall (second edition), Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2000.
[37] N. Ormes, Strong orbit realization for minimal homeomorphisms, J. Anal. Math. 71 (1997), 103–133.
[38] D. S. Ornstein and B. Weiss, Ergodic theory of amenable group actions I: The Rohlin lemma, Bull. Amer. Math. Soc. 2 (1980), no. 1, 161–164.
[39] N. C. Phillips, Crossed products of the Cantor set by free minimal actions of $\boldsymbol{Z}^d$, Comm. Math. Phys. 256 (2005), no. 1, 1–42.
[40] I. F. Putnam, The C^*-algebras associated with minimal homeomorphisms of the Cantor set, Pacific J. Math. 136 (1989), no. 2, 329–353.
[41] I. F. Putnam, Orbit equivalence of Cantor minimal systems: a survey and a new proof, to appear in Expo. Math.
[42] I. F. Putnam, K. Schmidt and C. F. Skau, C^*-algebras associated with Denjoy homeomorphisms of the circle, J. Operator Theory, 16 (1986), 99-126.
[43] J. Renault, A Groupoid Approach to C^*-algebras, Lecture Notes in Mathematics 793, Springer, Berlin, 1980.
[44] L. Sadun, Tiling spaces are inverse limits, J. Math. Phys. 44 (2003), 5410–5414.
[45] L. Sadun, Topology of tiling spaces, University Lecture Series 46, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
[46] L. Sadun and R. F. Williams, Tiling spaces are Cantor set fiber bundles, Ergodic Theory Dynam. Systems 23 (2003), 307–316.
[47] F. Sugisaki, The relationship between entropy and strong orbit equivalence for the minimal homeomorphisms. II. Tokyo J. Math. 21 (1998), 311–351.
[48] F. Sugisaki, The relationship between entropy and strong orbit equivalence for the minimal homeomorphisms. I. Internat. J. Math. 14 (2003), 735–772.

(年 月 日提出)
(まつい ひろき・千葉大学大学院理学研究科)