

コントロール集合上の極小力学系の 軌道同型による分類

松井宏樹

千葉大学大学院理学研究院

親川晃一

京都大学大学院理学研究科修士課程

概要

これは、2019年12月に京都大学理学部数学教室において行われた松井による集中講義の、講義ノートである。コントロール集合上の極小 \mathbb{Z} 系および AF 同値関係を軌道同型で分類することを目標とする。

1 Étale 同値関係

コンパクト・距離付け可能・totally disconnected (全ての連結成分が1点集合)・perfect (孤立点がない) である位相空間を、コントロール集合と呼ぶ。任意のコントロール集合は互いに同相である。開かつ閉な集合を clopen set と呼ぶ。コントロール集合の位相は clopen subsets で生成されている。

有限集合 $\{0, 1\}$ の可算無限直積 $X := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ はコントロール集合である。 $n \in \mathbb{N}$, $p \in \{0, 1\}^n$ に対して

$$C(p) := \{x \in X \mid (x(1), x(2), \dots, x(n)) = p\}$$

とおくと $C(p)$ は clopen set であり、 X の位相は $C(p)$ たちで生成されている。特に任意の clopen set は、 $C(p)$ という形の clopen set の有限和で書ける。

Definition 1.1. $\varphi : \Gamma \curvearrowright X$ を離散群 Γ のコントロール集合 X への同相写像による作用とする。

- (1) 任意の $x \in X$ に対して、軌道 $\{\varphi^\gamma(x) \mid \gamma \in \Gamma\}$ が X で稠密であるとき、 φ は極小であるという。
- (2) 任意の $x \in X$ と単位元でない $\gamma \in \Gamma$ に対して、 $\varphi^\gamma(x) \neq x$ であるとき、 φ は自由であるという。

φ が極小であることと、 φ 不変な閉集合が \emptyset と X に限ることとは、同値である (確か

めよ(1)a)。 $\Gamma = \mathbb{Z}$ の場合がこの講義の主たる対象である。

Example 1.2 (odometer). $X := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ とする。 $\varphi: X \rightarrow X$ を、 $(1, 0, 0, \dots)$ による繰り上がり付き足し算とする。例えば

$$\varphi(1, 1, 0, 0, 1, 0, \dots) = (0, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$$

$$\varphi(1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$$

である。 φ が引き起こす \mathbb{Z} の作用は、自由かつ極小である (確かめよ(2)a)。

Definition 1.3. $\varphi: \Gamma \curvearrowright X$ が自由な作用のとき、

$$R_\varphi := \{(\varphi^\gamma(x), x) \in X \times X \mid x \in X, \gamma \in \Gamma\}$$

と定め、 φ に付随する同値関係と呼ぶ。 R_φ の位相は、 $R_\varphi \ni (\varphi^\gamma(x), x) \mapsto (\gamma, x) \in \Gamma \times X$ という全単射によって、 $\Gamma \times X$ の積位相を移したものと定める。

X を compact, metrizable, totally disconnected space とする。 $R \subset X \times X$ を X 上の同値関係とする。 $x \in X$ の同値類

$$R[x] := \{y \in X \mid (x, y) \in R\}$$

を x の軌道という。以降、各軌道 $R[x]$ が高々可算であるものを考える。各軌道 $R[x]$ が X で稠密であるとき、 R は極小であるという。

Definition 1.4. R に局所コンパクトかつ距離付け可能な位相が定まっていて、次の条件が成り立つとき、 R は étale 同値関係であるという。

- (1) $(x, y) \mapsto (y, x)$ は連続。
- (2) $R^{(2)} \ni ((x, y), (y, z)) \mapsto (x, z) \in R$ は連続 (ただし $R^{(2)} := \{((x, y), (y, z)) \in R \times R \mid x, y, z \in X\}$ とする)。
- (3) $r: (x, y) \mapsto x$ は局所同相写像 (つまり、各 (x, y) に対してその開近傍 $U \subset R$ が存在し、 $r(U)$ が X の開集合であって、 $r|_U$ が $r(U)$ への同相写像になる)。

(1) より、写像 $s: (x, y) \mapsto y$ に対しても (3) と同じことが成り立つ。従って、各 (x, y) の開近傍 U であって、 $r|_U$ も $s|_U$ も同相写像であるものが取れる。すると、 $(r|_U) \circ (s|_U)^{-1}$ は $s(U)$ から $r(U)$ への同相写像となる。 X はカントール集合だから、 U を小さく取りなすことで、 U は clopen であるとしてよい。このような U を、簡単のため、bisection と呼ぶ。 R の位相は bisection からなる基底を持つと言える。また、対角集合 $\{(x, x) \in R \mid x \in X\}$ は R において clopen である (確かめよ(3)b)。

自由な作用 $\varphi : \Gamma \curvearrowright X$ から生じる R_φ は、étale 同値関係の典型例である。 $A \subset X$ が clopen で $\gamma \in \Gamma$ のとき、 $\{(\varphi^\gamma(x), x) \mid x \in A\}$ は bisection である。

Definition 1.5. $i = 1, 2$ に対して、 R_i をコントロール集合 X_i 上の étale 同値関係とする。

- (1) 同相写像 $h : X_1 \rightarrow X_2$ が存在して、 $h \times h$ が R_1 から R_2 への同相写像を導くとき、 R_1 と R_2 とは連続軌道同型（或いは単に同型）であるという。
- (2) 同相写像 $h : X_1 \rightarrow X_2$ が存在して、 $(h \times h)(R_1) = R_2$ となるとき、 R_1 と R_2 とは軌道同型であるという。

何らかの設定の下で極小な R を（軌道）同型で分類することが、主たる興味である。

Example 1.6. (X, φ) を Example 1.2 で定めた odometer system とし、 R_φ を φ に付随する同値関係とする。

$$R := \{((x_n)_n, (y_n)_n) \in X \times X \mid \exists N \in \mathbb{N} [n \geq N \Rightarrow x_n = y_n]\}$$

とおくと、 R も同値関係であり、 $R \subset R_\varphi$ である。この R は AF 同値関係（後述）になっている。 R_φ と R とはほとんど一致している。すなわち、 $x := (1, 1, 1, \dots) \in X$ とするとき、

$$R_\varphi[y] = R[y] \quad \forall y \notin R_\varphi[x]$$

$$R_\varphi[x] = R[x] \sqcup R[\varphi(x)]$$

が成り立っている。実は、 R_φ は R に軌道同型であることが知られている。Theorem 5.7 で示す。

R を X 上の étale 同値関係とする。 X 上のボレル確率測度 μ であって、任意の bisection $U \subset R$ に対して

$$\mu(r(U)) = \mu(s(U))$$

を満たすものを、 R 不変測度といい、その全体を $M(R)$ と書く。これは、群作用に対する不変測度の概念の一般化になっている。 R が minimal ならば、任意の空でない clopen set $A \subset X$ に対して、

$$\inf\{\mu(A) \mid \mu \in M(R)\} > 0$$

となる（確かめよ(4)b）。

X 上の \mathbb{Z} 値連続関数の全体 $C(X, \mathbb{Z})$ を、各点による足し算によってアーベル群とみなす。

Definition 1.7. $C(X, \mathbb{Z})$ の

$$\langle 1_{r(U)} - 1_{s(U)} \mid U \subset R \text{ は bisection} \rangle$$

による商を $D(R)$ とし、 $f \in C(X, \mathbb{Z})$ の同値類を $[f]$ と書く。

$$D^+(R) := \{[f] \in D(R) \mid f \geq 0\}$$

とおく。

$C(X, \mathbb{Z})$ の

$$\left\{ f \mid \int_X f d\mu = 0 \quad \forall \mu \in M(R) \right\}$$

による商を $D_m(R)$ とし、 f の同値類を $[f]_m$ と書く。同様に

$$D_m^+(R) := \{[f]_m \in D_m(R) \mid f \geq 0\}$$

とおく。

$M(R) \neq \emptyset$ のとき、 $D(R)$ から $D_m(R)$ への自然な全射準同型が存在している。

$D(R_1)$ から $D(R_2)$ への同型写像 π が存在して、 $\pi(D^+(R_1)) = D^+(R_2)$, $\pi([1_{X_1}]) = [1_{X_2}]$ が成り立つとき、 $(D(R_1), D^+(R_1), [1_{X_1}])$ は $(D(R_2), D^+(R_2), [1_{X_2}])$ に同型であるという。 D_m についても同様。

Example 1.8. (X, φ) を Example 1.2 で定めた odometer system とし、 R_φ を考える。

$$(D(R_\varphi), D^+(R_\varphi), [1_X]) \cong (\mathbb{Z}[1/2], \mathbb{Z}[1/2] \cap [0, \infty), 1)$$

であることがわかる。また、 $M(R_\varphi)$ は 1 点集合であり、 $D(R_\varphi)$ から $D_m(R_\varphi)$ への自然な全射は同型になっている。

Lemma 1.9. $i = 1, 2$ に対して、 R_i をカントール集合 X_i 上の étale 同値関係とする。 R_1 と R_2 とが軌道同型ならば、

$$(D_m(R_1), D_m^+(R_1), [1_{X_1}]_m) \cong (D_m(R_2), D_m^+(R_2), [1_{X_2}]_m)$$

である。

Proof. 同相写像 $h : X_1 \rightarrow X_2$ であって、 $(h \times h)(R_1) = R_2$ となるものが存在する。 $\mu \in M(R_1)$ とし、 $h_*(\mu) \in M(R_2)$ を示す。

R_1 は可算個の bisection U_1, U_2, \dots の和として表せる。 U_n を $U_n \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_{n-1})$ に取り換えることにより、 U_n は互いに交わらないとしてよい。 $V \subset R_2$ を bisection とす

る。 $\mu(h^{-1}(r(V))) = \mu(h^{-1}(s(V)))$ を示したい。 V は $X_2 \times X_2$ において closed だから、 $V' := (h \times h)^{-1}(V)$ は R_1 においても closed である。 ゆえに

$$\begin{aligned} \mu(h^{-1}(r(V))) &= \mu(r(V')) = \sum_n \mu(r(V' \cap U_n)) \\ &= \sum_n \mu(s(V' \cap U_n)) = \mu(s(V')) = \mu(h^{-1}(s(V))) \end{aligned}$$

となる。

$\nu \in M(R_2)$ ならば $h_*^{-1}(\nu) \in M(R_1)$ であることも、同様にわかる。従って結論を得る。 \square

Remark 1.10 (章末のひとつ)。カントール集合上の étale 同値関係という概念が本格的に登場したのは Giordano-Putnam-Skau の論文 [9] であるが、定義としては既に、Renault の本 [17] において r -discrete groupoid として与えられている。étale 同値関係のあいだの同型・軌道同型の定義は [9, Definition 2.4] で与えられている。同型や軌道同型の不変量としての $D(R)$ や $D_m(R)$ は、特別な設定で既に [8] に現れているが、明確に定義が与えられたのは Giordano-Putnam-Skau のサーベイ論文 [10] が最初かも知れない。カントール極小系に関するサーベイとしては、このほかに、Putnam によるもの [16] や松井によるもの [14] (日本語) がある。

2 AF 同値関係

Definition 2.1. (V, E) を有向グラフとし、 $r : E \rightarrow V$, $s : E \rightarrow V$ を終点・始点を指す写像とする。次の条件が成り立っているとき、 (V, E) を Bratteli diagram と呼ぶ。

- (1) V は、空でない有限集合 V_0, V_1, \dots の非交叉和であり、 $V_0 = \{*\}$ (root) である。
- (2) E は、空でない有限集合 E_1, E_2, \dots の非交叉和である。
- (3) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $s(E_n) = V_{n-1}$, $r(E_n) = V_n$ である。

(V, E) が BD のとき、

$$X_E := \left\{ (x(n))_n \in \prod_{n \in \mathbb{N}} E_n \mid r(x(n)) = s(x(n+1)) \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

とおき、 (V, E) の infinite path space と呼ぶ。 X_E には、 $\prod_{n \in \mathbb{N}} E_n$ の直積位相からの相對位相を入れる。

X_E は compact, metrizable, totally disconnected になる。

Definition 2.2. (V, E) を BD とする。各 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$R_{E,n} := \{(x, y) \in X_E \times X_E \mid x(i) = y(i) \quad \forall i > n\}$$

$$R_E := \bigcup_n R_{E,n}$$

とおく。 $R_{E,n}$ には $X_E \times X_E$ からの相対位相を入れる。 R_E には inductive limit topology を入れる (すなわち、 $A \subset R_E$ が開 $\iff A \cap R_{E,n}$ が $R_{E,n}$ で開)。このような R_E を AF 同値関係と呼ぶ。

$x = (x(i))_i \in X_E$ に対し、 $\#(R_{E,n}[x])$ は、 $* \in V_0$ から $r(x(n)) \in V_n$ へ至る path の本数に等しい。つまり、各同値類は有限集合である。 R_E は、このような有限な同値関係の増大列

$$R_{E,1} \subset R_{E,2} \subset R_{E,3} \subset \dots$$

の和となっている。

Example 2.3. 全ての n に対して $\#V_n = 1$, $\#E_n = 2$ であるような (V, E) を考えよう (図示する)。明らかに、 X_E は $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ と同一視できる。このとき AF 同値関係 R_E は、Example 1.6 における R に一致している。

Proposition 2.4. AF 同値関係 R_E は étale である。

Proof. $R_{E,n}$ が étale であることはすぐにわかる。 $R_{E,n}$ が $R_{E,n+1}$ の中で open であることも分かる。このことから、 R_E が étale であることが従う。(確かめよ(5)b) \square

$n < m$ のとき、 V_n から V_m への path の全体を $E_{n,m}$ とし、 $v \in V_n$ から $w \in V_m$ への path の全体を $E(v, w)$ とおく。 $p \in E_{0,n}$ に対して

$$C(p) := \{x \in X_E \mid (x(1), x(2), \dots, x(n)) = p\}$$

とおく。 $C(p)$ は clopen である。 $p, q \in E_{0,n}$ が $r(p) = r(q)$ を満たすとき (path に対しても r, s で終点・始点を表す)、

$$U(p, q) := \{(x, y) \in R_{E,n} \mid x \in C(p), y \in C(q)\}$$

とおくと、 $U(p, q)$ は bisection である。このような $U(p, q)$ たちは R_E の位相の基底をなしている (確かめよ(6)b)。

Remark 2.5 (AF 同値関係の抽象的な定義). (1) étale 同値関係 R が、部分同値関係の増大列

$$R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \dots$$

の和で書けていて、 R_n が compact かつ open であるならば、実は、 R は AF 同値関係となる（つまり、ある (V, E) があって、 R と R_E は同型になる）。

(2) R が AF 同値関係であって、 $R' \subset R$ が open subrelation ならば、 R' も AF 同値関係になることが知られている。

Proposition 2.6. (V, E) を BD とするとき、次は同値。

- (1) 任意の $m \in \mathbb{N}$, $v \in V_m$ に対して、ある $n > m$ が存在して、任意の $w \in V_n$ に対して、 $E(v, w) \neq \emptyset$ である。
- (2) R_E は minimal である。

Proof. (1) \Rightarrow (2) $x \in X_E$ とし、 $U \subset X_E$ を空でない開集合とする。 $y \in U$ とする。 U は開集合だから、ある m が存在して

$$\{(z(i))_i \in X_E \mid z(i) = y(i) \quad \forall i \leq m\} \subset U$$

となる。(1) の条件を m と $r(y(m))$ に用いて、 $n > m$ を得る。すると、 $r(y(m))$ から $s(x(n+1))$ へと至る path (p_{m+1}, \dots, p_n) が存在する。

$$x' := (y(1), \dots, y(m), p_{m+1}, \dots, p_n, x(n+1), x(n+2), \dots) \in X_E$$

であって、 $(x, x') \in R_{E,n} \subset R$, $x' \in U$ であるから、これで $R[x]$ が X_E で dense であることが言えた。従って R は minimal である。

(2) \Rightarrow (1) $m \in \mathbb{N}$, $v \in V_m$ とする。背理法による。 $n > m$ に対し

$$V'_n := \{w \in V_n \mid v \text{ から } w \text{ への path は存在しない}\}$$

とおく。 $e \in E_n$ に対し、 $r(e_n) \in V'_n$ ならば $s(e_n) \in V'_n$ である。ゆえに、 m から先は V'_n の頂点のみを通る infinite path x が存在する。つまり、 $n > m$ のとき $r(x(n)) \in V'_n$ である。(2) より $R[x]$ は dense だから、 $y \in R[x]$ であって、 $r(y(m)) = v$ となるものが存在する。 $(x, y) \in R$ なのだから、十分大きい n に対して常に $x(n) = y(n)$ である。 $r(y(m)) = v$ と $r(y(n)) \in V'_n$ を結ぶ path が存在することになるから、矛盾である。□

上の主張の同値な 2 条件を満足する BD を simple であるという。 (V, E) が simple ならば、 X_E は有限集合またはカントール集合である。

次に、AF 同値関係 R_E に対して、 $D(R_E)$ を計算したい。 A が有限集合のとき、 A 上の自由アーベル群を $\mathbb{Z}A$ と書き、その元を

$$\sum_{a \in A} n_a a, \quad n_a \in \mathbb{Z}$$

などと書く。全ての係数が非負であるような元のなす集合を \mathbb{Z}^+A と書く。

A, B, C を有限集合とし、 $s : C \rightarrow A, r : C \rightarrow B$ を写像とする。準同型 $\alpha_C : \mathbb{Z}A \rightarrow \mathbb{Z}B$ を

$$\alpha_C(a) := \sum_{c \in s^{-1}(a)} r(c)$$

によって定めることが出来る。明らかに $\alpha_C(\mathbb{Z}^+A) \subset \mathbb{Z}^+B$ が成り立つ。準同型 $\alpha : \mathbb{Z}A \rightarrow \mathbb{Z}B$ が $\alpha(\mathbb{Z}^+A) \subset \mathbb{Z}^+B$ を満たすとき、 α は positive であるという。positive な α は、必ず α_C の形に書ける。今後、 $\alpha(a)$ における b の係数を $\alpha(a, b) \in \mathbb{Z}$ と書くことにする。

(V, E) を BD とする。 α_{E_n} や $\alpha_{E_{n,m}}$ を考える。任意の $n < m$ に対して、

$$\alpha_{E_{n,m}} = \alpha_{E_m} \circ \alpha_{E_{m-1}} \circ \cdots \circ \alpha_{E_{n+1}}$$

となっている。アーベル群 $D(V, E)$ を帰納極限

$$D(V, E) := \lim_n (\alpha_{E_n} : \mathbb{Z}V_{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}V_n)$$

として定める。 $a \in \mathbb{Z}V_n$ の $D(V, E)$ における像を $[a]$ と表すことにする。

$$D^+(V, E) := \{[a] \in D(V, E) \mid a \in \mathbb{Z}^+V_n, n \in \mathbb{N}\}$$

とおく。

Theorem 2.7. (V, E) を BD とし、 $V_0 = \{*\}$ とする。

$$(D(R_E), D^+(R_E), [1_{X_E}]) \cong (D(V, E), D^+(V, E), [*])$$

が成り立つ。

Proof. 記号 $E_{0,n}, C(p), U(p, q)$ を思い出す。

$$G_n := \langle 1_{C(p)} \mid p \in E_{0,n} \rangle \subset C(X_E, \mathbb{Z})$$

は自由アーベル群で、 $G_n \subset G_{n+1}, C(X_E, \mathbb{Z}) = \bigcup_n G_n$ となっている。 $\pi_n : G_n \rightarrow \mathbb{Z}V_n$ を $\pi_n(1_{C(p)}) := r(p)$ によって定める。 $\pi_n = \alpha_{E_n} \circ \pi_{n-1}$ に注意する。準同型 $\pi : C(X_E, \mathbb{Z}) \rightarrow D(V, E)$ を、

$$\pi(1_{C(p)}) := [\pi_n(1_{C(p)})] = [r(p)]$$

によって定める。 π は well-defined であり、全射である。

あとは

$$\text{Ker } \pi = \langle 1_{r(U)} - 1_{s(U)} \mid U \subset R_E \text{ は bisection} \rangle$$

を示せばよい。□ を示す。 $p, q \in E_{0,n}$, $r(p) = r(q)$ とし、bisection $U = U(p, q) \subset R_E$ を考える。

$$\pi(1_{r(U)} - 1_{s(U)}) = \pi(1_{C(p)} - 1_{C(q)}) = [r(p) - r(q)] = 0$$

となるから、これで良い。□ を示すために、 $f \in \text{Ker } \pi$ とする。 $f \in G_n$ となる n を取る。 $0 = \pi(f) = [\pi_n(f)]$ だから、ある $m > n$ があって、 $\mathbb{Z}V_m$ において

$$0 = (\alpha_{E_m} \circ \cdots \circ \alpha_{E_{n+1}})(\pi_n(f)) = \pi_m(f)$$

である。

$$f = \sum_{p \in E_{0,m}} a_p 1_{C(p)}, \quad a_p \in \mathbb{Z}$$

とおくと、 π_m の定義より任意の $v \in V_m$ に対して、

$$\sum_{r(p)=v} a_p = 0$$

である。これより f は、 $1_{r(U(p,q))} - 1_{s(U(p,q))}$ の形の関数の和として書けることがわかる。 □

Example 2.8. $\#V_n = 1$, $\#E_n = 2$, $\forall n$ であるような (V, E) を考えよう。 $\mathbb{Z}V_n \cong \mathbb{Z}$ であって、 α_{E_n} は \mathbb{Z} から \mathbb{Z} への 2 倍写像である。ゆえに

$$(D(R_E), D^+(R_E), [1_{X_E}]) \cong (\mathbb{Z}[1/2], \mathbb{Z}[1/2] \cap [0, \infty), 1)$$

がわかる。

Example 2.9. $\#V_n = 2$, $\forall n$ であって、各 $\alpha_{E_n} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ が $(a, b) \mapsto (a + b, a)$ で与えられるような (V, E) を考える。 α_{E_n} が全単射なので明らかに $D(R_E) \cong \mathbb{Z}^2$ であるが、この対応のもとに

$$D^+(R_E) = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid \lambda a + b \geq 0\}, \quad [1_{X_E}] = (1, 1)$$

となることがわかる。ここで $\lambda := (1 + \sqrt{5})/2$ は行列 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ の一つの固有値である。

Bratteli diagram の telescoping について説明する。

(V, E) を BD とする。整数の増大列 $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \dots$ をとる。新しい BD (W, F) を、

$$W_n := V_{m_n}, \quad F_n := E_{m_{n-1}, m_n}$$

によって定める。 (W, F) を (V, E) の telescoping と呼ぶ。明らかに、 X_F は X_E と同相である。 $X_F \cong X_E$ の同一視のもとに、 $R_{F,n} = R_{E, m_n}$, $R_F = R_E$ である。また、 $D(W, F)$ と $D(V, E)$ が同型であることも、定義からすぐにわかる。

X_E がコントロール集合であって、 R_E が minimal であれば、次が成り立つ： N, n に対して十分大きな $l > n$ をとれば、任意の $v \in V_n, w \in V_l$ に対して、 $\#E(v, w) \geq N$ となる。従って、適当な telescoping により、隣接するレベルの頂点間の edge の本数はいくらでも大きくできる。

次の操作も有用である。 (V, E) における E_n に注目する。

$$E'_n := E_n, E''_n := E_n, V'_n := E_n$$

とし、 V_{n-1} と V_n の間に V'_n を新たな頂点集合として挿入する。 $e \in E'_n$ を $s(e) \in V_{n-1}$ から $e \in V'_n$ への辺とみなし、 $e \in E''_n$ を $e \in V'_n$ から $r(e) \in V_n$ への辺とみなす。明らかに、この操作によって $X_E, R_E, D(V, E)$ は変化しない。telescoping と組み合わせることにより、 V_n の個数もいくらでも大きく取れることになる。

Theorem 2.10. $(V, E), (W, F)$ を BD とする。次は同値。

- (1) R_E と R_F は同型である。
- (2) $(D(R_E), D^+(R_E), [1_{X_E}]) \cong (D(R_F), D^+(R_F), [1_{X_F}])$

Proof. (1) \Rightarrow (2) は明らか。逆を示す。 $D(R_E)$ と $D(V, E), D(R_F)$ と $D(W, F)$ を、同一視する (Theorem 2.7)。 $\pi : D(R_E) \rightarrow D(R_F)$ が同型写像で、 $\pi(D^+(R_E)) = D^+(R_F), \pi([1_{X_E}]) = [1_{X_F}]$ とする。ある V_n に着目し、 $\mathbb{Z}V_n$ から $D(R_F)$ への準同型 $a \mapsto \pi([a])$ を考える。 $\mathbb{Z}V_n$ は自由だから、ある m と $\pi_0 : \mathbb{Z}V_n \rightarrow \mathbb{Z}W_m$ であって、

$$\pi([a]) = [\pi_0(a)] \quad \forall a \in \mathbb{Z}V_n$$

となるものが存在する。 $D(R_F)$ において

$$[*] = [1_{X_F}] = \pi([1_{X_E}]) = \pi([*]) = \pi([\alpha_{E_{0,n}}(*)]) = [\pi_0(\alpha_{E_{0,n}}(*))]$$

であるから、必要なら m を大きく取り直すことにより、

$$\alpha_{F_{0,m}} = \pi_0 \circ \alpha_{E_{0,n}}$$

としてしまってよい。しかも、 $a \in \mathbb{Z}^+V_n$ ならば $\pi([a]) \in D^+(R_F)$ であるから、 m をさらに大きく取り直すことにより、 $\pi_0(\mathbb{Z}^+V_n) \subset \mathbb{Z}^+W_m$ としてよい。ゆえに、 V_n から W_m への辺の集合 G_0 であって、 $\pi_0 = \alpha_{G_0}$ となるものが取れる。すなわち、 $v \in V_n$ から $w \in W_m$ への辺の個数は、 $\pi_0(v, w) \in \mathbb{Z}^+$ に等しい。

次に、上と同じことを π^{-1} と W_m に実行することにより、ある $l > n$ と $\pi'_0 : \mathbb{Z}W_m \rightarrow \mathbb{Z}V_l$ が得られる。任意の $a \in \mathbb{Z}V_n$ に対して、

$$[a] = \pi^{-1}(\pi([a])) = \pi^{-1}([\pi_0(a)]) = [\pi'_0(\pi_0(a))]$$

であるから、必要なら l をさらに大きく取り直すことにより、

$$\alpha_{E_{n,l}} = \pi'_0 \circ \pi_0$$

が成り立っているとしてよい。

上の議論を π, π^{-1} に交互に繰り返すことにより、次が得られる。

- (i) 自然数の増大列 $1 = n_1 < n_2 < \dots$ と $m_1 < m_2 < \dots$ 。
- (ii) V_{n_k} から W_{m_k} への辺の集合 G_k と、 W_{m_k} から $V_{n_{k+1}}$ への辺の集合 G'_k であって、

$$\alpha_{E_{n_k, n_{k+1}}} = \alpha_{G'_k} \circ \alpha_{G_k}, \quad \alpha_{F_{0, m_1}} = \alpha_{G_1} \circ \alpha_{E_1}, \quad \alpha_{F_{m_k, m_{k+1}}} = \alpha_{G_{k+1}} \circ \alpha_{G'_k}$$

を満たすもの。

辺の集合 $E_1, G_1, G'_1, G_2, \dots$ をこの順につないでできる（ジグザグの）BD を考える。このBDの奇数レベルへの telescoping は、 (V, E) の $0 < n_1 < n_2 < \dots$ への telescoping に一致している。また、このBDの偶数レベルへの telescoping が、 (W, F) の $0 < m_1 < m_2 < \dots$ への telescoping に一致している。これで、 R_E と R_F とが同型であることが示せた。□

Remark 2.11. R_E と R_F との同型を導く同相写像 $h : X_E \rightarrow X_F$ が最初に与えられている状況で、上の theorem の (2)⇒(1) の構成を見直すことにより、BD の infinite path space の同一視によって h が実現できることを見たい。

いま、 V_n までを既に選んだ場面にいるとする。 m を次が成り立つように選ぶ。

- (i) $(h \times h)(R_{E,n}) \subset R_{F,m}$
- (ii) $R_{F,m}$ の分割として、 $\{U(q_1, q_2) \mid q_1, q_2 \in F_{0,m}\}$ は $\{(h \times h)(U(p_1, p_2)) \mid p_1, p_2 \in E_{0,n}\} \cup \{R_{F,m} \setminus (h \times h)(R_{E,n})\}$ の細分になっている。

V_n から W_m への辺集合 G_0 を次のようにして定める：

$$G_0 := F_{0,m} / \sim$$

$$q_1 \sim q_2 \iff \exists p_1, p_2 \in E_{0,n} \quad (h \times h)(U(p_1, p_2)) \supset U(q_1, q_2)$$

上の定義には暗に $r(q_1) = r(q_2)$, $r(p_1) = r(p_2)$ も要請されていることに注意する。 $q \in F_{0,m}$ の同値類 $\bar{q} \in G_0$ に対して、 $C(q) \subset h(C(p))$ となる $p \in E_{0,n}$ を取り、 $s(\bar{q}) := r(p)$, $r(\bar{q}) := r(q)$ と定める。すると、 $E_{0,n}$ と G_0 とをつないでできる path の集合と、 $F_{0,m}$ との間には、自然な対応が存在する（確かめよ(7)b)。この手順を繰り返すことにより、BD の辺集合の変換によって $h : X_E \rightarrow X_F$ を表すことができる。

Remark 2.12. 実は、AF 同値関係 R_E の軌道同型類に対しては、

$$(D_m(R_E), D_m^+(R_E), [1_{X_E}]_m)$$

が完全不変量になる。これはずっと後のほうで示す予定である。

Remark 2.13 (章末のひとつ)。AF 同値関係の概念は、Giordano-Putnam-Skau が極小 \mathbb{Z} 系を軌道同型で分類した論文 [8] において、本質的に重要な役割を果たしている。その後、AF 同値関係は compact étale 同値関係の増大和として書けるという特徴づけ (Remark 2.5) を始めとして、概念や性質の理解と整理が Giordano-Putnam-Skau の論文 [9] でなされた。AF 同値関係の同型による分類定理 (Theorem 2.10) は Krieger [12] によって与えられた。[9, Lemma 4.13] の議論も参考になる。

3 Dimension group

Definition 3.1. G を可算アーベル群とし、 $G^+ \subset G$ とする。

- (1) 次の 3 条件が満たされるとき、 (G, G^+) を ordered group と呼ぶ。
 - (i) $G^+ + G^+ \subset G^+$
 - (ii) $G^+ - G^+ = G$
 - (iii) $G^+ \cap (-G^+) = \{0\}$
 $b - a \in G^+$ のとき $a \leq b$ と書く。
- (2) $u \in G^+$ が order unit であるとは、任意の $a \in G$ に対して、ある $n \in \mathbb{N}$ があって、 $a \leq nu$ となることを言う。任意の $u \in G^+ \setminus \{0\}$ が order unit であるとき、 G は simple であるという。
- (3) ordered group (G, G^+) が unperforated であるとは、任意の $n \in \mathbb{N}$, $a \in G$ に対して、 $na \in G^+$ ならば $a \in G^+$ が成り立つことを言う。
- (4) ordered group (G, G^+) が Riesz interpolation を満たすとは、 $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$ が $a_i \leq b_j$ を満たすとき、 $a_i \leq c \leq b_j$ となるような $c \in G$ が存在することを言う。
- (5) ordered group (G, G^+) が unperforated であって Riesz interpolation を満たすとき、dimension group と呼ぶ。

Theorem 3.2 (Effros-Handelman-Shen). (G, G^+) を ordered group とし、 $u \in G$ を order unit とする。次は同値。

- (1) (G, G^+) は DG である。
- (2) Bratteli diagram (V, E) が存在して、 $(G, G^+, u) \cong (D(V, E), D^+(V, E), [*])$ と

なる。

また、 $D(V, E)$ が simple であることと (V, E) が (BD として) simple であることは同値である。

(2) \Rightarrow (1) は容易である (確かめよ(8)a)。

(G, G^+) を simple DG とし、 $u \in G^+$ を order unit とする。

$$\text{Inf}(G) := \{a \in G \mid ka \leq u \quad \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

とおく。これは u には依存しないことがわかる (確かめよ(9)b)。

$G/\text{Inf}(G)$ において

$$(G/\text{Inf}(G))^+ := \{a + \text{Inf}(G) \mid a \in G^+\}$$

とおく。

Lemma 3.3. $(G/\text{Inf}(G), (G/\text{Inf}(G))^+)$ は simple DG であり、 $\text{Inf}(G/\text{Inf}(G)) = 0$ である。

Proof. 確かめよ。(10)c □

上の lemma の DG のことを $(G/\text{Inf}, G^+/\text{Inf})$ と略記する。

Proposition 3.4. (V, E) を simple BD とする。

$$\text{Inf}(D(R_E)) = \left\{ [f] \in D(R_E) \mid \int_{X_E} f d\mu = 0 \quad \forall \mu \in M(R_E) \right\}$$

であり、 $(D(R_E)/\text{Inf}, D^+(R_E)/\text{Inf})$ は $(D_m(R_E), D_m^+(R_E))$ に同型である。

Proof. $f \in C(X_E, \mathbb{Z})$ に対して

$$[f] \in D^+(R_E) \setminus \{0\} \iff \int_{X_E} f d\mu > 0 \quad \forall \mu \in M(R_E)$$

がわかる (\Rightarrow は容易だが、逆は面倒)。これを用いれば命題は証明できる (確かめよ(11)c)。 □

Example 3.5. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $V_n = \{v_n, v'_n\}$ であって、 $\#E_1 = 2$ で、 $n \geq 2$ のとき $\alpha_{E_n} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ が行列 $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ で与えられるような BD (V, E) を考える。準同型 $\tau : D(R_E) \rightarrow \mathbb{R}$ を、

$$\tau([v_n]) = \tau([v'_n]) = \frac{1}{2 \cdot 5^{n-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

によって定める。 τ は well-defined で、 $\tau(D^+(R_E)) \subset [0, \infty)$ を満たす。(実は、 R_E は唯一の不変測度を持ち、この測度に関する積分が τ に対応している。)

$\text{Inf}(D(R_E))$ を計算しよう。 $a \in \text{Inf}(D(R_E))$ とする。任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して、 $ka \leq [1_{X_E}]$ であるから、 $k\tau(a) \leq 1$ となる。ゆえに $\tau(a) = 0$ である。したがって、ある $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ があって、 $a = m[v_n - v'_n]$ と書ける。逆に、 $[v_n - v'_n]$ が $\text{Inf}(D(R_E))$ の要素であることもわかる (確かめよ(12)b)。従って

$$\text{Inf}(D(R_E)) = \langle [v_n - v'_n] \mid n \in \mathbb{N} \rangle \cong \mathbb{Z}[1/3]$$

である。上の議論により $\text{Inf}(D(R_E)) = \text{Ker } \tau$ であるから、

$$D(R_E)/\text{Inf} \cong \text{Im } \tau = \mathbb{Z}[1/5]$$

を得る。

Remark 3.6 (章末のひとこと). Theorem 3.2 の証明は Effros-Handelman-Shen の論文 [4] を見られたい。Davidson の教科書 [2] の Section IV.7 にも読みやすい証明が載っている。dimension group の state space については触れなかった。 (G, G^+, u) を dimension group と order unit の組とするとき、その state space は

$$\{\rho \in \text{Hom}(G, \mathbb{R}) \mid \rho(G^+) \subset [0, \infty), \rho(u) = 1\}$$

で定義される。詳細は Effros の本 [3] を見られたい。 R が AF 同値関係 (或いは極小 \mathbb{Z} 系から生じる同値関係) のとき、 $(D(R), D^+(R), [1_X])$ の state space と $M(R)$ との間には、自然な 1 対 1 対応が存在する。[11, Theorem 5.5] や [8, Theorem 1.13] を見よ。これらを認めれば、Proposition 3.4 の証明で言及した

$$[f] \in D^+(R_E) \setminus \{0\} \iff \int_{X_E} f d\mu > 0 \quad \forall \mu \in M(R_E)$$

も理解できる。

4 Bratteli-Vershik model

(V, E) を simple BD とし、 X_E はカントール集合であるとする。各 $r^{-1}(v)$ に線形順序が定まっているとする。

$$E_{\max} := \{e \in E \mid e \text{ is maximum in } r^{-1}(r(e))\}$$

$$E_{\min} := \{e \in E \mid e \text{ is minimum in } r^{-1}(r(e))\}$$

とおく。

$$\#\{(x_n)_n \in X_E \mid x_n \in E_{\max} \quad \forall n\} = 1$$

$$\#\{(x_n)_n \in X_E \mid x_n \in E_{\min} \quad \forall n\} = 1$$

のとき、 (V, E) は properly ordered simple BD であるといい、それぞれの唯一の要素をしばしば x_{\max}, x_{\min} と表す。

$\varphi_E : X_E \rightarrow X_E$ を次のように定める。まず、 $\varphi_E(x_{\max}) := x_{\min}$ とする。 $x = (x(i))_i$ が x_{\max} でないとき、

$$k := \min\{i \mid x(i) \text{ is not in } E_{\max}\}$$

が定まる。そこで

$$\varphi_E(x) := (y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k, x(k+1), x(k+2), \dots) \in X_E$$

とおく。ただし $y_1, \dots, y_{k-1} \in E_{\min}$ であり、 y_k は $r^{-1}(r(x(k)))$ において $x(k)$ よりも一つ大きい元である。

Proposition 4.1. 上の設定で、 φ_E は X_E 上の同相写像である。また、 φ_E (が引き起こす \mathbb{Z} の作用) は極小である。

Proof. 確かめよ。(13)c □

実は、この「逆」が成り立つ。

X をカントール集合とし、 $\varphi \in \text{Homeo}(X)$ を極小な \mathbb{Z} 作用とする。 $A \subset X$ を空でない clopen set とする。 φ は極小なので、 $x \in A$ に対して

$$f_A(x) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \varphi^n(x) \in A\}$$

とおくと、 $f_A : A \rightarrow \mathbb{N}$ は well-defined な連続関数である (確かめよ(14)a)。 $f_A(x)$ は first return time と呼ばれる。 \mathcal{V} を A の clopen set による分割であって、各 $B \in \mathcal{V}$ 上で f_A が定数関数となるものとする。 B 上での f_A の値を $f_A(B)$ と書く。

$$\mathcal{P} := \{\varphi^k(B) \mid B \in \mathcal{V}, 0 \leq k \leq f_A(B)-1\}$$

は X の clopen set による分割になっている。これを、 A, \mathcal{V} に関する Kakutani-Rohlin 分割と呼ぶ。

Theorem 4.2. X, φ を上の通りとし、 $x_0 \in X$ とする。pos BD (V, E) と、同相写像 $h : X_E \rightarrow X$ であって、 $h \circ \varphi_E \circ h^{-1} = \varphi$, $h(x_{\max}) = x_0$ となるものが存在する。

Proof. clopen set の減少列 $(A_n)_n$ で、 $\bigcap_n A_n = \{\varphi(x_0)\}$ となるものをとる。 A_n の clopen set による分割 \mathcal{V}_n を取って、 A_n, \mathcal{V}_n に関する KR 分割 \mathcal{P}_n が次を満たすようにする。

- \mathcal{P}_{n+1} は \mathcal{P}_n の細分である。
- $\bigcup_n \mathcal{P}_n$ は X の位相を生成する。

ただし、 $A_0 = X, \mathcal{V}_0 = \{X\}$ としておく。

BD (V, E) を次のように作る。 $V_n := \mathcal{V}_n$ とおく。 $B \in V_n, B' \in V_{n+1}$ に対して

$$\#E(B, B') := \#\{k \mid 0 \leq k \leq f_{A_{n+1}}(B') - 1, \varphi^k(B') \subset B\}$$

となるように辺集合 E を定める。これで (V, E) が作れた。

$r^{-1}(B')$ の元は、 $\varphi^k(B') \subset B$ を満たす k と $B \in V_n$ に対応している。この k の大小によって $r^{-1}(B')$ に線形順序を入れる。 (V, E) は pos BD となり、 φ_E は φ と共役になる。

h の構成法は次の通り。 (V, E) の infinite path $x \in X_E$ は、 $\varphi^{k_{n+1}}(B_{n+1}) \subset B_n$ を満たす $B_n \in V_n, 0 \leq k_n < f_{A_n}(B_n)$ の列に対応している。そこで

$$\{h(x)\} = \bigcap_n \varphi^{k_n + k_{n-1} + \dots + k_1}(B_n)$$

によって $h : X_E \rightarrow X$ を定めれば、この h が φ_E と φ との共役を与える。 \square

pos BD (V, E) に対して定まる $\varphi_E : X_E \rightarrow X_E$ は、 Bratteli-Vershik model と呼ばれる。

X_E 上の 2 つの étale 同値関係 R_{φ_E} と R_E とを比べる。 $y \in X_E$ が x_{\max} の R_{φ_E} 軌道の要素でないときは、

$$R_{\varphi_E}[y] = R_E[y]$$

であることがわかる。 x_{\max} と x_{\min} とは、 R_{φ_E} においては同じ軌道にあるが、 R_E では異なる軌道にある。つまり

$$R_{\varphi_E}[x_{\max}] = R_E[x_{\max}] \sqcup R_E[x_{\min}]$$

である。この状況は Example 1.6 の一般化になっていることに注意する。以上をまとめると、次の系を得る。

Corollary 4.3. X をカントール集合とし、 $\varphi \in \text{Homeo}(X)$ を極小な \mathbb{Z} 作用とする（カントール極小 \mathbb{Z} 系と呼ぶ）。 $x_0 \in X$ とする。

$$R_{\{x_0\}} := R_\varphi \setminus \{(\varphi^k(x_0), \varphi^l(x_0)) \mid [k > 0, l \leq 0] \text{ or } [k \leq 0, l > 0]\}$$

とおくと、 $R_{\{x_0\}}$ は R_φ の open subrelation で、極小な AF 同値関係である。

さらに、閉集合 $Y \subset X$ が、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $Y \cap \varphi^n(Y) = \emptyset$ を満たすとき、

$$R_Y := R_\varphi \setminus \{(\varphi^k(y), \varphi^l(y)) \mid y \in Y, [k > 0, l \leq 0] \text{ or } [k \leq 0, l > 0]\}$$

も R_φ の open subrelation で、極小な AF 同値関係である。

Proof. 任意の $y \in X$ に対して、その前方軌道 $\{\varphi^n(y) \mid n \in \mathbb{N}\}$ も後方軌道 $\{\varphi^{1-n}(y) \mid n \in \mathbb{N}\}$ も X で稠密である（確かめよ(15)a）。したがって、 $R_{\{x_0\}}$ や R_Y は極小である。open subrelation であることも明らか。 $R_{\{x_0\}}$ が AF であることは上の theorem より従う。Remark 2.5 (2) より R_Y も AF である。 \square

R_φ 自身は AF 同値関係ではないことが知られている（例えば「ホモロジー群」で区別できる）。

次に、 R_φ に対して $D(R_\varphi)$ や $D_m(R_\varphi)$ を考察する。

Proposition 4.4. (X, φ) , x_0 , R を上の通りとする。

$$\begin{aligned} (D(R_\varphi), D^+(R_\varphi), [1_X]) &\cong (D(R), D^+(R), [1_X]) \\ (D_m(R_\varphi), D_m^+(R_\varphi), [1_X]_m) &\cong (D_m(R), D_m^+(R), [1_X]_m) \end{aligned}$$

が成り立つ。

Proof.

$$\langle 1_{r(U)} - 1_{s(U)} \mid U \subset R \text{ は bisection} \rangle = \langle 1_{r(U)} - 1_{s(U)} \mid U \subset R_\varphi \text{ は bisection} \rangle$$

を示せばよい。 $R \subset R_\varphi$ だから、 \subset は明らかである。逆を示すには、 $n \in \mathbb{N}$, $A \subset X$ を clopen とし、 $U := \{(\varphi^n(x), x) \mid x \in A\}$ に対して、 $1_{r(U)} - 1_{s(U)}$ が左辺に属することを言えばよい。 $k = 0, 1, \dots, n-1$ に対して

$$U_k := \{(\varphi^k(x), x) \mid x \in \varphi^k(A)\}$$

とおくと、

$$1_{r(U)} - 1_{s(U)} = \sum_{k=0}^{n-1} 1_{r(U_k)} - 1_{s(U_k)}$$

である。よって、最初から $n = 1$ のときだけを考えればよい。もし $x_0 \notin A$ ならば、 $U \subset R$ である。 $x_0 \in A$ のときは、 $U' := \{(\varphi(x), x) \mid x \notin A\}$ とおくと $U' \subset R$ であって

$$1_{r(U')} - 1_{s(U')} = 1_{\varphi(A^c)} - 1_{A^c} = (1_X - 1_{\varphi(A)}) - (1_X - 1_A) = -(1_{r(U)} - 1_{s(U)})$$

となるから、これで良い。

D_m に関しても、いま示したことより $M(R_\varphi) = M(R)$ が言えるので、従う。 \square

Remark 4.5. カントール極小 \mathbb{Z} 系 (X_i, φ_i) , $i = 1, 2$ に対して次が知られている。

- (1) R_{φ_1} が R_{φ_2} に同型 $\iff \varphi_1$ は φ_2 もしくは φ_2^{-1} に位相共役
- (2) $(D(R_{\varphi_1}))$ の 3 つ組 $\cong (D(R_{\varphi_2}))$ の 3 つ組 $\iff \varphi_1$ と φ_2 は強軌道同型
- (3) R_{φ_1} は R_{φ_2} に軌道同型 $\iff (D_m(R_{\varphi_1}))$ の 3 つ組 $\cong (D_m(R_{\varphi_2}))$ の 3 つ組

(3) は Section 6 で示す。

Remark 4.6 (章末のひとこと). カントール極小 \mathbb{Z} 系に対する Bratteli-Vershik model の存在は、Herman-Putnam-Skau の論文 [11] で証明された。Theorem 4.2 の詳細な証明は [11] を参照されたい。Remark 4.5 (1) は、[8, Theorem 2.4] で言及されている。[8, Theorem 1.4] にもある通り、これはもともとは M. Boyle の学位論文の結果である。[1] も参考になる。Remark 4.5 (2)(3) は [8] の主結果である。

5 Absorption theorem

$R \subset X \times X$ を étale 同値関係とする。 $Y \subset X$ を閉集合とする。 $R \cap (Y \times Y)$ を Y 上の同値関係とみなし、これを $R|_Y$ と書く。

Definition 5.1. R からの相対位相によって $R|_Y$ が étale 同値関係になるとき、 Y は R -étale であるという。

Lemma 5.2. 上の設定で次は同値。

- (1) Y は R -étale である。
- (2) 任意の $\xi \in R|_Y$ は、 R における開近傍 U であって次を満たすものを持つ: $\forall \zeta \in U$,
 $r(\zeta) \in Y \iff s(\zeta) \in Y$

Proof. 確かめよ。(16)b □

(V, E) を BD とし、 (V', E') をその sub-BD とする。ただし $V_0 = V'_0 = \{*\}$ はいつも仮定する。 $X_{E'}$ を自然に X_E の closed subset とみなすことにする。このとき、 $R_{E'}$ は $R_E|_{X_{E'}}$ と一致している。

Theorem 5.3. (1) (V, E) を BD とし (V', E') をその sub-BD とするとき、 $X_{E'}$ は R_E -étale である。

- (2) R を X 上の AF 同値関係とし、 $Y \subset X$ が R -étale であるとする。 BD (V, E) とその sub-BD (V', E') と同相写像 $h: X \rightarrow X_E$ であって、 R から R_E への同型を誘

導し、 $h(Y) = X_{E'}$ となるものが、存在する。

Proof. (1) は明らか。(2) は省略。 □

Definition 5.4. $R \subset X \times X$ を AF 同値関係とし、 $Y \subset X$ を閉集合とする。 Y が R -thin であるとは、任意の $\mu \in M(R)$ に対して $\mu(Y) = 0$ となることをいう。

Lemma 5.5. (V, E) を simple BD とし、 (V', E') をその sub-BD とする。 $X_{E'}$ が R_E -thin であるとする。任意の $n \in \mathbb{N}$, $K > 0$ に対して、ある $m > n$ が存在して、

$$K \cdot \#E'(v, w) \leq \#E(v, w)$$

が全ての $v \in V'_n, w \in V'_m$ に対して成り立つ。

Proof.

$$A_m := \{(x(i))_i \in X_E \mid x(i) \in E' \quad \forall i = 1, 2, \dots, m\}$$

とおく。 A_m は clopen set の減少列で、 $\bigcap_m A_m = X_{E'}$ である。仮定より、全ての $\mu \in M(R_E)$ に対して $\mu(X_{E'}) = 0$ であるから、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup \{\mu(A_m) \mid \mu \in M(R_E)\} = 0$$

が成り立つ。 R_E は minimal だから、

$$\inf \{\mu(C(p)) \mid \mu \in M(R_E)\} > 0 \quad \forall p \in E_{0,n}$$

である。ゆえに、

$$K \cdot \sup \{\mu(A_m) \mid \mu \in M(R_E)\} < \inf \{\mu(C(p)) \mid \mu \in M(R_E), p \in E_{0,n}\}$$

が成り立つような $m > n$ が存在する。

$$\int_{X_E} 1_{C(p)} - K 1_{A_m} d\mu > 0 \quad \forall \mu \in M(R_E), p \in E_{0,n}$$

であるから、Proposition 3.4 の証明より $[1_{C(p)}] > K[1_{A_m}]$ を得る。 $D(R_E)$ と $D(V, E)$ との同一視 (Theorem 2.7) のもとに、 $[1_{C(p)}] = [r(p)]$ であり、

$$x := \sum_{q \in E'_{0,m}} r(q) \in \mathbb{Z}V'_m \subset \mathbb{Z}V_m$$

とおくと、 $[1_{A_m}] = [x]$ である。ゆえに $l > m$ を十分大きくとれば、 $\mathbb{Z}V_l$ において

$$K \cdot \alpha_{E_{m,l}}(x) \leq \alpha_{E_{n,l}}(r(p))$$

となる。任意に $w \in V'_l$ をとる。

$$\begin{aligned}
K \cdot \#E'(r(p), w) &\leq K \cdot \#E'(*, w) \\
&\leq K \cdot \#\{\text{path } t \text{ in } E \text{ from } * \text{ to } w \text{ such that } C(t) \subset A_m\} \\
&= K \cdot (\alpha_{E_m, l}(x) \text{ における } w \text{ の係数}) \\
&\leq \alpha_{E_n, l}(r(p), w) \\
&= \#E(r(p), w)
\end{aligned}$$

となり、 $p \in E_{0, n}$ は任意だったから、これで良い。 \square

Proposition 5.6 (拡張原理). $(V, E), (W, F)$ を simple BD とし、 $(V', E'), (W', F')$ をそれぞれの sub-BD とする。以下を仮定する。

- (1) $X_{E'}$ は R_E -thin で、 $X_{F'}$ は R_F -thin である。
- (2) R_E は R_F に同型である。
- (3) 同相写像 $h : X_{E'} \rightarrow X_{F'}$ があって、 $h \times h$ は $R_{E'}$ から $R_{F'}$ への同型を与えている。

このとき、 h の拡張 $\tilde{h} : X_E \rightarrow X_F$ であって、 R_E から R_F への同型を与えるものが存在する。

Proof. Theorem 2.10 より、 $(V, E), (W, F)$ を telescoping することによって、次を仮定してよい：BD (Z, G) があって、

$$\begin{aligned}
Z_0 = V_0 = W_0, \quad Z_{2n-1} = V_n, \quad Z_{2n} = W_n \\
G_1 \cong E_1, \quad G_{2n-2, 2n} \cong F_n, \quad G_{2n-1, 2n+1} \cong E_{n+1}
\end{aligned}$$

となっている (ただし \cong はグラフとしての同型)。Remark 2.11 より、さらに telescoping をすることによって、同じことが sub-BD に対しても言えているとしてよい。しかも、 G', E', F' の path の間には対応がついていて、その対応が $h : X_{E'} \rightarrow X_{F'}$ を導くとしてよい。

Z' は自然に Z の部分集合である。あとは、適切に G' を G の部分集合とみなすことさえ出来れば良い。そのためには、二つの頂点を結ぶ G' の辺の数が G の辺の数よりも少ないという状況になれば良い。telescoping によりこれを達成する。記号の簡略化のため、 G_1, G_2 まで完了しているとし、 G_3 に注目する。

$$K := \frac{\max\{\#G'(w, v) \mid w \in W_1, v \in V_2\}}{\min\{\#G(w, v) \mid w \in W_1, v \in V_2\}} + 1$$

とおく。Lemma 5.5 を (V', E') に適用して、

$$K \cdot \#E'(v, u) \leq \#E(v, u) \quad \forall v \in V_2, u \in V_n$$

となる $n > 2$ が見つかる。すると、任意の $w \in W_1, u \in V_n$ に対して

$$\begin{aligned} & \frac{\#\{\text{path in sub-BD from } w \text{ to } u\}}{\#\{\text{path in BD from } w \text{ to } u\}} \\ &= \frac{\sum_{v \in V_2} \#G'(w, v) \cdot \#E'(v, u)}{\sum_{v \in V_2} \#G(w, v) \cdot \#E(v, u)} \\ &\leq K \cdot \frac{\sum_{v \in V_2} \#E'(v, u)}{\sum_{v \in V_2} \#E(v, u)} \leq 1 \end{aligned}$$

となる。よって、 W_1 から V_n までをひとまとめにして、改めて G_3, G'_3 を作れば条件が満たされる。

このようにして出来上がった $(Z, G), (Z', G')$ において、sub-BD の path の間には既に同一視が入っているから、その対応の任意の拡張を取れば、求める同相写像 $h : X_E \rightarrow X_F$ が得られる。 \square

Theorem 5.7. (X, φ) をカントール極小 \mathbb{Z} 系とし、 $x_0 \in X$ とする。AF 同値関係 $R_{\{x_0\}}$ を Theorem 4.3 のように定めるとき、 R_φ は $R_{\{x_0\}}$ に軌道同型である。

Proof. 次のような点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を取る。

- (i) $(x_n)_n$ はある $z \in X$ に収束している。
- (ii) z, x_0, x_1, x_2, \dots は互いに相異なる R_φ 軌道を持つ。

$Y := \{z, x_0, x_1, x_2, \dots\}$ とおく。 Y は $Y \cap \varphi^n(Y) = \emptyset, n \in \mathbb{N}$ を満たす閉集合である。 Theorem 4.3 より R_Y は極小な AF 同値関係である。 $Y' := Y \cup \varphi(Y)$ とおく。 $R_Y|_{Y'} = \{(y, y) \mid y \in Y'\}$ であるから、 Y' は R_Y -étale である。 Y' は可算集合だから、 R_Y -thin である。 同相写像 $h : Y' \rightarrow Y' \setminus \{x_0, \varphi(x_0)\}$ を、

$$h(z) = z, \quad h(x_i) = x_{i+1}, \quad h(\varphi(z)) = \varphi(z), \quad h(\varphi(x_i)) = \varphi(x_{i+1})$$

によって定める。 $Y' \setminus \{x_0, \varphi(x_0)\}$ も同様に R_Y -étale かつ R_Y -thin である。 Theorem 5.3 (2) と Theorem 5.6 より、 h の拡張 $\tilde{h} : X \rightarrow X$ であって、 R_Y から R_Y への同型を導くものが存在する。

$$R_\varphi = R_Y \vee \{(y, \varphi(y)) \mid y \in Y\}$$

であるから (\vee は生成される同値関係を表す)、

$$\begin{aligned} (\tilde{h} \times \tilde{h})(R_\varphi) &= (\tilde{h} \times \tilde{h})(R_Y) \vee \{(h(y), h(\varphi(y))) \mid y \in Y\} \\ &= R_Y \vee \{(y, \varphi(y)) \mid y \in Y \setminus \{x_0\}\} \\ &= R_{\{x_0\}} \end{aligned}$$

を得る。ゆえに R_φ は $R_{\{x_0\}}$ に軌道同型である。 \square

Example 1.6 で述べた odometer system の場合は、上の定理の一つの具体例になっている。

Theorem 5.8 (splitting theorem). $R \subset X \times X$ を極小 AF 同値関係とし、 $Y \subset X$ を R -étale かつ R -thin である閉集合とする。 $S \subset R|Y$ を open subrelation on Y とする。このとき、次を満たす open subrelation $R' \subset R$ が存在する。

- (1) R' は極小である。
- (2) $R'|Y$ は S に等しい。
- (3) $R'[Y] = R[Y]$ である。
- (4) $x \notin R[Y]$ ならば、 $R'[x] = R[x]$ である。
- (5) $M(R') = M(R)$ である。

Theorem 5.9 (absorption theorem). $R \subset X \times X$ を極小 AF 同値関係とし、閉集合 $Y \subset X$ は R -étale かつ R -thin であるとする。 $Q \subset Y \times Y$ は AF 同値関係で、 $R|Y$ を open subrelation として含むとする。次を満たす同相写像 $h : X \rightarrow X$ が存在する。

- (1) $(h \times h)(R \vee Q) = R$ (ただし \vee は生成される同値関係を表す)
- (2) $h(Y)$ は R -étale かつ R -thin である。
- (3) $h|Y$ は Q から $R|h(Y)$ への同型を誘導する。

Proof. $Z := (Y \times \mathbb{N}) \cup \{\infty\}$ を $Y \times \mathbb{N}$ の一点コンパクト化とする。 Q が AF 同値関係なので、

$$\tilde{Q} := \{((y, n), (y', n)) \in Z \times Z \mid (y, y') \in Q, n \in \mathbb{N}\} \cup \{(\infty, \infty)\}$$

は (適切な位相によって) Z 上の AF 同値関係であることがわかる (Remark 2.5 (1) を使って、確かめよ(17)c)。

次を満たす $\pi : Z \rightarrow X$ が取れる。

- (i) π は Z から $\pi(Z)$ への同相写像である。
- (ii) $\pi(Z)$ は R -étale かつ R -thin である。
- (iii) $\pi(Z) \cap R[Y] = \emptyset$ である。
- (iv) π は \tilde{Q} から $R|\pi(Z)$ への同型を誘導する。

π は次のようにして作れる。まず、 R と $R|Y$ は、Theorem 5.3 (2) により、ある (V, E) と (V', E') によって実現されるとしてよい。telescoping 等の操作により、さらに Lemma 5.5 により、 $\#V_n$ や $\#(E_n \setminus E'_n)$ は好きなだけ大きく取れる。一方、 \tilde{Q} も全く別の BD で表される。この BD のコピーを、 (V, E) の sun-BD として、 E' とは交わらないように取

れば、所望の π が得られる。

$\tilde{Q} \subset Z \times Z$ の open subrelation S を

$$S := \{(y, n), (y', n) \in \tilde{Q} \mid (y, y') \in R\} \cup \{(\infty, \infty)\}$$

と定める。 $(\pi \times \pi)(S)$ は $(\pi \times \pi)(\tilde{Q}) = R|\pi(Z)$ の open subrelation であるから、Theorem 5.8 より、次を満たす極小な open subrelation $R' \subset R$ が得られる。

- (i) $R'|\pi(Z)$ は $(\pi \times \pi)(S)$ に等しい。
- (ii) $R'[\pi(Z)] = R[\pi(Z)]$ である。
- (iii) $x \notin R[\pi(Z)]$ ならば、 $R'[x] = R[x]$ である。
- (iv) $M(R') = M(R)$ である。

(ii)(iii) より、

$$R = R' \vee (R|\pi(Z)) = R' \vee (\pi \times \pi)(\tilde{Q})$$

である。(iv) より、 $Y \cup \pi(Z)$ は R' -thin である。

$$R'|(Y \cup \pi(Z)) = (R'|Y) \cup (R'|\pi(Z)) = (R|Y) \cup (\pi \times \pi)(S)$$

であるから、 $Y \cup \pi(Z)$ は R' -étale である。

同相写像 $h : Y \cup \pi(Z) \rightarrow \pi(Z)$ を

$$h(y) = \pi(y, 1), \quad h(\pi(y, n)) = \pi(y, n+1), \quad h(\pi(\infty)) = \pi(\infty)$$

によって定める。 S の定め方より、明らかに h は、

$$R'|(Y \cup \pi(Z)) = (R|Y) \cup (R'|\pi(Z))$$

から $R'|\pi(Z)$ への同型を誘導している。従って Proposition 5.6 より、 h の拡張 $\tilde{h} : X \rightarrow X$ であって、 R' の自己同型を誘導するものがある。一方 h は、 $Q \cup (\pi \times \pi)(\tilde{Q})$ から $(\pi \times \pi)(\tilde{Q})$ への同型も誘導している。すると

$$(\tilde{h} \times \tilde{h})(R \vee Q) = (\tilde{h} \times \tilde{h})(R' \vee Q \vee (\pi \times \pi)(\tilde{Q})) = R' \vee (\pi \times \pi)(\tilde{Q}) = R$$

となる。 $\tilde{h}(Y) = \pi(Y \times \{1\})$ が R -étale かつ R -thin であること、 $\tilde{h}|Y = h|Y$ が Q から $R|\pi(Y \times \{1\})$ への同型を誘導することも、明らかである。□

Remark 5.10. Theorem 5.7 は Theorem 5.9 の系とみなすこともできる。AF 同値関係 $R_{\{x_0\}}$ に対して、 $Y = \{x_0, \varphi(x_0)\}$, $Q = Y \times Y$ として、Theorem 5.9 を使うと、 $R_{\{x_0\}}$ は $R_{\{x_0\}} \vee Q = R_\varphi$ に軌道同型であると結論できる。

Remark 5.11 (章末のひとつ). 拡張原理 (Proposition 5.6) は、Key Lemma として [9, Lemma 4.15] で述べられている。カントール極小 \mathbb{Z} 系が AF 同値関係に軌道同型であること (Theorem 5.7) は [8] の結果に既に含まれているが、より明確かつ簡潔な議論が [9, Theorem 4.16] で与えられた。吸収定理 (Theorem 5.9) についても、その本質的なアイデアは既に [8] に現れているが、明示的に定理として述べられたのは [9, Theorem 4.18] が最初である。極小 \mathbb{Z}^2 系の攻略に必要な形に改良されたバージョンが [5, Theorem 4.6] である。極小 \mathbb{Z}^N 系に対する軌道同型定理を得るためには、そのさらなる改良版 [13, Theorem 3.2] が必要となった。ここで証明を与えた Theorem 5.9 はこの最終版である。なお、splitting theorem (Theorem 5.8) の証明は技術的に過ぎるので、ここでは割愛した。興味のある方は [13, Theorem 2.1] を見られたい。

6 軌道同型による分類

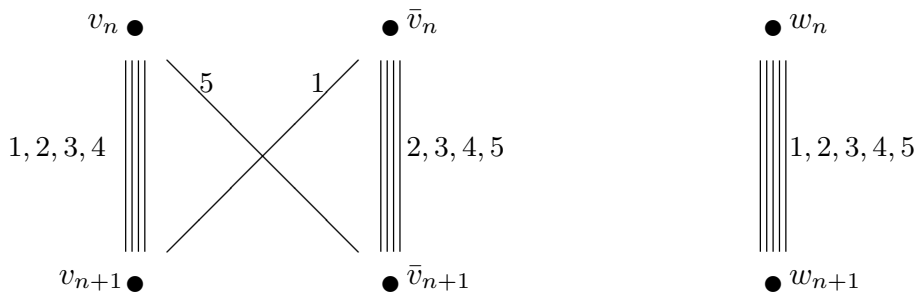
Theorem 6.1. $R \subset X \times X$ を極小 AF 同値関係とする。閉集合 $Y \subset X$ と AF 同値関係 $Q \subset Y \times Y$ が存在して次を満たす。

- (1) R, Y, Q は Theorem 5.9 の仮定を満たす。
- (2) $\tilde{R} := R \vee Q$ は適当な位相によって AF 同値関係となり、 R はその開集合である。
- (3) $(D(\tilde{R}), D^+(\tilde{R}), [1_X]) \cong (D(R)/\text{Inf}, D^+(R)/\text{Inf}, [1_X] + \text{Inf})$ である。

特に R は \tilde{R} に軌道同型である。

Remark 6.2. 証明を見ればわかるように、 Q は、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の Y への自由な作用と $R|_Y$ とで生成される同値関係として取れる。

Example 6.3. Example 3.5 の (V, E) を考える。



別の BD (W, F) で、 $\#W_n = 1, \#F_1 = 2, \#F_{n+1} = 5, n \in \mathbb{N}$ となるものを考える。図のように各辺にラベルを与える。 $D(R_E)/\text{Inf} \cong \mathbb{Z}[1/5] \cong D(R_F)$ であることに注意

する。

$x \in X_E$ に対し、各 $x(i)$ のラベルを読むことで、 $\rho(x) \in X_F$ が得られる。 $\rho : X_E \rightarrow X_F$ は同相写像であることがわかる。また、 $(\rho \times \rho)(R_E)$ は R_F の open subrelation になっている。

$$Y := \{x \in X_E \mid x(i) \text{ のラベル} \in \{2, 3, 4\} \forall i \geq 2\}$$

とおくと、 Y は R_E -étale かつ R_E -thin な閉集合である。 $\gamma : Y \rightarrow Y$ を「 v_n と \bar{v}_n との入れ替え」による写像とする。 $\gamma(y) \neq y$ であって、 $(\rho(y), \rho(\gamma(y))) \in R_F$ が成り立っている。 $Q = (R_E|Y) \vee \{(y, \gamma(y)) \mid y \in Y\}$ とおく。 R_E, Y, Q は Theorem 5.9 の仮定を満たしている

$$R_E \vee Q = (\rho \times \rho)^{-1}(R_F)$$

が成り立っていることがわかる。ゆえに、Theorem 5.9 より、 R_E と R_F は軌道同型である。

Proof of Theorem 6.1. simple BD (V, E) であって、 R_E が R に同型であるものをとる。 $R_E \subset X_E \times X_E$ に対して主張を示す。Lemma 3.3 より $D(R)/\text{Inf}$ は simple DG だから、Theorem 3.2 より、simple BD (W, F) であって、

$$(D(R_E)/\text{Inf} \text{ の } 3 \text{ つ組}) \cong (D(W, F) \text{ の } 3 \text{ つ組})$$

となるものが存在する。

$$\pi : D(V, E) = D(R_E) \rightarrow D(R_E)/\text{Inf} \cong D(W, F)$$

を自然な商写像とする。Theorem 2.10 の時とは違い π は同型ではないので、 π^{-1} を考えることはできない。しかし $\mathbb{Z}W_m$ は自由アーベル群なので、局所的には π^{-1} に相当する準同型 $q : \mathbb{Z}W_m \rightarrow \mathbb{Z}V_n$ を定めることができる。よって、Theorem 2.10 の証明と同様にして、次を満たすような、 $1 = n_1 < n_2 < \dots$, $m_1 < m_2 < \dots$ と、positive な準同型 $\pi_k : \mathbb{Z}V_{n_k} \rightarrow \mathbb{Z}W_{m_k}$, $q_k : \mathbb{Z}W_{m_k} \rightarrow \mathbb{Z}V_{n_{k+1}}$ を、見つけることができる。

- (i) $v \in V_{n_k}$ に対して $[\pi_k(v)] = \pi([v])$ であって、 $w \in W_{m_k}$ に対して $\pi([q_k(w)]) = [w]$ である。
- (ii) $\pi_{k+1} \circ \alpha_{E_{n_k, n_{k+1}}} = \alpha_{F_{m_k, m_{k+1}}} \circ \pi_k$
- (iii) $\pi_k \circ q_{k-1} = \alpha_{F_{m_{k-1}, m_k}}$
- (iv) $\#V_{n_k} < \#W_{m_k}$
- (v) $\pi_k(v, w) \geq 2, \forall v \in V_{n_k}, w \in W_{m_k}$
- (vi) $\pm 3 \left(q_k(\pi_k(v)) - \alpha_{E_{n_k, n_{k+1}}}(v) \right) + 2v' \leq q_k(w)$ in $\mathbb{Z}V_{n_{k+1}}, \forall v \in V_{n_k}, v' \in V_{n_{k+1}}, w \in W_{m_k}$

telescoping によって $k = n_k = m_k$ としてよい。

$$\delta_k := \alpha_{E_{k+1}} - q_k \circ \pi_k : \mathbb{Z}V_k \rightarrow \mathbb{Z}V_{k+1}$$

とおく。(ii)(iii) より $\pi_{k+1} \circ \delta_k = 0$ であることに注意する。

新しい BD (Z, G) を作る。 $Z_k := V_k \sqcup W_k$ とおく。(iv) より、 V_k から W_k への単射 $v \mapsto \bar{v}$ を定めることができる。 $\bar{V}_k := \{\bar{v} \in W_k \mid v \in V_k\}$ とおく。 $\xi_k : \mathbb{Z}V_k \rightarrow \mathbb{Z}Z_k$, $\eta_k : \mathbb{Z}Z_k \rightarrow \mathbb{Z}V_{k+1}$ を

$$\xi_k(v) := v + (\pi_k(v) - \bar{v}) \quad \forall v \in V_k$$

$$\eta_k(v) := \delta_k(v) + q_k(\bar{v}), \quad \eta_k(w) := q_k(w) \quad \forall v \in V_k, w \in W_k$$

によって定める。(v) より ξ_k は positive である。(vi) より η_k も positive である。しかも

$$\begin{aligned} \eta_k(\xi_k(v)) &= \eta_k(v + (\pi_k(v) - \bar{v})) \\ &= \delta_k(v) + q_k(\bar{v}) + q_k(\pi_k(v)) - q_k(\bar{v}) \\ &= \alpha_{E_{k+1}}(v) \end{aligned}$$

となる。したがって、 Z_k から Z_{k+1} への辺集合 G_{k+1} を、 $\xi_{k+1} \circ \eta_k$ に対応するように定めれば、 (V, E) と (Z, G) は自然に同型となる。よって、 $R_G \subset X_G \times X_G$ に対して主張を示せば良い。

$\zeta_k : \mathbb{Z}Z_k \rightarrow \mathbb{Z}W_k$ を、 $\zeta_k(v) := \bar{v}$, $\zeta_k(w) := w$ によって定める。明らかに $\zeta_k \circ \xi_k = \pi_k$ である。また、

$$\zeta_{k+1} \circ \alpha_{G_{k+1}} = \zeta_{k+1} \circ \xi_{k+1} \circ \eta_k = \pi_{k+1} \circ \eta_k$$

であって、

$$\pi_{k+1}(\eta_k(v)) = \pi_{k+1}(\delta_k(v) + q_k(\bar{v})) = \pi_{k+1}(q_k(\bar{v})) = \alpha_{F_{k+1}}(\zeta_k(v)) \quad \forall v \in V_k,$$

$$\pi_{k+1}(\eta_k(w)) = \pi_{k+1}(q_k(w)) = \alpha_{F_{k+1}}(\zeta_k(w)) \quad \forall w \in W_k$$

であるから、

$$\zeta_{k+1} \circ \alpha_{G_{k+1}} = \alpha_{F_{k+1}} \circ \zeta_k$$

を得る。

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}V_k & \xrightarrow{\xi_k} & \mathbb{Z}Z_k & \xrightarrow{\zeta_k} & \mathbb{Z}W_k \\ \downarrow E_{k+1} & & \downarrow G_{k+1} & & \downarrow F_{k+1} \\ \mathbb{Z}V_{k+1} & \xrightarrow{\xi_{k+1}} & \mathbb{Z}Z_{k+1} & \xrightarrow{\zeta_{k+1}} & \mathbb{Z}W_{k+1} \end{array}$$

(Note: A diagonal arrow labeled η_k points from $\mathbb{Z}Z_k$ to $\mathbb{Z}V_{k+1}$ in the original diagram.)

これと ζ_k の定義より、

$$\begin{aligned}\#G(u, w') &= \#F(\zeta_k(u), w') \quad \forall u \in Z_k, w' \in W_{k+1} \setminus \bar{V}_{k+1} \\ \#G(u, v') + \#G(u, \bar{v}') &= \#F(\zeta_k(u), \bar{v}') \quad \forall u \in Z_k, v' \in V_{k+1}\end{aligned}$$

を得る。そこで、写像 $h : G_{k+1} \rightarrow F_{k+1}$ を、

$$\begin{aligned}h : G(u, w') &\rightarrow F(\zeta_k(u), w') \quad \forall u \in Z_k, w' \in W_{k+1} \setminus \bar{V}_{k+1} \\ h : G(u, v') \sqcup G(u, \bar{v}') &\rightarrow F(\zeta_k(u), \bar{v}') \quad \forall u \in Z_k, v' \in V_{k+1}\end{aligned}$$

が全単射となるように定める。特に

$$h : G_{k+1} \cap s^{-1}(u) \rightarrow F_{k+1} \cap s^{-1}(\zeta_k(u))$$

は全単射である。

$$H : X_G \ni (x(k))_k \mapsto (h(x(k)))_k \in X_F$$

は well-defined であり、連続である。上に述べた h の性質から、 H は同相写像であることがわかる（確かめよ(18)c）。定め方から、 $(H \times H)(R_G)$ が R_F の open subset であることも明らか。

R_F と R_G との差を記述するため、閉集合 $Y \subset X_G$ を構成したい。 $\delta_k : \mathbb{Z}V_k \rightarrow \mathbb{Z}V_{k+1}$, $v \in V_k, v' \in V_{k+1}$ に対して、

$$\delta_k(v, v') := \delta_k(v) \text{ における } v' \text{ の係数}$$

であった。

$$\delta_k^+(v, v') := 1 + \max\{0, \delta_k(v, v')\}, \quad \delta_k^-(v, v') := \delta_k^+(v, v') - \delta_k(v, v')$$

とおく。

$$\alpha_{G_{k+1}}(v) = \xi_{k+1}(\eta_k(v)) = \xi_{k+1}(\delta_k(v) + q_k(\bar{v})) = \delta_k(v) + q_k(\bar{v}) + (\mathbb{Z}W_{k+1} \text{ の元})$$

であって、

$$\delta_k(v) + q_k(\bar{v}) \stackrel{(vi)}{\geq} \delta_k(v) \pm 3\delta_k(v) + 2v' \geq \pm 2\delta_k(v) + 2v'$$

となるから、

$$\#G(v, v') \geq 2(|\delta_k(v, v')| + 1) \geq 2\delta_k^+(v, v')$$

を得る。また、

$$\#G(v, \bar{v}') \geq \eta_k(v, v') \cdot \xi_{k+1}(v', \bar{v}') \stackrel{(v)}{\geq} \eta_k(v, v')$$

となるから、上と同様に

$$\#G(v, \bar{v}') \geq 2\delta_k^-(v, v')$$

を得る。同様にして

$$\#G(\bar{v}, v') = q_k(\bar{v}, v') \geq 2\delta_k^-(v, v')$$

$$\#G(\bar{v}, \bar{v}') \geq \eta_k(\bar{v}, v') \cdot \xi_{k+1}(v', \bar{v}') \geq \eta_k(\bar{v}, v') \geq 2\delta_k^+(v, v')$$

もわかる。そこで、 $u \in V_k \sqcup \bar{V}_k$, $u' \in V_{k+1} \sqcup \bar{V}_{k+1}$ に対して部分集合 $\Delta(u, u') \subset G(u, u')$ を、

$$\#\Delta(v, v') = \#\Delta(\bar{v}, \bar{v}') = \delta_k^+(v, v')$$

$$\#\Delta(v, \bar{v}') = \#\Delta(\bar{v}, v') = \delta_k^-(v, v')$$

となるように定める。そして、写像 $h : G_{k+1} \rightarrow F_{k+1}$ に、

$$h(\Delta(v, v')) = h(\Delta(\bar{v}, \bar{v}')) \subset F(\bar{v}, \bar{v}')$$

$$h(\Delta(v, \bar{v}')) = h(\Delta(\bar{v}, v')) \subset F(\bar{v}, \bar{v}')$$

という条件を新たに課す。 $\gamma : \Delta(v, v') \rightarrow \Delta(\bar{v}, \bar{v}')$ を、 $h(\gamma(e)) = h(e)$ が成り立つように定める。また、これの逆写像も γ と書くことにする。 $\Delta(v, \bar{v}') \sqcup \Delta(\bar{v}, v')$ においても同様に γ を定める。 $\gamma^2 = \text{id}$ が成り立っている。

さらに、

$$\begin{aligned} \#(G(v, v') \setminus \Delta(v, v')) &= \delta_k(v, v') + q_k(\bar{v}, v') - \delta_k^+(v, v') \\ &= q_k(\bar{v}, v') - \delta_k^-(v, v') \\ &= \#(G(\bar{v}, v') \setminus \Delta(\bar{v}, v')) \end{aligned}$$

であるから、

$$h(G(v, v') \setminus \Delta(v, v')) = h(G(\bar{v}, v') \setminus \Delta(\bar{v}, v')) \subset F(\bar{v}, \bar{v}')$$

という条件も課すことができる。すると自動的に

$$h(G(\bar{v}, \bar{v}') \setminus \Delta(\bar{v}, \bar{v}')) = h(G(v, \bar{v}') \setminus \Delta(v, \bar{v}')) \subset F(\bar{v}, \bar{v}')$$

も成り立つことになる。

このようにして構成した Δ は (Z, G) の sub-BD とみなすことができる。 $Y := X_\Delta$ とおく。作り方から Y は R_G -étale かつ R_G -thin である。明らかに γ は Y 上の位数 2 の同相写像を導く。これも $\gamma : Y \rightarrow Y$ と書くことにして、

$$Q := (R_G|Y) \vee \{(y, \gamma(y)) \mid y \in Y\}$$

とおく。 Q は Y 上の AF 同値関係であって、 $R_G|Y$ を open subrelation として含む。

あとは、 $(H \times H)(R_G \vee Q) = R_F$ が言えればよい。このほうは明らかだから、 \square を示す。 $x, y \in X_G$ が $(H(x), H(y)) \in R_F$ を満たすとする。すなわち、ある k_0 が存在して、 $h(x(k)) = h(y(k))$, $k \geq k_0$ である。ある $k \geq k_0$ において $s(x(k)) = s(y(k))$ であったとすると、 h の性質から、 $x(k) = y(k)$ となる。すると $s(x(k+1)) = r(x(k)) = r(y(k)) = s(y(k+1))$ となるので、同じ議論を繰り返すことができる。つまり $(x, y) \in R_G$ である。全ての $k \geq k_0$ に対して $s(x(k)) \neq s(y(k))$ であったとする。各 k に対して $v_k \in V_k$ が存在して、 $\{s(x(k)), s(y(k))\} = \{v_k, \bar{v}_k\}$ となっている。ゆえに、 Δ の定め方より、 $x(k), y(k) \in \Delta_k$ かつ $\gamma(x(k)) = y(k)$ がわかる。 $x(1), \dots, x(k-1)$ を適当に取り換えることにより、 $(x, x') \in R_G$ となる $x' \in Y$ を得る。このとき $(\gamma(x'), y) \in R_G$ である。よって $(x, y) \in R_G \vee Q$ である。これで示せた。 \square

Definition 6.4. étale 同値関係 R がある AF 同値関係に軌道同型であるとき、 R は affable であるという。

Theorem 5.7 より、コントロール極小 \mathbb{Z} 系 (X, φ) に付随する同値関係 R_φ は affable である。

Theorem 6.5. $R_i \subset X_i \times X_i$, $i = 1, 2$ を極小な étale 同値関係とする。 R_i が affable であるとき次は同値。

- (1) R_1 と R_2 とは軌道同型。
- (2) $(D_m(R_1), D_m^+(R_1), [1_{X_1}]_m) \cong (D_m(R_2), D_m^+(R_2), [1_{X_2}]_m)$

Proof. (1) \Rightarrow (2) は既に Lemma 1.9 で示した。逆を示す。 R_1 と R_2 は AF 同値関係であるとしてよい。 Proposition 3.4 より、

$$(D(R_1)/\text{Inf の 3 つ組}) \cong (D(R_2)/\text{Inf の 3 つ組})$$

となる。ゆえに、 Theorem 6.1 と Theorem 2.10 より、 R_1 と R_2 は軌道同型であると結論できる。 \square

Remark 6.6. $\varphi : \mathbb{Z}^N \curvearrowright X$ をコントロール極小 \mathbb{Z}^N 系とすると、 R_φ も affable であることが知られている。

Remark 6.7 (章末のひとこと). 極小 AF 同値関係の軌道同型による分類 (それは上の Theorem 6.5 と等価である) は Giordano-Putnam-Skau の記念碑的な結果である ([8, Theorem 2.3]). しかし [8] の証明はかなり技術的で、読みやすいとは言えない。その後、Putnam は論文 [15] において、概念的に理解しやすい新しい証明を与えた。この章の議

論は [15] に沿っている。Example 6.3 は Putnam のお気に入りの例であり、彼の論文にしばしば登場する。affable という概念が最初に定義されたのは [9] である。Giordano-Putnam-Skau による一連の成果のあと、極小 \mathbb{Z}^N 系の軌道同型による分類へと研究は向かった。 \mathbb{Z}^2 の場合が [6] で解決され、一般の \mathbb{Z}^N の場合が [7] で解決された。

7 「確かめよ」の回答

前章までの「確かめよ」のうち、b または c の記号が付されているものについて、回答を示す。a の記号が付されているものは読者に任せることとする。

(3) について

まず、 $\Delta := \{(x, x) \in R \mid x \in X\}$ が閉集合であることを示す。任意の $(x, y) \in R \setminus \Delta$ に対し、 $U \subset R$ を $(x, y) \in U$ なる bijection とする。このとき、 x, y の開近傍 V_x, V_y であって、 $V_x \subset r(U)$, $V_y \subset s(U)$, $V_x \cap V_y = \emptyset$ となるものが存在する。すると、 $W := U \cap r|_U^{-1}(V_x) \cap s|_U^{-1}(V_y)$ は開集合で $(x, y) \in W \subset R \setminus \Delta$ となる。よって、 $R \setminus \Delta$ は開集合である。

次に、 Δ が開集合であることを示す。今、 $p : R^{(2)} \ni ((x, y), (y, z)) \mapsto (x, z) \in R$ は開写像であることに注意する。実際、 $A \subset R^{(2)}$ を開集合とするとき、任意の $((x, y), (y, z)) \in A$ に対し、 $(x, z) \in U \subset R$ なる bisection U をとると、 p の連続性と、bisections が開基であることから、 $(x, y) \in V \subset R$, $(y, z) \in W \subset R$ なる bisections V, W であって、 $(V \times W) \cap R^{(2)} \subset A$ かつ $p((V \times W) \cap R^{(2)}) \subset U$ となるものが存在する。このとき、bisections V, W による partial homeo を $a : r(V) \rightarrow s(V)$, $b : r(W) \rightarrow s(W)$ とすると、 a, b の $X \times X$ におけるグラフがそれぞれ V, W となっている。すると、 $b \circ a : a^{-1}(s(V) \cap r(W)) \rightarrow b(s(V) \cap r(W))$ も partial homeo であり、かつ、 $b \circ a$ の $X \times X$ におけるグラフは $p((V \times W) \cap R^{(2)})$ となる。ゆえに、 $r(p((V \times W) \cap R^{(2)})) = a^{-1}(s(V) \cap r(W)) \subset X$ が open であることと U が bisection であることより、 $(x, z) \in p((V \times W) \cap R^{(2)})$ は open となる。ここで、 $((x, y), (y, z)) \in A$ は任意だったので、 $p(A) \subset R^{(2)}$ が open といえる。よって、 p は開写像である。(ちなみに、 p は局所同相であることもいえる。実際、任意の $((x, y), (y, z)) \in R^{(2)}$ に対し、bisections $(x, y) \in V$, $(y, z) \in W$ をとると、 $p((V \times W) \cap R^{(2)})$ は開集合かつ $p : (V \times W) \cap R^{(2)} \rightarrow p((V \times W) \cap R^{(2)})$ は全単射で連続な開写像である。) すると、任意の $(x, x) \in \Delta$ に対し、 $(x, x) \in U$: bisection をとり、 $a : r(U) \rightarrow s(U)$ を U による partial homeo とするとき、 $R \ni (x, y) \mapsto (y, x) \in R$ が同相であることから、partial homeo $a^{-1} : s(U) \rightarrow r(U)$ のグラフも R の bisection となる。これを U^{-1} とかくとき、

$p : R^{(2)} \rightarrow R$ が開写像であることから $\{(x, x) \in R \mid x \in r(U)\} = p((U \times U^{-1}) \cap R^{(2)})$ は開集合となる。よって、 Δ は開集合である。

(4) について

$A \subset X$ を空でない clopen set とする。 R が minimal なので、任意の $x \in X$ に対し、 $R[x]$ は X で稠密である。したがって、bisection $U \subset R$ であって、 $x \in r(U)$, $s(U) \subset A$ となるものが存在する。つまり

$$\{r(U) \mid U \text{ is a bisection such that } s(U) \subset A\}$$

は X の開被覆になる。 X はコンパクトなので、有限部分被覆 $\{r(U_1), r(U_2), \dots, r(U_n)\}$ が存在する。すると任意の $\mu \in M(R)$ に対して

$$1 = \mu(X) \leq \sum_{i=1}^n \mu(r(U_i)) = \sum_{i=1}^n \mu(s(U_i)) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A) = n\mu(A)$$

が得られる。

(5) について

$R_{E,n}$ が $R_{E,n+1}$ の中で開集合であることから、 $\forall n < \forall m$ に対し、 $R_{E,n}$ は $R_{E,m}$ の中で開集合である。ゆえに、 $R_{E,n}$ は R_E の開集合であり、かつ $R_{E,n}$ における R_E の相対位相は元々 $R_{E,n}$ に入れていた $X_E \times X_E$ の相対位相と一致する。すると、 $R_{E,n}$ は $X_E \times X_E$ の閉集合であることから R_E のコンパクト開集合であることがいえて、また、 $R_{E,n}$ における R_E の相対位相はコンパクト距離化可能であることもいえる。このことと、 $R_E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_{E,n}$, $R_{E,n} \subset R_{E,n+1}$ であることから、 R_E は局所コンパクトハウスドルフかつ第二可算なので、特に距離化可能でもある。ここで、 $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset R_E$, $\xi \in R_E$ に対し、

$$\begin{aligned} \xi_n &\rightarrow \xi \text{ in } R_E \\ \iff \exists m, N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \{\xi_n\}_{n \geq N} &\subset R_{E,m} \text{ and } \xi_n \rightarrow \xi \text{ in } R_{E,m} \text{ as } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

であることがいえるので、このことと、各 $R_{E,n}$ が étale であることから、 R_E が Definition 1.4 の (1)(2)(3) の条件を満たすこともいえる。よって、 R_E は étale である。

(6) について

任意の開集合 $O \subset R_E$ と任意の $(a, b) \in O$ に対し、 $(a, b) \in R_{E,n}$ なる $n \in \mathbb{N}$ をとると、 $R_{E,n} \cap O$ が open なので、

$$\exists m > n \text{ s.t. } \{(x, y) \in R_{E,n} \mid x \in C(p), y \in C(q)\} \subset R_{E,n} \cap O$$

(ただし、 $p := (a(1), a(2), \dots, a(m))$, $q := (b(1), b(2), \dots, b(m))$ とする。) である。このとき、 $(a, b) \in R_{E,n}$ より、特に、 $a(n+1) = b(n+1), \dots, a(m) = b(m)$ なので、

$$\begin{aligned} U(p, q) &:= \{(x, y) \in R_{E,m} \mid x \in C(p), y \in C(q)\} \\ &= \{(x, y) \in R_{E,n} \mid x \in C(p), y \in C(q)\} \end{aligned}$$

となる。よって、 $U(p, q) \subset O$ より $U(p, q)$ たちは R_E の開基となる。

(7) について

$p \in E_{0,n}$ に対し、 $F_p := \{e \in F_{0,m} \mid C(e) \subset h(C(p))\}$ とする。このとき、 $\{C(q) \mid q \in F_{0,m}\}$ が $\{h(C(p)) \mid p \in E_{0,n}\}$ の細分であることから、

$$F_{0,m} = \bigsqcup_{p \in E_{0,n}} F_p, \quad h(C(p)) = \bigsqcup_{e \in F_p} C(e)$$

となる。また、 $p \in E_{0,n}$, $w \in W_m$ に対し、 $F_{p,w} := \{e \in F_p \mid r(e) = w\}$ とするとき、 $F_p = \bigsqcup_{w \in W_m} F_{p,w}$ となる。すると、 $p, q \in E_{0,n}$ (ただし $r(p) = r(q) \in V_n$) に対し、 $U(p, q)$ をグラフとして与える partial homeo を $J_{p,q} : C(p) \rightarrow C(q)$ とすると、任意の $w \in W_m$ に対し、まず、 $(h \times h)(R_{E,n}) \subset R_{F,m}$ より、

$$(h \circ J_{p,q} \circ h^{-1}) \left(\bigsqcup_{e \in F_{p,w}} C(e) \right) = \bigsqcup_{e' \in F_{q,w}} C(e')$$

がいえる。(これは、 $F_{p,w}, F_{q,w}$ が空となる場合も含むことに注意する。つまり、 $F_{p,w} = \emptyset \iff F_{q,w} = \emptyset$ もいえる。) さらに、 $(h \times h)(R_{E,n})$ においては $U(q_1, q_2)$ ($q_1, q_2 \in F_{0,m}$, $r(q_1) = r(q_2)$) による分割は $(h \times h)(U(p_1, p_2))$ ($p_1, p_2 \in E_{0,n}$, $r(p_1) = r(p_2)$) による分割の細分となっているので、全単射 $j_{p,q,w} : F_{p,w} \rightarrow F_{q,w}$ が存在して、任意の $e \in F_{p,w}$ に対し、 $(h \circ J_{p,q} \circ h^{-1})(C(e)) = C(j_{p,q,w}(e))$ となることがいえる。ゆえに、 $e \in F_{0,m}$ に対し、 $\bar{e} \in G_0$ とは、 $C(e) \subset h(C(p))$ なるただ一つの $p \in E_{0,n}$ をとり、 $w := r(e)$ とするとき、集合 $\{j_{p,q,w}(e) \mid r(p) = r(q)\}$ のことである。よって、 $p \in E_{0,n}$, $\bar{e} \in G_0$ ($e \in F_{0,m}$) with $r(p) = s(\bar{e})$ に対し、 $C(f) \subset h(C(p))$ かつ $\bar{f} = \bar{e}$ なる $f \in F_{0,m}$ がただ一つ存在するので、 p と \bar{e} をつないだ辺に f を対応させることで、 $E_{0,n}$ と G_0 をつないでできる path の集合と $F_{0,m}$ との間の一対一対応が定まる。

(9) について

$a \in \text{Inf}(G)$ のとき、 $\forall v \in G^+ \setminus \{0\}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ に対し、 $ka \leq v$ をいえばよい。以下これを示す。今、 v : order unit なので、 $\exists n \in \mathbb{N}$ with $u \leq nv$ である。このとき、 $nka \leq u \leq nv$ なので、 $(G, G^+) : \text{unperforated}$ より $ka \leq v$ となる。

(10) について

まず、Definition 3.1 の (1) から (4) の条件を確かめて、 $(G/\text{Inf}(G), (G/\text{Inf}(G))^+)$ が simple DG であることをいう。

(1) G が可算アーベル群より $G/\text{Inf}(G)$ も可算アーベル群となる。また、 $G^+ + G^+ \subset G^+$ より $(G/\text{Inf}(G))^+ + (G/\text{Inf}(G))^+ \subset (G/\text{Inf}(G))^+$ がいえて、 $G^+ - G^+ = G$ より $(G/\text{Inf}(G))^+ - (G/\text{Inf}(G))^+ = G/\text{Inf}(G)$ がいえる。

最後に $(G/\text{Inf}(G))^+ \cap -(G/\text{Inf}(G))^+ = \{\bar{0}\}$ を示す。 $\bar{a} \in (G/\text{Inf}(G))^+ \cap -(G/\text{Inf}(G))^+$ ($a \in G$) とすると、 $\exists b, c \in G^+$ with $\bar{a} = \bar{b} = -\bar{c}$ となる。このとき、 $b + c \in \text{Inf}(G)$ より $b \in \text{Inf}(G)$ となる。実際、 $u \in G^+$ を order unit とすると、 $\forall k \in \mathbb{N}$ に対し $kb \leq k(b + c) \leq u$ ($\because c \in G^+$) となる。また、 $\forall k \in \mathbb{N}$ に対し、 $b \in G^+$ より $-kb \leq u$ となる。よって、 $b \in \text{Inf}(G)$ なので、 $\bar{a} = \bar{b} = \bar{0}$ を得る。

(2) $\forall \bar{a} \in G/\text{Inf}(G), \forall \bar{u} \in (G/\text{Inf}(G))^+ \setminus \{\bar{0}\}$ に対し、 $u \in G^+ \setminus \text{Inf}(G)$ とできる。このとき、特に $u \in G^+ \setminus \{0\}$ である。すると、 G :simple より、 $\exists n \in \mathbb{N}$ with $a \leq nu$ なので、 $\bar{a} \leq n\bar{u}$ となる。よって、 $G/\text{Inf}(G)$ は simple である。

(3) $\bar{a} \in G/\text{Inf}(G), n \in \mathbb{N}$ が、 $n\bar{a} \in (G/\text{Inf}(G))^+$ をみたすとする。このとき、 $\exists b \in \text{Inf}(G)$ with $na + b \geq 0$ である。ここで、まず $na + b > 0$ の場合、 G :simple より $na + b$ は order unit なので、このことと $b \in \text{Inf}(G)$ より、 $na + b \geq -(n-1)b$ となる。ゆえに、 $n(a + b) \geq 0$ なので、 (G, G^+) :unperforated より $a + b \geq 0$ となる。よって、 $\bar{a} \in (G/\text{Inf}(G))^+$ となる。次に、 $na + b = 0$ の場合、 $na \in \text{Inf}(G)$ より $a \in \text{Inf}(G)$ となる。実際、 $u \in G^+$ を order unit とするとき、 nu も order unit なので、 $\forall k \in \mathbb{Z}$ に対し、 $n(ka) = k(na) \leq nu$ となる。すると、 (G, G^+) :unperforated より、 $ka \leq u$ なので、 $a \in \text{Inf}(G)$ である。ゆえに $\bar{a} = \bar{0} \in (G/\text{Inf}(G))^+$ となる。よって、 $(G/\text{Inf}(G), (G/\text{Inf}(G))^+)$ も unperforated である。

(4) $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2 \in G/\text{Inf}(G)$ が $\bar{a}_i \leq \bar{b}_j$ ($i, j = 1, 2$) をみたすとする。このとき、 $\exists t_{ij} \in \text{Inf}(G)$ with $a_i \leq b_j + t_{ij}$ ($i, j = 1, 2$) となる。このとき、まず $a_i = b_j + t_{ij}$ となる i, j がある場合、 $\bar{a}_i = \bar{b}_j =: \bar{c}$ より \bar{c} が interpolation を与える元となっている。次に、任意の i, j で $a_i < b_j + t_{ij}$ となる場合、 $b_j + t_{ij} - a_i \in G^+ \setminus \{0\}$ は G :simple より order unit であり、また、 $t_{ij} \in \text{Inf}(G)$ なので、 $t_{ij} \leq b_j + t_{ij} - a_i$ より $a_i \leq b_j$ ($i, j = 1, 2$) となる。すると、 a_1, a_2, b_1, b_2 に対し、 (G, G^+) の Riesz interpolation property より、 $\exists c \in G$ with $a_i \leq c \leq b_j$ ($i, j = 1, 2$) となる。ゆえに、 $\bar{a}_j \leq \bar{c} \leq \bar{b}_j$ ($j = 1, 2$) となるので、 $(G/\text{Inf}(G), (G/\text{Inf}(G))^+)$ も Riesz interpolation property をみたすことがいえた。(ちなみに、今 $a < b + t, t \in \text{Inf}(G)$ ならば $a \leq b$ であることを示したが、より強く、 $a < b + t, t \in \text{Inf}(G)$ ならば $a < b$ であることが示せる。実際、 $a \in G^+ \setminus \{0\}, t \in \text{Inf}(G)$ に対して、 $a + t \in G^+ \setminus \{0\}$ を示せばいい。仮定より、 $-2t \leq a$ である。こ

れより、 $2(a+t) \geq 2a - a = a > 0$ となるから、 G が unperforated であることより、 $a+t > 0$ を得る。）

(1) から (4) より、 $(G/\text{Inf}(G), (G/\text{Inf}(G))^+)$ は simple DG である。

最後に、 $\text{Inf}(G/\text{Inf}(G)) = \{0\}$ を示す。 $\bar{a} \in \text{Inf}(G/\text{Inf}(G))$ とすると、 $G/\text{Inf}(G)$:simple より、 $\bar{u} \in (G/\text{Inf}(G))^+ \setminus \{\bar{0}\}$ (ただし、 $u \in G^+ \setminus \text{Inf}(G)$ とする) に対し、 $k\bar{a} \leq \bar{u}$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$) となる。このとき、各 $k \in \mathbb{Z}$ に対し、 $\exists b_k \in \text{Inf}(G)$ with $ka \leq u + b_k$ である。ここで、 $u \in G^+ \setminus \{0\}$ は order unit なので、 $b_k \leq u$ だから、 $ka \leq 2u$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$) である。特に、 $2ka \leq 2u$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$) なので、 (G, G^+) が unperforated であることより、 $ka \leq u$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$) となる。よって、 $a \in \text{Inf}(G)$ なので、 $\bar{a} = \bar{0}$ だから、 $\text{Inf}(G/\text{Inf}(G)) = \{0\}$ が示せた。

(11) について

まず、

$$\text{Inf}(D(R_E)) = \left\{ [f] \in D(R_E) \mid \int_{X_E} f d\mu = 0 \quad \forall \mu \in M(R_E) \right\}$$

を示す。「 \subset 」を言う。 $[f] \in \text{Inf}(D(R_E))$ ($f \in C(X_E, \mathbb{Z})$) に対し、 $[1_{X_E}] \in D(R_E)$ は order unit なので、 $k[f] \leq [1_{X_E}]$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$) となる。このとき、

$$k \int_{X_E} f d\mu \leq \int_{X_E} 1_{X_E} d\mu = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall \mu \in M(R_E)$$

より

$$\left| \int_{X_E} f d\mu \right| \leq \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall \mu \in M(R_E)$$

なので、 $\int_{X_E} f d\mu = 0 \quad \forall \mu \in M(R_E)$ となる。次に「 \supset 」を言う。 $f \in C(X_E, \mathbb{Z})$ が

$$\int_{X_E} f d\mu = 0 \quad \forall \mu \in M(R_E)$$

となるとき、 $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall \mu \in M(R_E)$ に対し、

$$\int_{X_E} 1_{X_E} - kf d\mu = 1 > 0$$

より $[1_{X_E} - kf] \in D^+(R_E) \setminus \{0\}$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$) となる。よって、 $k[f] \leq [1_{X_E}]$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$) より $[f] \in \text{Inf}(D(R_E))$ となる。これで示せた。

すると、 $\alpha : D(R_E) \ni [f] \mapsto [f]_m \in D_m(R_E)$ という全射群準同型において、 $\text{Ker } \alpha = \text{Inf}(D(R_E))$ となるので、 $D(R_E)/\text{Inf} \cong D_m(R_E)$ という群同型が α から定まる。また、

このとき $\alpha(D^+(R_E)) = D_m^+(R_E)$ よりこの同型は ordered Abelian group としての同型となる。

(12) について

R_E がただ一つの不変測度をもち、この測度に関する積分が τ に対応するということと Proposition 3.4 から従うことではあるが、以下ではこれとは別に直接証明する。まず、 $a \in D(R_E)$ に対し、 $\tau(a) > 0 \Rightarrow a \in D(R_E)^+$ を示す。 $a = [cv_n + c'v'_n]$ (ただし、 $c, c' \in \mathbb{Z}$) とする。このとき $\tau(a) > 0$ より $c + c' > 0$ である。ここで、

$$a = \frac{c+c'}{2}[v_n + v'_n] + \frac{c-c'}{2}[v_n - v'_n]$$

であるが、

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

なので

$$a = \frac{c+c'}{2}5^k[v_{n+k} + v'_{n+k}] + \frac{c-c'}{2}3^k[v_{n+k} - v'_{n+k}] \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

である。ここで、 $c + c' > 0$ なので十分大きい k では $5^k(c + c') > 3^k|c - c'|$ となるから、 $a \in D(R_E)^+$ である。よって、示せた。すると、 $[v_n - v'_n] \in D(R_E)$ に対し、 $\tau([v_n - v'_n]) = 0$ より $\forall k \in \mathbb{Z}$ で $\tau([1_{X_E}] - k[v_n - v'_n]) = 1 > 0$ なので、 $[1_{X_E}] \geq k[v_n - v'_n]$ である。よって $[v_n - v'_n] \in \text{Inf}(D(R_E))$ となる。

(13) について

$\psi_E : X_E \rightarrow X_E$ を次のように定める。まず、 $\psi_E(x_{\min}) := x_{\max}$ とする。次に、 $x = (x(i))_{i=1}^{\infty} \in X_E$ が x_{\min} でないとき、

$$k := \min\{i \mid x(i) \notin E_{\min}\}$$

が定まるので、 $\psi_E(x) := (y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k, x(k+1), x(k+2), \dots) \in X_E$ (ただし、 $y_1, \dots, y_{k-1} \in E_{\max}$ であり、 y_k は $r^{-1}(r(x(k)))$ において $x(k)$ より 1 つ小さい元とする) と定める。このとき $\psi_E \circ \varphi_E = \varphi_E \circ \psi_E = \text{id}_{X_E}$ がいえる。また、 $x = (x(i))_{i=1}^{\infty}$, $y = (y(i))_{i=1}^{\infty} \in X_E$ が $n \in \mathbb{N}$ に対し $x(i) = y(i)$ ($i = 1, \dots, n+1$) をみたすとき、 $\varphi_E(x)(i) = \varphi_E(y)(i)$ ($i = 1, \dots, n$) となるので、 φ_E は連続である。同様に、 ψ_E も連続であることがいえるので、 φ_E は同相写像である。

次に φ_E が引き起こす \mathbb{Z} 作用は minimal であることを示す。まず、 $\lceil x = (x_1, x_2, \dots) \in X_E$ (ただし、 $x_1, \dots, x_n \in E_{\min}$) となる任意の x に対し、

$$\{(y_1, \dots, y_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) \in X_E \mid (y_1, \dots, y_n) \in E(*, r(x_n))\} \subset \{\varphi_E^k(x) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

となる」(♣) ことを $n \in \mathbb{N}$ に関する帰納法で示す。実際、 $n = 1$ のときは (♣) が成り立つ。次に、 $n = m$ ($m \in \mathbb{N}$) のときまで (♣) が成り立つとし、 $x = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots) \in X_E$, $(x_1, \dots, x_{m+1}) \in E_{\min}$ とする。このとき、 $\{a_1, a_2, \dots, a_s\} := r^{-1}(r(x_{m+1}))$ (ただし、 $x_{m+1} = a_1 < a_2 < \dots < a_s$, $s := \#r^{-1}(r(x_{m+1}))$) とすると、

$$\{(y_1, \dots, y_{m+1}, x_{m+2}, \dots) \in X_E \mid (y_1, \dots, y_{m+1}) \in E(*, r(x_{m+1}))\} = \bigsqcup_{j=1}^s A_j$$

となる。ここで、

$$A_j := \{(y_1, \dots, y_m, a_j, x_{m+2}, \dots) \in X_E \mid (y_1, \dots, y_m) \in E(*, s(a_j))\}$$

とおいた。 $n = m$ の場合より、まず $A_1 \subset \{\varphi_E^k(x) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ がいえる。すると、 $z := (z_1, \dots, z_m, a_1, x_{m+2}, \dots) \in X_E$, $(z_1, \dots, z_m \in E_{\max})$ とするとき、 $z \in A_1$ より $\varphi_E(z) = (w_1, \dots, w_m, a_2, x_{m+2}, \dots) \in \{\varphi_E^k(x) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (ただし、 $w_1, \dots, w_m \in E_{\min}$) なので、再び $n = m$ の場合より、 $A_2 \subset \{\varphi_E^k(x) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ がいえる。以下帰納的に $A_j \subset \{\varphi_E^k(x) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ($j = 1, \dots, s$) がいえるので、 $n = m + 1$ の場合も (♣) が成り立つ。よって、任意の $n \in \mathbb{N}$ で (♣) が成り立つ。すると、任意の $x = (x(i))_{i=1}^{\infty} \in X_E$ に対し、 $y = (y(i))_{i=1}^{\infty} \in X_E$ が x と AF 同値ならば $\exists n \in \mathbb{N}$ with $x(i) = y(i)$ ($\forall i > n$) なので、 $z := (z_1, \dots, z_n, x(n+1), x(n+2), \dots) \in X_E$, $(z_1, \dots, z_n \in E_{\min})$ とするとき、 $x, y \in \{\varphi_E^k(z) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ となる。よって、 $R_E[x] \subset \{\varphi_E^k(x) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ となる。これと、 (V, E) が simple BD であることから、任意の $x \in X_E$ に対し $\{\varphi_E^k(x) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ が X_E で dense であることがいえるので、 φ_E による \mathbb{Z} 作用は minimal である。

(16) について

(1) \Rightarrow (2) 任意の $\xi \in R|Y$ に対し、 $\xi \in A \subset R$ なる bisection A をとる。また、 Y が R -étale より ξ の開近傍 B であって、 $B \cap (Y \times Y)$ が $R|Y$ の bisection となるものがとれる。このとき、 $\xi \in W := A \cap B \subset R$ は bisection であって、かつ $W' := W \cap (Y \times Y)$ も $R|Y$ の bisection となる。すると、 $r(W)$ open in X , $r(W')$ open in Y より $\exists U_r \subset X$ open such that $U_r \subset r(W)$ and $U_r \cap Y = r(W')$ である。同様に、 $\exists U_s \subset X$ open such that $U_s \subset s(W)$ and $U_s \cap Y = s(W')$ となる。このとき、 $r|_W : W \rightarrow r(W)$, $s|_W : W \rightarrow s(W)$ は homeo なので、 $\xi \in V := W \cap r|_W^{-1}(U_r) \cap s|_W^{-1}(U_s)$ は open である。この V が求める開集合である。実際、 $\zeta \in V$ に対し $r(\zeta) \in Y$ ならば $r(\zeta) \in Y \cap U_r = r(W')$ である。すると、 $r|_W : W \rightarrow r(W)$ は全単射より $\zeta \in W' = W \cap (Y \times Y)$ なので、 $s(\zeta) \in Y$ となる。同様に $s(\zeta) \in Y$ ならば $r(\zeta) \in Y$ となる。

(2) \Rightarrow (1) étale 同値関係の満たすべき条件のうち $R \cap (Y \times Y)$ が局所コンパクトであることと、 $r : (x, y) \mapsto x$ が局所同相であることを示す。残りの条件は相対位相の性質か

らすぐに示せる。まず、 $R \cap (Y \times Y)$ が局所コンパクトであることを示すが、 R が局所コンパクトなので、 $R \cap (Y \times Y)$ が R の閉集合であることをいえばよい。これを示す。 $(x, y) \in \overline{R \cap (Y \times Y)}$ のとき、 $\exists \{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset R \cap (Y \times Y)$ such that $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ である。このとき、 $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ かつ Y は閉集合なので、 $x, y \in Y$ であるから $(x, y) \in R \cap (Y \times Y)$ となる。よって、示せた。次に、 $R \cap (Y \times Y) \ni (x, y) \mapsto x \in Y$ が局所同相であることを示す。任意の $\xi \in R \cap (Y \times Y)$ に対し、 $\xi \in V \subset R$ を bisection とし、 $\xi \in U \subset R$ を (2) の条件を満たす開集合とすると、 $W := V \cap U \cap (Y \times Y)$ とすると、 $r(W)$ open in Y かつ $r : W \rightarrow r(W)$ は同相となる。よって、 $R \cap (Y \times Y) \rightarrow Y$ は局所同相である。

(17) について

$Q \subset Y \times Y$ が AF 同値関係なので、 $\exists \{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ compact open subrelations of Q such that $Q_n \subset Q_{n+1}$ and $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ である。

このとき、 $n \in \mathbb{N}$ に対し、

$$\widetilde{Q}_n := \{(y, k), (y', k) \in Z \times Z \mid (y, y') \in Q_n, k = 1, 2, \dots, n\} \cup \{(z, z) \mid z \in Z\}$$

とすると、これは同値関係であり、 $\widetilde{Q}_n \subset \widetilde{Q}_{n+1}$ かつ $\widetilde{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{Q}_n$ となる。すると、 $\widetilde{Q}_n \subset Z \times Z$ に $Z \times Z$ の相対位相を入れたときにコンパクト距離化可能かつ同値関係となることがいえて、かつ \widetilde{Q}_n が \widetilde{Q}_{n+1} の中で開集合となることがいえれば、 \widetilde{Q} に inductive limit topology を入れることで、問題 (5) の証明と同様にして、 \widetilde{Q} が étale かつ \widetilde{Q}_n が compact open subrelation であることがいえるので、Remark 2.5 より、 \widetilde{Q} が AF 同値関係であることがいえる。以下、これらのことを示す。まず、 \widetilde{Q}_n が étale であることを示す。 \widetilde{Q}_n には $Z \times Z$ の直積位相をいれるので、étale 同値関係の満たすべき条件のうち、 $r : (x, y) \mapsto x$ が局所同相であること以外はすぐにいえる。以下 $r : (x, y) \mapsto x$ が局所同相であることを示す。まず、 $((x, k), (x', k)) \in Z \times Z$ ($(x, x') \in Q_n, k = 1, \dots, n$) のとき、 $(x, x') \in Q_n$ に対し、 $\exists U \subset Q$ open in étale topology of Q such that $(x, x') \in U \subset Q_n, r(U) \subset X$ open and $r : U \rightarrow r(U)$ homeo である。このとき、 Q_n は étale 位相でコンパクトなので、 Q_n 上で étale 位相と $Y \times Y$ の相対位相は一致するから、 U は Q_n の中で $Y \times Y$ の相対位相で開集合かつ、 U にこの位相を入れて $r : U \rightarrow r(U)$ は同相となる。すると、

$$\widetilde{U} := \{(y, k), (y', k) \in Z \times Z \mid (y, y') \in U\}$$

とするとき、 \widetilde{U} は \widetilde{Q}_n の中で開集合、かつ $r(\widetilde{U}) \subset Z$ は開集合、かつ $r : \widetilde{U} \rightarrow r(\widetilde{U})$ は同相となる。次に、 $(z, z) \in Z \times Z$ ($z \in Z \setminus (Y \times \{1, \dots, n\})$) のとき、 $Z \setminus (Y \times \{1, \dots, n\}) \subset Z$

open より

$$\tilde{V} := \{(w, w) \in Z \times Z \mid w \in Z \setminus (Y \times \{1, \dots, n\})\}$$

は \widetilde{Q}_n の中で開集合かつ $r(\tilde{U})$ は開集合かつ $r : \tilde{V} \rightarrow r(\tilde{V})$ は同相である。よって、 $r : (x, y) \mapsto x$ は局所同相なので、 \widetilde{Q}_n は étale である。次に、 \widetilde{Q}_n がコンパクト距離化可能であることを示す。今、 $Z \times Z$ はコンパクト距離化可能なので、 \widetilde{Q}_n が $Z \times Z$ の中で閉集合であることをいえばよい。これは、 Q_n が $Y \times Y$ の相対位相でコンパクトであることからいえる。最後に、 \widetilde{Q}_n が $\widetilde{Q_{n+1}}$ の中で開集合であることを示す。 Q_n は Q の中で étale 位相で開集合であり、かつ Q_{n+1} 上で étale 位相と $Y \times Y$ の相対位相が一致することから、 Q_n は Q_{n+1} に $Y \times Y$ の相対位相を入れたとき開集合となるので、各 $k = 1, \dots, n$ に対し、

$$A_k := \{(y, k), (y', k) \in Z \times Z \mid (y, y') \in Q_n\}$$

は $\widetilde{Q_{n+1}}$ の中で開集合である。また、 $\widetilde{Q_{n+1}}$ は étale より、 $\{(z, z) \mid z \in Z\}$ は $\widetilde{Q_{n+1}}$ の中で開集合である。よって、 $\widetilde{Q}_n = \bigcup_{k=1}^n A_k \cup \{(z, z) \mid z \in Z\}$ なので、 \widetilde{Q}_n は $\widetilde{Q_{n+1}}$ の中で開集合である。

(18) について

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall g \in G_k$ に対し、 $s(h(g)) = \zeta_{k-1}(s(g))$, $r(h(g)) = \zeta_k(r(g))$ なので、 H は well-defined である。また、 H は連続であり、 X_G がコンパクト、 X_F がハウスドルフであることから、 H が全単射であることがいえれば同相であることもいえる。

まず H が単射であることを示す。 $x = (x(i))_{i=1}^{\infty}, y = (y(i))_{i=1}^{\infty}$ in X_G が $x \neq y$ とすると、 $\exists n \in \mathbb{N}$ such that $x(i) = y(i)$ ($\forall i = 1, \dots, n-1$) and $x(n) \neq y(n)$ である。このとき、 $x(n-1) = y(n-1)$ より $s(x(n)) = s(y(n)) =: u$ なので、 $h : G_{k+1} \cap s^{-1}(u) \rightarrow F_{k+1} \cap s^{-1}(\zeta_k(u))$ が全単射であることから、 $h(x(n)) \neq h(y(n))$ となる。ゆえに、 $H(x) \neq H(y)$ である。

次に H が全射であることを示す。 $y = (y(i))_{i=1}^{\infty} \in X_F$ とする。まず、 $h : G_1 \rightarrow F_1$ は全単射より、 $\exists x(1) \in G_1$ such that $h(x(1)) = y(1)$ である。このとき、 $u := r(x(1)) \in Z_1$ とすると、 $\zeta_1(u) = r(y(1)) = s(y(2))$ となる。ゆえに、 $h : G_2 \cap s^{-1}(u) \rightarrow F_2 \cap s^{-1}(\zeta_1(u))$ が全単射より $\exists x(2) \in G_2 \cap s^{-1}(u)$ such that $h(x(2)) = y(2)$ である。ここで、 $r(x(1)) = s(x(2))$ であることに注意する。すると、以下同様にして、 $x(1) \in G_1, \dots, x(n) \in G_n$ であって、 $r(x(i)) = s(x(i+1))$ ($i = 1, \dots, n-1$) かつ $h(x(i)) = y(i)$ を満たすものが定まったとき、 $x(n+1) \in G_{n+1} \cap s^{-1}(r(x(n)))$ かつ $h(x(n+1)) = y(n+1)$ を満たす $x(n+1)$ が定まるので、帰納的に $x = (x(i))_{i=1}^{\infty} \in X_G$ が定まる。このとき $H(x) = y$ となる。よって、 H は全射である。

参考文献

- [1] M. Boyle and J. Tomiyama, *Bounded topological orbit equivalence and C^* -algebras*, J. Math. Soc. Japan, 50 (1998), pp. 317–329.
- [2] K. R. Davidson, *C^* -algebras by example*, vol. 6 of Fields Institute Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [3] E. G. Effros, *Dimensions and C^* -algebras*, vol. 46 of CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, D.C., 1981.
- [4] E. G. Effros, D. E. Handelman, and C. L. Shen, *Dimension groups and their affine representations*, Amer. J. Math., 102 (1980), pp. 385–407.
- [5] T. Giordano, H. Matui, I. F. Putnam, and C. F. Skau, *The absorption theorem for affable equivalence relations*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 28 (2008), pp. 1509–1531.
- [6] T. Giordano, H. Matui, I. F. Putnam, and C. F. Skau, *Orbit equivalence for Cantor minimal \mathbb{Z}^2 -systems*, J. Amer. Math. Soc., 21 (2008), pp. 863–892.
- [7] T. Giordano, H. Matui, I. F. Putnam, and C. F. Skau, *Orbit equivalence for Cantor minimal \mathbb{Z}^d -systems*, Invent. Math., 179 (2010), pp. 119–158.
- [8] T. Giordano, I. F. Putnam, and C. F. Skau, *Topological orbit equivalence and C^* -crossed products*, J. Reine Angew. Math., 469 (1995), pp. 51–111.
- [9] T. Giordano, I. F. Putnam, and C. F. Skau, *Affable equivalence relations and orbit structure of Cantor dynamical systems*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 24 (2004), pp. 441–475.
- [10] T. Giordano, I. F. Putnam, and C. F. Skau, *The orbit structure of Cantor minimal \mathbb{Z}^2 -systems*, in Operator Algebras: The Abel Symposium 2004, vol. 1 of Abel Symp., Springer, Berlin, 2006, pp. 145–160.
- [11] R. H. Herman, I. F. Putnam, and C. F. Skau, *Ordered Bratteli diagrams, dimension groups and topological dynamics*, Internat. J. Math., 3 (1992), pp. 827–864.
- [12] W. Krieger, *On a dimension for a class of homeomorphism groups*, Math. Ann., 252 (1979/80), pp. 87–95.
- [13] H. Matui, *An absorption theorem for minimal AF equivalence relations on Cantor sets*, J. Math. Soc. Japan, 60 (2008), pp. 1171–1185.
- [14] H. Matui, *Structure of the orbits under the minimal actions by finitely generated*

- abelian groups on the Cantor set*, Sūgaku, 63 (2011), pp. 67–84.
- [15] I. F. Putnam, *Orbit equivalence of Cantor minimal systems: a survey and a new proof*, Expo. Math., 28 (2010), pp. 101–131.
- [16] I. F. Putnam, *Cantor minimal systems*, vol. 70 of University Lecture Series, American Mathematical Society, Providence, RI, 2018.
- [17] J. Renault, *A groupoid approach to C^* -algebras*, vol. 793 of Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, 1980.