Jiang-Su環への群作用について

松井 宏樹　(千葉大学)*

概　要

最近の単純 C^* 環の分類理論の進展においてJiang-Su環は極めて重要な役割を果たしている。同様に、単純 C^* 環への群作用の分類という発展途上の課題においても、Jiang-Su環が有する重要性は高いと予想される。この小文では、群作用やJiang-Su環に関して最近得られたいくつかの結果（大部分は佐藤康彦氏との共同研究に基づいている）を報告したい。

1. Jiang-Su環とは何か

1.1. Jiang-Su環の位置付け

まず C^* 環の分類理論におけるJiang-Su環 $\mathcal{Z}$ の位置付けについて述べる（$\mathcal{Z}$ の構成方法や基本的な性質は1.2節で扱う）。この件に関する詳しい解説として [1] をあげておく。また K 理論や C^* 環の分類理論の全般に関しては論説 [3] が読みやすい。

C^* 環の分類理論は C^* 環論における最も中心的なテーマの1つである。K 理論を用いて C^* 環を分類しようという試みは1990年代にG. Elliottによって創始され、今日ではElliottプログラムと呼ばれている。その目標を簡単に述べると次のようになる：単位元を持つ可分単純核型 C^* 環 A, B に対して、$K_*(A) \cong K_*(B)$ ならば $A \cong B$ と結論できるか。ここで $K_*(A)$ とは、A の K 群及びそれに付随したいくつかの構造を（漠然と）表している。C^* 環が単純であるとは、自明でない両側閉イデアルを持たないことを言う。C^* 環の核型性を正確に述べるのは少々面倒なので割愛するが、荒っぽく言えば、有限次元行列環による良い近似性を持つという意味である。

しかしながら、上に述べた「目標」はこのままの形では成り立たないことが既に分かっている。つまり、私達が期待するような K 理論による分類が成り立たないwildな C^* 環が存在する。そこで、wildではない C^* 環、すなわち、分類理論に関して良い振る舞いをするような C^* 環のクラスを、はっきりさせることが重要になる。そのような行儀の良さを示す性質として、Jiang-Su環 $\mathcal{Z}$ をテンソル積で吸収する（すなわち $A \cong A \otimes \mathcal{Z}$）という性質が有力視されている。$\mathcal{Z}$ は $K_*(\mathcal{Z}) \cong K_*(\mathbb{C})$ という性質を持つため、Elliottプログラムの範疇ではテンソル積に関する単位元のようなものに相当する。$A \cong A \otimes \mathcal{Z}$ が成り立つとき A は $\mathcal{Z}$ 安定的であるといい、そのような A に対して分類理論を構築することが模索されている。

単位元を持つ可分単純核型 C^* 環 A の行儀の良さを示す性質として、$\mathcal{Z}$ 安定性の他にも、核型次元の有限性・strict comparison・property (SI)などが考察されている。今のところこれらの条件に差異は発見されておらず、もしかすると同値なのではないかと思われている。実際、M. Rørdam [17] は $\mathcal{Z}$ 安定性からstrict comparisonが従うことを示し、W. Winter [20] は核型次元の有限性が $\mathcal{Z}$ 安定性を導くことを示した。さらにごく最近次の定理が得られた。

本研究は科研費 (課題番号:22740099) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 46L35, 46L40, 46L55
* 〒263-8522 千葉県千葉市稲毛区弥生町1-33 千葉大学 大学院理学研究科
e-mail: matui@math.s.chiba-u.ac.jp

Theorem 1.1 ([13]). Aを単位元を持つ安定有限な可分単純核型C^*環とする。

(1) Aが$\mathcal{Z}$安定的ならばAはproperty (SI)を持つ。

(2) $T(A)$の端点が有限個のとき、strict comparisonはproperty (SI)を導く。

(3) $T(A)$の端点が有限個のとき、property (SI)は$\mathcal{Z}$安定性を導く。

ここで$T(A)$はA上のtracial stateの全体をあらわす。特に、前述のM. Rørdamの結果と合わせると、$T(A)$の端点が有限個のとき、$\mathcal{Z}$安定性・strict comparison・property (SI)の3つの性質は同値であることが分かる。このように、C^*環の分類可能性を判断するための諸条件を比較するという研究が、現在活発に行われている。

1.2. Jiang-Su環の構成

この節ではJiang-Su環$\mathcal{Z}$の構成方法などについてごく簡単に紹介する。詳しくは[6, 18]を見られたい。

互いに素な自然数p, qに対して

$$I(p,q) = \{f \in C([0,1], M_p \otimes M_q) \mid f(0) \in M_p \otimes \mathbb{C},\ f(1) \in \mathbb{C} \otimes M_q\}$$

とおき、prime dimension drop algebraと呼ぶ。$f \in I(p,q)$が射影であったとする。$f(t) \in M_p \otimes M_q$の階数は、$t=0$においてはqの倍数でなければならず、$t=1$においてはpの倍数でなければならない。したがって$f(t)$の階数は0またはpqでなければならない。つまり$I(p,q)$は自明でない射影を含まないことになる。さらに、$K_0(I(p,q)) \cong \mathbb{Z}$, $K_1(I(p,q)) \cong 0$であることも容易に分かる。

互いに素な自然数の組の列(p_n, q_n)で、p_nはp_{n+1}を割り、q_nはq_{n+1}を割る、というものを用意する。このとき、単位元を保つ準同型$\varphi_n : I(p_n, q_n) \to I(p_{n+1}, q_{n+1})$を上手に構成して、帰納系$(I(p_n, q_n), \varphi_n)_n$から生じる帰納極限$C^*$環が、単純であって且つunique traceを持つように出来る。実は、この帰納極限C^*環は列(p_n, q_n)や準同型φ_nの選び方に依存しないことがわかる（証明は厄介である）。こうして出来るC^*環をJiang-Su環と呼び、$\mathcal{Z}$と表す。作り方から明らかに$K_*(\mathcal{Z}) \cong K_*(\mathbb{C})$であり、また$\mathcal{Z}$は0と1以外の射影を含まない。単純AF環は（従って特にUHF環は）$\mathcal{Z}$安定的であること、$\mathcal{Z}$自身も$\mathcal{Z}$安定的であること、$\mathcal{Z}$の任意の自己準同型はapproximately innerであること、$\mathcal{Z}$の無限テンソル積は$\mathcal{Z}$に同型であること、などが[6]で示されている。

1.1節で述べたように$\mathcal{Z}$は極めて高い重要性を持っているが、上に述べた構成はあまり簡便なものとは言えない。もう少し使い勝手の良い$\mathcal{Z}$の構成が[18]で与えられているので、それを紹介する。p, qを互いに素な自然数とし、B_0, B_1をそれぞれtype p^∞, type q^∞のUHF環とする。

$$Z = \{f \in C([0,1], B_0 \otimes B_1) \mid f(0) \in B_0 \otimes \mathbb{C},\ f(1) \in \mathbb{C} \otimes B_1\}$$

とおく。$I(p,q)$のときと全く同様の議論により、Zには自明でない射影が存在しないことがわかる。Zはいわば$I(p,q)$の無限次元版である。[18]では、Zが$\mathcal{Z}$に埋め込めることや、もっと強く、$\mathcal{Z}$はZの帰納極限として表せることが示された。これは、Jiang-Su環$\mathcal{Z}$がUHF環とかなり強く結び付いていることを示唆している。実際、この強い結び付きは、$\mathcal{Z}$や$\mathcal{Z}$安定的な環への群作用を分類する上で、有効な手段を与えると見込まれる。

2. Jiang-Su 環と吸収性

安定有限な環への群作用が Jiang-Su 環をテンソル積として吸収するというタイプの結果を紹介する。安定有限な環の対極として純無限な環（換言すれば Kirchberg 環）も重要な研究対象だが、ここでは扱わない。純無限な環への群作用の研究の最近の進展については [5] や論説 [4] を見られたい。この節を通じて、A は単位元を持つ安定有限な可分単純核型 C^* 環であるとし、Γ は可算離散群であるとする。

2.1. 自明な作用の吸収性

まず最初に群作用に関するいくつかの概念を導入しておく。$U(A)$ で A のユニタリーの全体をあらわす。

Definition 2.1. (1) 写像 $\alpha : \Gamma \to \mathrm{Aut}(A)$ と $u : \Gamma \times \Gamma \to U(A)$ の組 (α, u) が次を満たすとき、(α, u) をコサイクル作用と呼び、$(\alpha, u) : \Gamma \curvearrowright A$ と書く。

$$\alpha_g \circ \alpha_h = \mathrm{Ad}\, u(g,h) \circ \alpha_{gh} \quad \forall g, h \in \Gamma$$

$$u(g,h)u(gh,k) = \alpha_g(u(h,k))u(g,hk) \quad \forall g, h, k \in \Gamma$$

$$\alpha_1 = \mathrm{id}, \quad u(g,1) = u(1,g) = 1 \quad \forall g \in \Gamma$$

任意の $g, h \in \Gamma$ に対して $u(g,h) = 1$ であるとき、$\alpha : \Gamma \curvearrowright A$ を真の作用という。

(2) $(\alpha, u) : \Gamma \curvearrowright A$, $(\beta, v) : \Gamma \curvearrowright B$ がコサイクル作用であるとする。同型写像 $\theta : A \to B$ と B のユニタリーの族 $(w_g)_{g \in \Gamma}$ が存在して

$$\theta \circ \alpha_g \circ \theta^{-1} = \mathrm{Ad}\, w_g \circ \beta_g \quad \forall g \in \Gamma$$

$$\theta(u(g,h)) = w_g \beta_g(w_h) v(g,h) w_{gh}^* \quad \forall g, h \in \Gamma$$

となるとき、(α, u) と (β, v) はコサイクル共役であるという。

コサイクル作用をコサイクル共役で分類するというのが基本的な問題意識である。

A に対して $A^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}, A)/c_0(\mathbb{N}, A)$ とする。A を A^∞ の部分環と同一視し、$A_\infty = A^\infty \cap A'$ とおく。A_∞ は中心列環と呼ばれる。A へのコサイクル作用は A_∞ への真の作用を誘導することに注意する。

作用素環への群作用の分類では群作用が外部的であることを仮定するのが一般的であるが、私達が念頭に置いている安定有限な C^* 環に対しては、さらに強く、以下に述べる強外部性を仮定する必要がある。

Definition 2.2. (1) $\tau \in T(A)$ による GNS 表現を $\pi_\tau : A \to B(H_\tau)$ と書く。$\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$, $\tau \in T(A)^\alpha$ に対して、$\bar{\alpha} \circ \pi_\tau = \pi_\tau \circ \alpha$ となる $\bar{\alpha} \in \mathrm{Aut}(\pi_\tau(A)'')$ が自然に定まる。$\bar{\alpha}$ が内部的であるとき、α は τ に関して弱内部的であるという。

(2) $(\alpha, u) : \Gamma \curvearrowright A$ をコサイクル作用とする。任意の $g \in \Gamma \setminus \{1\}$, $\tau \in T(A)^{\alpha_g}$ に対して、α_g が τ に関して弱内部的ではないとき、(α, u) は強外部的であるという。

安定有限な C^* 環に対して、外部的ではあるが強外部的ではない作用は簡単に構成できる。しかしそのような作用の分類についてはほとんど何も分かっていない。

Γ の A への強外部的なコサイクル作用がいつ Jiang-Su 環 $\mathcal{Z}$ 上の自明な作用をテンソル積の意味で吸収するかどうかを考えるのは自然である。次の定理はこの問いに一定

の答えを与えている。定理の仮定に現れる初等従順群とは、可算従順群全体の部分族で、全ての有限群と可換群を含み、部分群・商群・拡大・増大和を取るという操作で閉じている最小のものを指す。

Theorem 2.3 ([14]). Aが$\mathcal{Z}$安定的であって、$T(A)$の端点の個数は有限個であるとする。Γは初等従順群であるとする。$(\alpha, u) : \Gamma \curvearrowright A$が強外部的なコサイクル作用であるとき、$(\alpha, u)$と$(\alpha \otimes \mathrm{id}, u \otimes 1) : \Gamma \curvearrowright A \otimes \mathcal{Z}$はコサイクル共役になる。特に、接合積$A \rtimes_{(\alpha,u)} \Gamma$は$\mathcal{Z}$安定的である。

証明の大まかな流れは次のようである。まず、traceによるGNS表現を考えることにより、(α, u)をII_1型von Neumann環へのコサイクル作用に拡張する。Γが初等従順群であることと、作用が強外部的であることから、ΓのII_1型von Neumann環への作用が「良い」Rohlin性を持つことが示せる。Aの核型性を用いることにより、von Neumann環上でのRohlin性からC^*環上でのある種のRohlin性を導ける。それを用いて、$\mathcal{Z}$から固定環$(A_\infty)^\alpha$への単位元を保つ埋め込みを構成できる。すると、McDuff型の議論と呼ばれる伝統的な方法によって主張が証明できる。

1.1節で述べたように、$\mathcal{Z}$安定性はK理論によるC^*環の分類可能性にとって欠かせない条件である。Theorem 2.3は、分類可能なC^*環のクラスが強外部的なコサイクル作用による接合積で閉じているかどうかという類の問題を考える際に、基本的な役割を果たす。

2.2. 非自明な作用の吸収性

群作用の分類のためには、Aへの強外部的なコサイクル作用が$\mathcal{Z}$上の強外部的な作用をテンソル積の意味で吸収する、というタイプの結果があると都合が良いと考えられる。$\Gamma = \mathbb{Z}^N$の場合にそのような定理が成り立つことを述べたい。

$\mu : \mathbb{Z} \curvearrowright \mathcal{Z}$を強外部的な作用とする（あとのTheorem 4.1で述べるように、佐藤康彦の結果[19]により、このような作用は全て互いにコサイクル共役である）。$\mathbb{Z}^N = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$から$i$番目の$\mathbb{Z}$への標準射影を$\pi_i$とする。$\mathbb{Z}^N$の$\mathcal{Z} \otimes \mathcal{Z} \otimes \cdots \otimes \mathcal{Z}$（$N$個のテンソル積）への作用$\gamma$を

$$\gamma_g = \mu_{\pi_1(g)} \otimes \mu_{\pi_2(g)} \otimes \cdots \otimes \mu_{\pi_N(g)} \quad g \in \mathbb{Z}^N$$

で定める。明らかにγは強外部的である。μの一意性よりγがasymptotically representable (Definition 3.7)であることも分かる。$\mathcal{Z}$のN個のテンソル積は$\mathcal{Z}$に同型だから、γは$\mathbb{Z}^N$の$\mathcal{Z}$への作用とみなせる。この$\gamma : \mathbb{Z}^N \curvearrowright \mathcal{Z}$に対して次が成り立つ。

Theorem 2.4 ([15]). Aが$\mathcal{Z}$安定的であって、$T(A)$の端点の個数は有限個であるとする。$(\alpha, u) : \mathbb{Z}^N \curvearrowright A$が強外部的なコサイクル作用であるとき、$(\alpha, u)$と$(\alpha \otimes \gamma, u \otimes 1) : \Gamma \curvearrowright A \otimes \mathcal{Z}$はコサイクル共役になる。

BをUHF環とすると、明らかに$\gamma \otimes \mathrm{id} : \mathbb{Z}^N \curvearrowright \mathcal{Z} \otimes B$は強外部的かつasymptotically representableである。そのような作用はRohlin性を持つこと（さらにコサイクル共役で一意であること）が[11]で示されているので、次が得られる。$\mathbb{Z}^N$作用のRohlin性の定義はこの小文では与えない。$\mathbb{Z}$作用のRohlin性についてはDefinition 3.1を見よ。

Theorem 2.5 ([15]). $T(A)$の端点の個数は有限個であるとする。BをUHF環とする。$(\alpha, u) : \mathbb{Z}^N \curvearrowright A$が強外部的なコサイクル作用であるとき、$(\alpha \otimes \mathrm{id}, u \otimes 1) : \Gamma \curvearrowright A \otimes B$はRohlin性を持つ。

Theorem 2.4を証明するには、単位元を保つ準同型$\pi : \mathcal{Z} \to A_\infty$で$\alpha \circ \pi = \pi \circ \gamma$を満たすものを構成出来ればよい。このような$\pi$があれば、Theorem 2.3と同様のMcDuff型の議論によりTheorem 2.4を証明できる。問題はこのようなπを構成することだが、そのためには上記の$\gamma : \mathbb{Z}^N \curvearrowright \mathcal{Z}$をあらかじめ上手に書き表しておく必要性がある。

逆に、Theorem 2.5を先に示しておいてから、そこからTheorem 2.4を導出するというアプローチも可能である。Theorem 2.5があれば、B上の非自明な作用を$(\alpha \otimes \mathrm{id}, u \otimes 1) : \Gamma \curvearrowright A \otimes B$に「埋め込む」ことが出来る。1.2節で$C^*$環$Z$を通してUHF環と$\mathcal{Z}$が親戚関係にあることを言ったが、それを用いて、$\mathcal{Z}$上の非自明な作用の$(\alpha \otimes \mathrm{id}, u \otimes 1) : \Gamma \curvearrowright A \otimes \mathcal{Z}$への「埋め込み」を得ることができ、Theorem 2.4が結論される。

3. UHF環への群作用の分類

この節では、UHF環への群作用の分類に関してこれまでに知られていることを紹介する。1.2節で言及したとおり、この節の内容の延長としてJiang-Su環への群作用の分類が行われる。作用素環への群作用の分類についての解説として[2, 4]をあげておく。

3.1. UHF環への$\mathbb{Z}$作用の分類

Definition 3.1. Aを単位元を持つ可分単純C^*環とする。$\alpha : \mathbb{Z} \curvearrowright A$がRohlin性を持つとは、次の条件が満たされることをいう。任意の$m \in \mathbb{N}$に対して、射影$e, f \in A_\infty$で

$$\sum_{i=0}^{m-1} \alpha^i(e) + \sum_{j=0}^{m} \alpha^j(f) = 1, \quad \alpha^m(e) = e, \quad \alpha^{m+1}(f) = f$$

を満たすものが存在する。

$\alpha : \mathbb{Z} \curvearrowright A$がRohlin性を持ち、$A$がある程度良い条件を満たすとき、次が言える。任意の$u \in U(A_\infty)$に対してある$v \in U(A_\infty)$が存在して$u = v\alpha(v^*)$が成り立つ。この性質は普通cohomology vanishing或いはstabilityと呼ばれ、2つの作用がコサイクル共役であることを示す際の基本的な道具となる。

岸本晶孝による次の定理は、C^*環への群作用の分類理論において、最初の本格的な成果である。

Theorem 3.2 ([8]). AをUHF環とする。

(1) $\alpha : \mathbb{Z} \curvearrowright A$が強外部的であることとRohlin性を持つことは同値である。

(2) 強外部的な任意の2つの作用$\alpha : \mathbb{Z} \curvearrowright A$と$\beta : \mathbb{Z} \curvearrowright A$はコサイクル共役である。

3.2. UHF環への$\mathbb{Z}^2$作用の分類

$\mathbb{Z}^2 = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$とする。次の定理はTheorem 3.2 (1)の$\mathbb{Z}^2$版である。Aを単純AF環にすることも出来るが、さらに付加的な条件を必要とするので、詳しくは述べない。

Theorem 3.3 ([16, 10, 14]). AをUHF環とし、$(\alpha, u) : \mathbb{Z}^2 \curvearrowright A$をコサイクル作用とする。$(\alpha, u)$が強外部的であることと$(\alpha, u)$がRohlin性を持つことは同値である。

UHF環Aへのコサイクル作用$(\alpha, u) : \mathbb{Z}^2 \curvearrowright A$に対して、コサイクル共役に関する不変量$c(\alpha, u)$を次のようにして導入する。

$\alpha_a \in \mathrm{Aut}(A)$が生成する$\mathbb{Z}$作用は強外部的であり、Theorem 3.2により、そのような作用はコサイクル共役で一意的である。特に接合積$B = A \rtimes_{\alpha_a} \mathbb{Z}$は単純で実階数ゼロを持つAT環となる。$B$におけるimplementing unitaryをλと書く。A上の自己同型α_bは

$$\tilde{\alpha}_b(a) = \alpha_b(a) \quad \forall a \in A, \quad \tilde{\alpha}_b(\lambda) = u(b,a)u(a,b)^*\lambda$$

と定めることにより、B上の自己同型$\tilde{\alpha}_b$にのびる。$\tilde{\alpha}_b \in \mathrm{Aut}(B)$がapproximately innerであることは簡単に分かる。岸本晶孝とA. Kumjianの結果[9]により、$\tilde{\alpha}_b \in \mathrm{Aut}(B)$がasymptotically innerになることと、そのOrderExt不変量$\eta(\tilde{\alpha}_b)$が消えていることは同値である。この場合のOrderExt不変量は値を$\mathrm{Hom}(K_0(A), \mathbb{R}/K_0(A))$に取っているとみなせるので、

$$c(\alpha, u) = \eta(\tilde{\alpha}_b) \in \mathrm{Hom}(K_0(A), \mathbb{R}/K_0(A))$$

と定める。

$$c(\alpha, u)([1]) = \Delta_\tau(u(b,a)u(a,b)^*)$$

が成り立っていることが容易にわかる。ただしここでτはAのunique traceであり、Δ_τはτによって定まるde la Harpe–Skandalis determinantである。

不変量$c(\alpha, u)$の比較と、Theorem 3.3のRohlin性を用いることにより、次が示される。

Theorem 3.4 ([7, 10, 14])**.** AをUHF環とする。

(1) 強外部的な2つのコサイクル作用$(\alpha, u) : \mathbb{Z}^2 \curvearrowright A$と$(\beta, v) : \mathbb{Z}^2 \curvearrowright A$がコサイクル共役になるための必要十分条件は、$c(\alpha, u) = c(\beta, v)$である。

(2) 任意の$r \in \mathrm{Hom}(K_0(A), \mathbb{R}/K_0(A))$に対して、$c(\alpha, u) = r$となる強外部的なコサイクル作用$(\alpha, u) : \mathbb{Z}^2 \curvearrowright A$が存在する。

また、強外部的なコサイクル作用$(\alpha, u) : \mathbb{Z}^2 \curvearrowright A$が真の作用とコサイクル共役になるための必要十分条件は$c(\alpha, u)([1]) = 0$である。

$A \cong A \otimes A$となるUHF環を無限型と呼ぶ。Aが無限型UHF環のとき、

$$\mathrm{Hom}(K_0(A), \mathbb{R}/K_0(A)) \ni r \mapsto r([1]) \in \mathbb{R}/K_0(A)$$

は同型となる。特に、無限型UHF環への真の作用は全て互いにコサイクル共役となる。

3.3. 無限型UHF環への$\mathbb{Z}^N$作用の分類

$\mathbb{Z}^N$作用のRohlin性は無限型UHF環の場合にしかまだ証明できていない。Theorem 3.3と比較されたい。

Theorem 3.5 ([11])**.** Aを無限型UHF環とする。作用$\alpha : \mathbb{Z}^N \curvearrowright A$が強外部的であることとRohlin性を持つこととは同値である。

Rohlin性を用いて次が示される。

Theorem 3.6 ([11])**.** Aを無限型UHF環とする。強外部的な$\mathbb{Z}^N$作用は全て互いにコサイクル共役である。

一般のUHF環への$\mathbb{Z}^N$作用のコサイクル共役による分類は未解決である。

上の2つの定理を証明する際に鍵となるのが、次に述べるrepresentablityという概念である。

Definition 3.7. Aを単位元を持つC^*環とし、$(\alpha, u) : \Gamma \curvearrowright A$を可算離散群$\Gamma$のコサイクル作用とする。次の条件を満たすユニタリの族$(v_g)_{g\in\Gamma} \subset A^\infty$が存在するとき、$(\alpha, u)$はapproximately representableであるという。

$$v_g v_h = u(g,h)v_{gh}, \quad \alpha_g(v_h) = u(g,h)u(ghg^{-1}, g)^* v_{ghg^{-1}} \quad \forall g, h \in \Gamma$$

$$v_g x v_g^* = \alpha_g(x) \quad \forall g \in \Gamma,\ x \in A$$

同じ条件を満たすユニタリの族$(v_g)_g$が、C^*環$C^b([0,\infty), A)/C_0([0,\infty), A)$から取れるとき、$(\alpha, u)$はasymptotically representableであるという。

Theorem 3.5, 3.6の証明は大よそ次のように進む。まず3.1節と3.2節より、$N = 1, 2$のときは既に証明されている。Theorem 3.6が$N-1$まで証明されたと仮定する。強外部的な作用$\alpha : \mathbb{Z}^N \curvearrowright A$が与えられたとする。$Z^N = \mathbb{Z}^{N-1} \times \mathbb{Z}$と分解し、$\mathbb{Z}$のほうの生成元を$h$とする。$\mathbb{Z}^{N-1}$作用の一意性は既に知っているから、$\alpha|\mathbb{Z}^{N-1}$は適当なモデル作用とコサイクル共役になり、特にasymptotically representableである。これを使うと、$\alpha_h : \mathbb{Z} \curvearrowright (A_\infty)^{\alpha|\mathbb{Z}^{N-1}}$がRohlin性を持つことが言える。これよりTheorem 3.5がNに対して証明でき、Rohlin性を用いるとTheorem 3.6がNに対して証明できる。

3.4. UHF環へのKlein bottle groupの作用の分類

この節を通して$\Gamma = \langle a, b \mid bab^{-1} = a^{-1}\rangle$とし、$\Gamma$をKlein bottle groupと呼ぶ。$\Gamma$はKlein bottleの基本群と同型である。$\mathbb{Z}^2$作用に対するTheorem 3.3と同様に、次が成り立つ。

Theorem 3.8 ([14])**.** AをUHF環とし、$(\alpha, u) : \Gamma \curvearrowright A$を強外部的なコサイクル作用とする。任意の$m \in \mathbb{N}$に対して、射影$e, f \in (A_\infty)^{\alpha_a}$で

$$\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_b^i(e) + \sum_{j=0}^{m} \alpha_b^j(f) = 1, \quad \alpha_b^m(e) = e, \quad \alpha_b^{m+1}(f) = f$$

を満たすものが存在する。

$(\alpha, u) : \Gamma \curvearrowright A$を強外部的なコサイクル作用とする。$\mathbb{Z}^2$作用の場合と同様に接合積$C^*$環$B_\alpha = A \rtimes_{\alpha_a} \mathbb{Z}$を考える。$B_\alpha$は単純で実階数ゼロを持つAT環になっている。$\lambda \in B_\alpha$をimplementing unitaryとする。

$$\tilde{\alpha}_b(a) = \alpha_b(a) \quad \forall a \in A, \quad \tilde{\alpha}_b(\lambda) = u(b,a)u(a^{-1}, b)^* u(a^{-1}, a)\lambda^*$$

と定めることにより、$\alpha_b \in \mathrm{Aut}(A)$は$B$上の自己同型$\tilde{\alpha}_b$にのびる。$\mathbb{Z}^2$作用の場合とは違って、$K_1(\tilde{\alpha}_b) = -\mathrm{id}$なので、$\tilde{\alpha}_b$はapproximately innerではない。

もう1つ別に、強外部的なコサイクル作用$(\beta, v) : \Gamma \curvearrowright A$をとり、$(\alpha, u)$と$(\beta, v)$を比べることを考える。Theorem 3.2より$\alpha_a$と$\beta_a$はコサイクル共役である。従って、同型写像$\theta : A \to A$とユニタリー$w \in U(A)$で、$\mathrm{Ad}\, w \circ \alpha_a = \theta \circ \beta_b \circ \theta^{-1}$となるものが存在する。$\theta$は$B_\beta = A \rtimes_{\beta_a} \mathbb{Z}$から$B_\alpha = A \rtimes_{\alpha_a} \mathbb{Z}$への同型写像に自然にのびる。そこで

$$\gamma = \theta \circ \tilde{\beta}_b \circ \theta^{-1} \circ \tilde{\alpha}_b^{-1} \in \mathrm{Aut}(B_\alpha)$$

を考える。γ は $\tilde{\alpha}_b$ と $\tilde{\beta}_b$ との差に相当していると思える。$K_0(\gamma) = K_1(\gamma) = \mathrm{id}$ が簡単に分かるので、γ は approximately inner である。ゆえに 3.2 節で考察した OrderExt 不変量

$$\eta(\gamma) \in \mathrm{Hom}(K_0(A), \mathbb{R}/K_0(A))$$

を考えることができる。$\mathbb{Z}^2$ 作用の場合とは違い、この値 $\eta(\gamma)$ は実は $\theta : A \to A$ の選び方に依存しており、θ を上手に選びなおすことによって $\eta(\gamma) = 0$ となるように調節できる。従って [9] より、γ は asymptotically inner と結論できる。言い換えれば、$\theta \circ \tilde{\beta}_b \circ \theta^{-1}$ と $\tilde{\alpha}_b$ は asymptotically unitarily equivalent である。

以上の議論と Theorem 3.8 を組み合わせることにより、次の定理が証明される。$\mathbb{Z}^2$ 作用の分類定理（Theorem 3.4）と比較されたい。

Theorem 3.9. A を UHF 環とする。Γ の A への強外部的なコサイクル作用は全て互いにコサイクル共役である。

4. Jiang-Su 環への群作用の分類

Jiang-Su 環への群作用の分類として現在知られているものは次の 3 つである。

Theorem 4.1 ([19]). $\mathbb{Z}$ の $\mathcal{Z}$ への強外部的な作用は全て互いにコサイクル共役である。

Theorem 4.2 ([12]). $\mathbb{Z}^2 = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$ とする。$(\alpha, u) : \mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathcal{Z}$ と $(\beta, v) : \mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathcal{Z}$ を 2 つの強外部的なコサイクル作用とする。(α, u) と (β, v) がコサイクル共役になるための必要十分条件は

$$\Delta_\tau(u(a,b)u(b,a)^*) = \Delta_\tau(v(a,b)v(b,a)^*)$$

が成り立つことである。ただしここで $\Delta_\tau : U(\mathcal{Z}) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は、$\mathcal{Z}$ の unique trace τ によって定まる de la Harpe-Skandalis determinant を表す。

Theorem 4.3 ([14]). Γ を Klein bottle group とする（3.4 節を参照せよ）。Γ の $\mathcal{Z}$ への強外部的なコサイクル作用は全て互いにコサイクル共役である。

3 節で説明した UHF 環への群作用の分類においては、群作用の Rohlin 性が重要な役割を演じた。もう少し正確に言えば、強外部的な作用が Rohlin 性を持つことをまず示し、次に Rohlin 性から cohomology vanishing という性質（3.1 節でごく簡単に言及した）が従うことを言い、それを用いて与えられた 2 つの作用がコサイクル共役であることを示す、というのが大まかな流れである。しかし 1.2 節で述べたように Jiang-Su 環 $\mathcal{Z}$ は自明でない射影を持たないため、$\mathcal{Z}$ への群作用は決して Rohlin 性を持ちえない。そのため、Rohlin 性を経由しない cohomology vanishing の導出が必要とされる。佐藤康彦 [19] は初めてそのような議論を見出した。ここでは Theorem 4.1 の証明に沿ってその議論の流れを追う。

$\alpha : \mathbb{Z} \curvearrowright \mathcal{Z}$ を強外部的な作用とする。α に対して cohomology vanishing を導出することが目標である。以降 α を $\mathcal{Z}$ の自己同型とみなす。$u \in \mathcal{Z}$ をユニタリーとする。1.2 節で導入した C^* 環

$$Z = \{f \in C([0,1], B_0 \otimes B_1) \mid f(0) \in B_0 \otimes \mathbb{C},\ f(1) \in \mathbb{C} \otimes B_1\}$$

を思い出す。$B = B_0 \otimes B_1$ とおき、B_i を B の部分環とみなし、

$$\mathcal{Z} \otimes Z = \{f \in C([0,1], \mathcal{Z} \otimes B) \mid f(0) \in \mathcal{Z} \otimes B_0,\ f(1) \in \mathcal{Z} \otimes B_1\}$$

とみなす。$i = 0,1$ に対して、$\alpha \otimes \mathrm{id} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{Z} \otimes B_i)$ を考える。1.2 節で触れたように、$\mathcal{Z} \otimes B_i$ は B_i に同型である。従って 3.1 節で説明した岸本晶孝の結果により、$\alpha \otimes \mathrm{id} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{Z} \otimes B_i)$ は cohomology vanishing を持つので、$u \otimes 1 \approx v_i(\alpha \otimes \mathrm{id})(v_i^*)$ となるユニタリー $v_i \in \mathcal{Z} \otimes B_i$ が存在する。すると

$$v_0^* v_1 \approx (\alpha \otimes \mathrm{id})(v_0^*)(u^* \otimes 1)(u \otimes 1)(\alpha \otimes \mathrm{id})(v_1) = (\alpha \otimes \mathrm{id})(v_0^* v_1)$$

となる。つまり $v_0^* v_1 \in \mathcal{Z} \otimes B$ は $\alpha \otimes \mathrm{id}$ でほとんど不変なユニタリーである。ここでもし、元のユニタリー $u \in \mathcal{Z}$ が $\Delta_\tau(u) = 0$ を満たしていれば、$\alpha \otimes \mathrm{id}$ でほとんど不変であるという性質を保ったまま、$v_0^* v_1$ を 1 に連続的に動かすことが出来ることがわかる。つまり連続写像 $w : [0,1] \to U(\mathcal{Z} \otimes B)$ で

$$w(0) = 1, \quad w(1) = v_0^* v_1, \quad (\alpha \otimes \mathrm{id})(w(t)) \approx w(t) \quad \forall t \in [0,1]$$

となるものを見つけられる。そこで $v(t) = v_0 w(t)$ とおくと、$v(0) = v_0 \in \mathcal{Z} \otimes B_0$, $v(1) = v_1 \in \mathcal{Z} \otimes B_1$ だから、$v \in \mathcal{Z} \otimes B$ とみなすことができ、しかも

$$v(\alpha \otimes \mathrm{id})(v^*) = v_0 w(t)(\alpha \otimes \mathrm{id})(w(t)^* v_0^*) \approx v_0(\alpha \otimes \mathrm{id})(v_0^*) \approx u \otimes 1$$

となる。ここで Theorem 2.3 の特別な場合として、$\mathcal{Z}$ から $(\mathcal{Z}_\infty)^\alpha$ への埋め込みが存在することを思い出す。1.2 節で触れたように Z は $\mathcal{Z}$ に埋め込めたから、$\mathcal{Z} \otimes Z$ から $\mathcal{Z}^\infty$ への準同型 π で、$\alpha \circ \pi = \pi \circ (\alpha \otimes \mathrm{id})$ であって、任意の $x \in \mathcal{Z}$ に対して $\pi(x \otimes 1) = x$ であるものが存在する。

$$\pi(v)\alpha(\pi(v)^*) = \pi(v(\alpha \otimes \mathrm{id})(v^*)) \approx \pi(u \otimes 1) = u$$

だから、これで $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{Z})$ に対する cohomology vanishing が（だいたい）成立したことになる。

この議論を $\mathbb{Z}^2$ や Klein bottle group の作用に対して拡張するには、K 理論的な障害をさらに丁寧に扱う必要が生じてくる。その詳細を解説する余裕はないので、Theorem 4.3 の証明に用いられる cohomology vanishing の主張を述べるにとどめる。

Proposition 4.4. $\Gamma = \langle a, b \mid bab^{-1} = a^{-1} \rangle$ とし、$(\alpha, u) : \Gamma \curvearrowright \mathcal{Z}$ を強外部的なコサイクル作用とする。任意の有限集合 $F \subset \mathcal{Z}$ と $\varepsilon > 0$ に対して、有限集合 $G \subset \mathcal{Z}$ と $\delta > 0$ が存在して次が成り立つ。$u \in U(\mathcal{Z})$ が

$$\|ux - xu\| < \delta \quad \forall x \in G, \quad \|\alpha_a(u) - u\| < \delta, \quad \Delta_\tau(u) = 0$$

を満たすならば、

$$\|vx - xv\| < \varepsilon \quad \forall x \in F, \quad \|\alpha_a(v) - v\| < \varepsilon, \quad \|u - v\alpha_b(v^*)\| < \varepsilon$$

となる $v \in U(\mathcal{Z})$ が存在する。

参考文献

[1] G. Elliott and A. S. Toms, *Regularity properties in the classification program for separable amenable C^*-algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. 45 (2008), 229–245.

[2] M. Izumi, *The Rohlin property for automorphisms of C^* algebras*, Mathematical physics in mathematics and physics (Siena, 2000), 191–206, Fields Inst. Commun., 30, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[3] 泉正己, C^* 環の分類理論, 数学, 57 (2005), 282–301.

[4] 泉正己, 作用素環への群作用の分類について, 数学, 63 (2011), 145–160.

[5] M. Izumi and H. Matui, *$\mathbb{Z}^2$-actions on Kirchberg algebras*, Adv. Math. 224 (2010), 355–400.

[6] X. Jiang and H. Su, *On a simple unital projectionless C^*-algebra*, Amer. J. Math. 121 (1999), 359–413.

[7] T. Katsura and H. Matui, *Classification of uniformly outer actions of $\mathbb{Z}^2$ on UHF algebras*, Adv. Math. 218 (2008), 940–968.

[8] A. Kishimoto, *The Rohlin property for automorphisms of UHF algebras*, J. Reine Angew. Math. 465 (1995), 183–196.

[9] A. Kishimoto and A. Kumjian, *The Ext class of an approximately inner automorphism, II*, J. Operator Theory, 46 (2001), 99-122.

[10] H. Matui, *$\mathbb{Z}$-actions on AH algebras and $\mathbb{Z}^2$-actions on AF algebras*, Comm. Math. Phys. 297 (2010), 529–551.

[11] H. Matui, *$\mathbb{Z}^N$-actions on UHF algebras of infinite type*, J. Reine Angew. Math. 657 (2011), 225–244.

[12] H. Matui and Y. Sato, *$\mathcal{Z}$-stability of crossed products by strongly outer actions*, to appear in Comm. Math. Phys.

[13] H. Matui and Y. Sato, *Strict comparison and $\mathcal{Z}$-absorption of nuclear C^*-algebras*, preprint.

[14] H. Matui and Y. Sato, *$\mathcal{Z}$-stability of crossed products by strongly outer actions II*, in preparation.

[15] H. Matui and Y. Sato, in preparation.

[16] H. Nakamura, *The Rohlin property for $\mathbb{Z}^2$-actions on UHF algebras*, J. Math. Soc. Japan 51 (1999), 583–612.

[17] M. Rørdam, *The stable and the real rank of $\mathcal{Z}$-absorbing C^*-algebras*, Internat. J. Math. 15 (2004), 1065–1084.

[18] M. Rørdam and W. Winter, *The Jiang-Su algebra revisited*, J. Reine. Angew. Math. 642 (2010), 129–155.

[19] Y. Sato, *The Rohlin property for automorphisms of the Jiang-Su algebra*, J. Funct. Anal. 259 (2010), 453–476.

[20] W. Winter, *Nuclear dimension and $\mathcal{Z}$-stability of pure C^*-algebras*, to appear in Invent. Math.