C^* 環の K 理論と KK 理論

松井 宏樹
matui@math.s.chiba-u.ac.jp

千葉大学大学院理学研究科

2008 年 9 月 12 日
空間の代数的・幾何的モデルとその周辺 @ 信州大学

作用素環とは？

$\mathbb{C}$ 係数の線形空間であって積を備えており（algebra）、
$*$ 演算を備えていて（$*$-algebra）、
$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ と $\|x^*x\| = \|x\|^2$（C^* 条件と呼ばれる）を満たすノルム $\|\cdot\|$ を備えていて、
ノルム位相に関して完備なものを、C^* 環と呼ぶ。

さらに、「弱い位相」が定まっていてその位相に関して完備であるとき、von Neumann 環と呼ぶ。

行列環 $M_n(\mathbb{C})$ は有限次元の C^* 環である。
また、有限次元の C^* 環は有限個の行列環の直和である。

作用素環は、無限次元ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素全体 $B(H)$ の部分環として、具体的に実現される。

可換な作用素環

X がコンパクトハウスドルフ空間のとき、X 上の $\mathbb{C}$ 値連続関数の全体 $C(X)$ は、（単位元を持つ）可換な C^* 環である。

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x), \quad \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

逆に、単位元を持つ可換な C^* 環は $C(X)$ の形に限る。

(Ω, μ) が測度空間のとき、X 上の $\mathbb{C}$ 値本質的有界関数の全体 $L^\infty(\Omega, \mu)$ は、可換な von Neumann 環である。
逆に、可換な von Neumann 環はこの形に限る。

C^* 環 vs. von Neumann 環

Connes（1982 年フィールズ賞）の業績

- AFD factor と呼ばれる von Neumann 環の分類
- AFD II_1-factor と呼ばれる von Neumann 環上の、自己同型（すなわち $\mathbb{Z}$ 作用）の分類

Theorem (Elliott 1976)

有限次元 C^* 環の帰納極限として書ける C^* 環（*AF* 環と呼ばれる）は、その K_0 群で完全分類される。

- AF ＝ Approximately Finite
- AF 環の K_1 群はゼロ

標語

C^* 環 ＝ von Neumann 環 ＋ K 理論

K_0 群

（単位元を持つ）C^* 環 A の元 p で、$p = p^*$, $p^2 = p$ となるものを射影（projection）と呼ぶ。
2 つの射影 $p \in M_n(A)$, $q \in M_m(A)$ に対して、射影 $p \oplus q \in M_{n+m}(A)$ が自然に定まる。p と $p \oplus 0$ は同一視する。
2 つの射影 $p \in M_n(A)$, $q \in M_n(A)$ に対して、射影 $r \in M_m(A)$ が存在して $p \oplus r$ と $q \oplus r$ が（射影全体の中で）ホモトピー同値になるとき、$p \sim q$ と書く。

Definition

$$K_0(A)_+ = \{\text{proj. in } M_n(A) \mid n \in \mathbb{N}\}/\sim$$

$$K_0(A) = \{[p] - [q] \mid [p], [q] \in K_0(A)_+\}$$

$K_0(\cdot)$ は C^* 環の圏から加群の圏への共変関手である。

K_1 群

（単位元を持つ）C^* 環 A の元 u で、$1 = uu^* = u^*u$ となるものをユニタリー（unitary）と呼ぶ。
$M_n(A)$ のユニタリーの全体を $U_n(A)$ とする。
$u \in U_n(A)$ を $u \oplus 1 \in U_{n+1}(A)$ に送る写像は、$U_n(A)/\sim$ から $U_{n+1}(A)/\sim$ への準同型を導く。

Definition

$$K_1(A) = \varinjlim U_n(A)/\sim$$

$K_1(\cdot)$ は C^* 環の圏から加群の圏への共変関手である。

$$SA = \{f : [0,1] \to A \mid f(0) = f(1) = 0\}$$

とすると、自然に $K_1(A) \cong K_0(SA)$ が成り立つ。

C^* 環と K 群の例

(例 1) $A = M_n$ のとき

$$(K_0(A), K_0(A)_+, [1], K_1(A)) \cong (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+, n, 0)$$

(例 2) x と $x \otimes 1$ を同一視することにより

$$M_{2^n} \subset M_{2^{n+1}} = M_{2^n} \otimes M_2$$

とみなし、増大和 $\bigcup_n M_{2^n}$ の作用素ノルムによる完備化を M_{2^∞} と書く。その K 群は

$$(\mathbb{Z}[1/2], \mathbb{Z}[1/2]_+, 1, 0)$$

となる。M_{p^∞} は AF 環の典型例。

C^* 環と K 群の例

(例 3) $\theta \in (0,1)$ を無理数とする。$uv = e^{2\pi\sqrt{-1}\theta} vu$ という関係式を満たす 2 つのユニタリー u, v で生成される universal な C^* 環を A_θ と書き、非可換トーラス（無理数回転環）と呼ぶ。
A_θ の元 x は形式的に

$$x = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} a_{n,m} u^n v^m \qquad a_{n,m} \in \mathbb{C}$$

と表示できる。
$K_0(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2$, $[1] = (1,0)$, $K_1(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2$ であり、

$$K_0(A_\theta)_+ = \{(p,q) \in \mathbb{Z}^2 \mid p + q\theta \geq 0\}$$

となる。
A_θ は AT 環と呼ばれるクラスに属する。

C^* 環と K 群の例

(例 4) $n \geq 2$ とする。

$$\sum_{i=1}^{n} s_i s_i^* = 1, \qquad s_i^* s_j = \delta_{i,j} 1 \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

という関係式を満たす n 個の元 $s_1, s_2, \dots, s_n$ で生成される universal な C^* 環を $\mathcal{O}_n$ と書く。

$$s_i^* s_j = \delta_{i,j} 1 \quad \forall i, j = 1, 2, \dots$$

という関係式を満たす可算無限個の元 $s_1, s_2, \dots$ で生成される universal な C^* 環を $\mathcal{O}_\infty$ と書く。

$\mathcal{O}_n$ や $\mathcal{O}_\infty$ は Cuntz 環と呼ばれる。
Cuntz 環は純無限環の典型例である。

C^* 環と K 群の例

(例 4) の続き

A が純無限環のとき、

$$K_0(A) = K_0(A)_+ = \{[p] \mid p \in A\}$$

である事が知られている。

Cuntz 環の K 群は、

$$(K_0(\mathcal{O}_n), [1], K_1(\mathcal{O}_n)) \cong (\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}, 1, 0)$$

$$(K_0(\mathcal{O}_\infty), [1], K_1(\mathcal{O}_\infty)) \cong (\mathbb{Z}, 1, 0)$$

となる。特に $K_0(\mathcal{O}_2) = K_1(\mathcal{O}_2) = 0$ である。

単純性

$I \subset A$ が C^* 環の包含で、

$$\forall a \in A \qquad aI \subset I$$

が成り立つとき、I を A のイデアルと呼ぶ。
A/I には自然に C^* 環の構造が入る。

可換な C^* 環 $C(X)$ のイデアル I は

$$I = \{f \in C(X) \mid f|Y = 0\}, \quad Y \subset X \text{ closed}$$

という形をしていて、$C(X)/I$ は $C(Y)$ に同型である。

A が 0 と A 以外にイデアルを持たないとき、単純であるという。
先に述べた (例 1) から (例 4) の C^* 環は全て単純である。

Bott 周期性

Theorem

任意の C^* 環 A に対して、$K_0(A) \cong K_1(SA)$ が成り立つ。

Theorem

C^* 環の短完全列

$$0 \to I \to A \to A/I \to 0$$

に対して、次の 6 項完全列が成り立つ。

$$\begin{array}{ccccc} K_0(I) & \longrightarrow & K_0(A) & \longrightarrow & K_0(A/I) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(A/I) & \longleftarrow & K_1(A) & \longleftarrow & K_1(I) \end{array}$$

接合積

$\alpha : G \curvearrowright A$ が離散群 G の作用のとき、接合積 C^* 環 $A \rtimes_\alpha G$ が定義される。

$$A \rtimes_\alpha G = C^*(A, \{u_g\}_{g \in G} \mid u_g u_h = u_{gh},\ u_g a u_g^* = \alpha_g(a))$$

$A \rtimes_\alpha G$ の元は形式的に $\sum_g a_g u_g$, $(a_g \in A)$ と書ける。

Theorem (Pimsner-Voiculescu 1980)

$\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$ に対して次の 6 項完全列が成立する。

$$\begin{array}{ccccc}
K_0(A) & \xrightarrow{\mathrm{id} - \alpha_*} & K_0(A) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \\
\uparrow & & & & \downarrow \\
K_1(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\iota_*} & K_1(A) & \xleftarrow{\mathrm{id} - \alpha_*} & K_1(A)
\end{array}$$

力学系と C^* 環

$\varphi : X \to X$ をコンパクトハウスドルフ空間 X 上の自己同相写像とする。$C(X)$ の自己同型 α を $\alpha(f)(x) = f(\varphi^{-1}(x))$ で定める。接合積 $C(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ を $C^*(X, \varphi)$ と書き、力学系 C^* 環と呼ぶ。

X が無限集合のとき次が成り立つ：

$C^*(X, \varphi)$ が単純 $\iff$ φ が極小（i.e. 任意の φ-軌道が X で稠密）

(例 5) φ が $\mathbb{T}$ 上の θ 回転で与えられるとき、$C^*(\mathbb{T}, \varphi)$ は非可換トーラス A_θ に同型である。

$$C^*(\mathbb{T}, \varphi) \ni x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n u^n$$

$$A_\theta \ni x = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} a_{m,n} v^m u^n$$

力学系と C^* 環

(例 5) の続き： $A_\theta \cong C^*(\mathbb{T},\varphi)$ の K 群は、

$$
\begin{array}{ccccc}
K_0(C(\mathbb{T})) & \xrightarrow{\mathrm{id}-\alpha_*} & K_0(C(\mathbb{T})) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(C^*(\mathbb{T},\varphi)) \\
\uparrow & & & & \downarrow \\
K_1(C^*(\mathbb{T},\varphi)) & \xleftarrow{\iota_*} & K_1(C(\mathbb{T})) & \xleftarrow{\mathrm{id}-\alpha_*} & K_1(C(\mathbb{T}))
\end{array}
$$

と

$$K_0(C(\mathbb{T})) = K_1(C(\mathbb{T})) = \mathbb{Z}, \qquad \alpha_* = \mathrm{id} \text{ on } K_*(C(\mathbb{T}))$$

より、$K_0(A_\theta) = K_1(A_\theta) = \mathbb{Z}^2$ と求まる。

力学系と C^* 環

(例 6) X がカントール集合で φ が X の極小自己同相写像であるとき、(X,φ) をカントール極小系と言う。$C^*(X,\varphi)$ は単純な AT 環であることが示されている（Putnam 1990）。

$K_0(C(X)) = C(X,\mathbb{Z})$, $K_1(C(X)) = 0$ と

$$
\begin{array}{ccccc}
K_0(C(X)) & \xrightarrow{\mathrm{id}-\alpha_*} & K_0(C(X)) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(C^*(X,\varphi)) \\
\uparrow & & & & \downarrow \\
K_1(C^*(X,\varphi)) & \xleftarrow{\iota_*} & K_1(C(X)) & \xleftarrow{\mathrm{id}-\alpha_*} & K_1(C(X))
\end{array}
$$

より、次が分かる：

$$K_0(C^*(X,\varphi)) = C(X,\mathbb{Z})/\{f - f\circ\varphi \mid f \in C(X,\mathbb{Z})\}$$

$$K_1(C^*(X,\varphi)) = \mathbb{Z}$$

Kasparov 積

可分な C^* 環の組 A, B に対して、

$$KK(A,B) = \{A \text{ から } B \text{ への準同型もどき}\}/\text{ホモトピー}$$

が定義される。
$KK(A,B)$ は自然に加群の構造を持つ。
$KK(\mathbb{C}, A) \cong K_0(A)$, $KK(C_0(\mathbb{R}), A) \cong K_1(A)$ が成り立つ。

Theorem (Kasparov 1981)

双加法的かつ結合的な積

$$KK(A,B) \times KK(B,C) \ni (x,y) \mapsto x \cdot y \in KK(A,C)$$

が存在する。

KK 同値性

C^* 環の準同型 $\rho : A \to B$ は、$KK(A, B)$ の元 $KK(\rho)$ を与える。
準同型 $\rho : A \to B$, $\sigma : B \to C$ に対して、

$$KK(\rho) \cdot KK(\sigma) = KK(\sigma \circ \rho)$$

が成り立つ。

C^* 環 A, B が KK 同値であるとは、

$$x \cdot y = KK(\mathrm{id}_A), \quad y \cdot x = KK(\mathrm{id}_B)$$

となるような $x \in KK(A, B)$, $y \in KK(B, A)$ が存在することを言う。

A と $S^2 A$ は KK 同値である。

UCT 定理

可換 C^* 環と KK 同値になるような可分 C^* 環の全体を $\mathcal{N}$ と書き、UCT クラスと呼ぶ。

Theorem (Rosenberg-Schochet 1987)

(1) $A \in \mathcal{N}$ のとき、任意の可分 C^* 環 B に対して、次の（分裂する）短完全列が存在する。

$$0 \to \bigoplus_{i=0,1} \mathrm{Ext}(K_i(A), K_{1-i}(B)) \to KK(A, B)$$

$$\to \bigoplus_{i=0,1} \mathrm{Hom}(K_i(A), K_i(B)) \to 0$$

(2) $A, B \in \mathcal{N}$ が KK 同値である必要十分条件は、加群として $K_0(A) \cong K_0(B)$ かつ $K_1(A) \cong K_1(B)$ となる事である。

Intertwining argument

Lemma

A, B が可分な C^* 環で、$\varphi : A \to B$, $\psi : B \to A$ が準同型とする。もし、A の *unitary* の列 $\{u_n\}_n$ と、B の *unitary* の列 $\{v_n\}_n$ が存在して、

$$\lim_{n\to\infty} u_n\psi(\varphi(a))u_n^* = a \qquad \forall a \in A$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n\varphi(\psi(b))v_n^* = b \qquad \forall b \in B$$

となれば、A と B は同型である。

存在の問題：K-theory（あるいは KK-theory）のレベルで A から B への "morphism" が与えられたとき、それを実現するような A から B への準同型は存在するか。
一意性の問題：A から A への準同型が、K-theory（あるいは KK-theory）のレベルで identity であるとき、上の lemma のような uniraty の列が取れるか。

Lin の定理

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{N} \mid A \text{ は可分・単純・核型で、} TR(A) = 0\}$$

AF 環や AT 環はこのクラスに属する。
純無限環はこのクラスには入らない。

Theorem (Lin)

$A, B \in \mathcal{T}$ が同型であるための必要十分条件は、

$$(K_0(A), K_0(A)_+, [1], K_1(A)) \cong (K_0(B), K_0(B)_+, [1], K_1(B))$$

$A \in \mathcal{T}$ に対して

$$A \text{ が AF 環} \iff K_0(A) \text{ が torsion free で } K_1(A) = 0$$

$$A \text{ が AT 環} \iff K_0(A), K_1(A) \text{ が torsion free}$$

となる。

Kirchberg-Phillips の定理

$$\forall x \in A \setminus \{0\} \quad \exists a, b \in A \quad axb = 1$$

となる C^* 環を純無限であるという。純無限ならば単純である。
Cuntz 環 $\mathcal{O}_n$, $\mathcal{O}_\infty$ は純無限環の典型例。

A が純無限のとき、$K_0(A) = \{[p] \mid p \in A\}$, $K_1(A) \cong U_1(A)/\sim$ が成り立つ。

Theorem (Kirchberg-Phillips 2000)

C^* 環 A が可分・単純・核型とする。
(1) $A \otimes \mathcal{O}_2$ は $\mathcal{O}_2$ に同型。
(2) さらに A が純無限であれば、$A \otimes \mathcal{O}_\infty$ は A に同型。

この定理は、$\mathcal{O}_2$ は 0 と KK 同値であり、$\mathcal{O}_\infty$ は $\mathbb{C}$ と KK 同値である、という事実と、うまく整合している。

Kirchberg-Phillips の定理

Theorem (Phillips 2000)

A, B が可分・核型・純無限のとき、次が成り立つ。
(1) 任意の $x \in KK(A, B)$ に対して、準同型 $\varphi : A \to B$ が存在して $KK(\varphi) = x$ となる。
(2) $\varphi, \psi : A \to B$ が準同型のとき、$KK(\varphi) = KK(\psi)$ となるための必要十分条件は、

$$\exists \{u_t\}_{t \in [0,\infty)} \textit{ path of unitaries in } B$$

$$\lim_{t \to \infty} u_t \varphi(a) u_t^* = \psi(a) \qquad \forall a \in A$$

Corollary

A, B が可分・核型・純無限のとき

$$A \cong B \iff \exists x \in KK(A, B) \text{ ``unital'', invertible}$$

Kirchberg-Phillips の定理

$$\mathcal{P} = \{A \in \mathcal{N} \mid A \text{ は可分・核型・純無限}\}$$

Theorem

(1) $A, B \in \mathcal{P}$ が同型であるための必要十分条件は、

$$(K_0(A), [1], K_1(A)) \cong (K_0(B), [1], K_1(B))$$

(2) 任意の可算加群 G_0, G_1 と任意の元 $g \in G_0$ に対して、

$$(K_0(A), [1], K_1(A)) \cong (G_0, g, G_1)$$

となるような $A \in \mathcal{P}$ が存在する。

von Neumann 環上の群作用の分類

u が A のユニタリーのとき、$(\mathrm{Ad}\, u)(a) = uau^*$ によって A の自己同型 $\mathrm{Ad}\, u$ が定まる。自己同型 $\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$ が $\mathrm{Ad}\, u$ の形に書けないとき、outer であるという。離散群 G の作用 $\alpha : G \curvearrowright A$ は、任意の $g \in G \setminus \{e\}$ に対して α_g が outer であるとき、outer であると言われる。

Theorem (Ocneanu 1985)

R を AFD II_1-factor とし、G を離散従順群とする。2 つの作用 $\alpha, \beta : G \curvearrowright R$ が outer ならば、

$$\exists \gamma \in \mathrm{Aut}(A), \quad \{u_g\}_{g\in G} \textit{ unitaries in } R$$

$$\beta_g = \mathrm{Ad}\, u_g \circ \gamma \circ \alpha_g \circ \gamma^{-1} \qquad \forall g \in G$$

C^* 環上の $\mathbb{Z}$ 作用の分類

Theorem (Kishimoto 1995)

$A = M_{p^\infty}$ とする。2つの作用 $\alpha, \beta : \mathbb{Z} \curvearrowright A$ が *uniformly outer* ならば、

$$\exists \gamma \in \mathrm{Aut}(A), \quad u \text{ unitary in } A$$

$$\beta = \mathrm{Ad}\, u \circ \gamma \circ \alpha \circ \gamma^{-1}$$

Theorem (Nakamura 2000)

A が可分・核型・純無限であるとする。2つの作用 $\alpha, \beta : \mathbb{Z} \curvearrowright A$ が *outer* であって、$KK(\alpha) = KK(\beta)$ ならば、

$$\exists \gamma \in \mathrm{Aut}(A), \quad u \text{ unitary in } A$$

$$\beta = \mathrm{Ad}\, u \circ \gamma \circ \alpha \circ \gamma^{-1}$$

C^* 環上の $\mathbb{Z}^N$ 作用の分類

Theorem (Katsura-M 2008)

$A = M_{p^\infty}$ とする。*2* つの作用 $\alpha, \beta : \mathbb{Z}^2 \curvearrowright A$ が *uniformly outer* ならば、

$$\exists \gamma \in \mathrm{Aut}(A), \quad \{u_g\}_{g \in \mathbb{Z}^2} \text{ unitaries in } A$$

$$\beta_g = \mathrm{Ad}\, u_g \circ \gamma \circ \alpha_g \circ \gamma^{-1} \qquad \forall g \in \mathbb{Z}^2$$

Theorem (M 2008)

$A = \mathcal{O}_2$ とする。*2* つの作用 $\alpha, \beta : \mathbb{Z}^N \curvearrowright A$ が *outer* ならば、

$$\exists \gamma \in \mathrm{Aut}(A), \quad \{u_g\}_{g \in \mathbb{Z}^N} \text{ unitaries in } A$$

$$\beta_g = \mathrm{Ad}\, u_g \circ \gamma \circ \alpha_g \circ \gamma^{-1} \qquad \forall g \in \mathbb{Z}^N$$