カントール極小系の軌道同型による分類

千葉大学大学院理学研究科
松井宏樹 (Hiroki Matui)
Graduate School of Science
Chiba University

1　はじめに

閉区間 $[0,1]$ を 3 等分して真ん中の開区間 $(1/3,2/3)$ を取り除き、残った 2 つの閉区間 $[0,1/3]$ と $[2/3,1]$ に対してそれぞれ同様に真ん中の開区間を取り除くという操作を行い、以下この操作を無限回繰り返すと、閉区間 $[0,1]$ の閉部分集合が得られる。これがカントール集合（もしくはカントールの 3 進集合）と呼ばれているものである。位相空間としては 2 点集合 $\{a,b\}$ の可算無限直積空間 $\{a,b\}^{\mathbb{N}}$ と同相であり、コンパクト・距離付け可能・完全不連結（任意の連結成分が 1 点のみ）・孤立点を持たない、という 4 つの性質で特徴付けられることも知られている。ここではこのような位相空間のことをカントール集合と呼ぶことにしたい（集合ではなくて位相空間なのだからカントール空間と名付ける方が適切かも知れないが、慣例に従う）。我々の目標はカントール集合の上のある種の力学系（もしくは同値関係）を軌道同型で分類することである。このような問題意識は力学系から構成される作用素環の解析の中から生じた。本稿では作用素環については立ち入らないが、歴史的経緯や背景について簡単に触れておきたい。作用素環はフォンノイマン環と C^* 環の 2 種類に大別される。可算群 G のルベーグ空間 (Ω,μ) への作用からフォンノイマン環を構成する方法は研究の初期段階から使われているが、現在もなお極めて重要な研究対象の 1 つであり続けている。G が従順で作用が自由かつエルゴード的であるときには、作用の軌道同型類と対応するフォンノイマン環の同型類が 1 対 1 に対応するという著しい結果がある。一方、位相力学系と C^* 環のカテゴリーにおける類似も、90 年代以降の C^* 環の分類理論の発展に伴い、盛んに研究されるようになった。可算群 G がコンパクト距離空間 X に同相写像によって作用しているとき、フォンノイマン環の場合と同様の方法によって、対応する C^* 環を構成することが出来る。フォンノイマン環の設定におけるエルゴード性を極小性（定義 1・3 参照）に置き換えることにより、単純な（つまり自明でない閉イデアルを持たない）C^* 環が生じる。問題は、適切な状況設定の下で、このような C^* 環を分類したり元の力学系との関連を明らかにすることである。Giordano・Putnam・Skau は、G が整数群 $\mathbb{Z}$ で X がカントール集合の場合に、この問題に対するほぼ完全な解答を与えた（後に詳述）。以来この結果を $G=\mathbb{Z}^N$ の場合に拡張する努力が払われてきたが、残念ながら、対応する C^* 環の分類にまでは未だ至っていない。フォンノイマン環の設定では、全ての従順な可

算群 G を統一的に扱うことが可能であったが、位相力学系と C^* 環の設定では話はそう簡単ではない。以上のような経緯と背景の下で私はカントール集合 X への $\mathbb{Z}^N$ の極小な作用を軌道同型（定義 2 参照）で分類することに成功した（Giordano・Putnam・Skau との共同研究）。本講演ではこの結果についての解説を試みる。

2 軌道同型

X をカントール集合とする。すなわち X は、コンパクト・距離付け可能・完全不連結・孤立点を持たない、という 4 つの性質を満たす（唯一の）位相空間である。開かつ閉な集合を clopen 集合と呼ぶ。X の位相は clopen 集合たちで生成されている。また X の clopen 集合は可算個しか無い。以下では、可算群（特に $\mathbb{Z}^N$）の X への作用を念頭に置いているのだが、少し枠組みを広げた方が便利になることがあるので、X 上の同値関係を用いて問題を定式化したい。

定義 1 (同値関係)**.** X を位相空間とする。部分集合 $R \subset X \times X$ が、任意の $x, y, z \in X$ について

- $(x, x) \in R$
- $(x, y) \in R$ ならば $(y, x) \in R$
- $(x, y), (y, z) \in R$ ならば $(x, z) \in R$

を満たすとき、R を X 上の同値関係と呼ぶ。$x \in X$ に対して $R[x] = \{y \in X \mid (x, y) \in R\}$ とおき、x の R による軌道と呼ぶ。任意の $x \in X$ について $R[x]$ が高々可算となるとき、R を可算な同値関係と呼ぶ。以降断らない限り可算な同値関係のみを考える。任意の $x \in X$ について $R[x]$ が X で稠密となるとき、R を極小であるという。

ある種の極小な同値関係を次に述べる軌道同型という概念で分類するというのが我々の問題である。

定義 2 (軌道同型)**.** X_1, X_2 をカントール集合とし、R_1, R_2 をそれぞれ X_1, X_2 上の同値関係とする。X_1 から X_2 への同相写像 $h : X_1 \to X_2$ があって

$$(x, y) \in R_1 \;\;\Leftrightarrow\;\; (h(x), h(y)) \in R_2$$

となるとき、R_1 と R_2 は軌道同型であるという。

可算群 G の作用から次のようにして X 上の同値関係が得られる。

定義 3 (群作用)**.** X をカントール集合とし、$\varphi : G \curvearrowright X$ を可算群 G の同相写像による作用とする。任意の $x \in X$ について $\{g \in G \mid \varphi^g(x){=}x\} = \{e\}$ となるとき、φ は自由な作用であると言う。

$$R_\varphi = \{(x, \varphi^g(x)) \in X \times X \mid x \in X,\ g \in G\}$$

とおき、φ から生じる同値関係と呼ぶ。R_φ が極小であるとき φ を極小であると言う。φ が極小であることは、φ が自明でない不変閉集合を持たないことと同値である。φ が自由かつ極小であるとき (X, φ) をカントール極小 G 系と呼ぶ。

$i=1,2$ に対して、$\varphi_i : G_i \curvearrowright X_i$ を群 G_i のカントール集合 X_i への同相写像による作用とする。R_{φ_1} と R_{φ_2} が軌道同型であるとき、(X_1, φ_1) と (X_2, φ_2) は軌道同型であると言う。

カントール集合とは限らない一般の（普通の）位相空間の上で軌道同型を考えることにはあまり意味が無い。なぜなら、連結なコンパクト距離空間は可算個の閉集合の直和には分割されない（Sierpinski の定理）という古典的な結果から、次が容易に従うからである：$\varphi_i : G_i \curvearrowright X_i$ が可算群 G_i の連結コンパクト距離空間 X_i への作用で、互いに軌道同型であるならば、同相写像 $h : X_1 \to X_2$ と同型 $\pi : G_1 \to G_2$ が存在して任意の $g \in G_1$ に対して $h \circ \varphi_1^g = \varphi_2^{\pi(g)} \circ h$ が成り立つ。

可算群の自由な作用から生じる同値関係とは決して軌道同型にはならないような同値関係が存在するかどうかを問うのは、自然な問題である。同種の問題は、ボレル同値関係の設定においても、エルゴード的な同値関係の枠組みにおいても、否定的に解決されている（[1, Proposition 3],[2, Theorem D]）。同様のことがカントール集合に関しても知られている（[9, Theorem 0.2]）。すなわち、可算群のカントール集合への極小な作用であって、どのような可算群の自由な作用とも決して軌道同型にならないようなものが、存在する。

同値関係 R に対する不変測度を次で定義する。R が群 G の作用から生じている場合は通常の不変測度の定義と一致する。

定義 4 (不変測度). R をカントール集合 X 上の同値関係とする。X 上の確率ボレル測度 μ が R-不変であるとは、$\{(x, \gamma(x)) \mid x \in X\} \subset R$ を満たす任意の同相写像 $\gamma \in \mathrm{Homeo}(X)$ に対して、μ が γ-不変となることを言う。R-不変な確率ボレル測度の全体を $M(R)$ と書く。

次は簡単に分かる：R_1, R_2 がカントール集合 X_1, X_2 上の同値関係で、同相写像 $h : X_1 \to X_2$ が R_1 と R_2 の間の軌道同型を導くならば、$h_*(M(R_1)) = M(R_2)$ が成り立つ。我々の目指す「分類」は、適切なクラスに属する同値関係に対してこの事実の逆に相当する事柄を示すことで成される。次の定理が [6] の主結果であり、本講演の主題である。

定理 5 (軌道同型定理). $i=1,2$ に対して (X_i, φ_i) をカントール極小 $\mathbb{Z}^{N_i}$ 系とする。このとき次は同値。

(1) (X_1, φ_1) と (X_2, φ_2) は軌道同型。
(2) X_1 から X_2 への同相写像 h が存在して、$h_*(M(R_{\varphi_1})) = M(R_{\varphi_2})$ となる。

3 AF 同値関係と affability

同値関係の軌道同型による分類のために、AF 同値関係と呼ばれるものを導入する必要があり、そのためにはまず同値関係に位相を入れなくてはならない。軌道同型による分類を問題として述べるだけならば同値関係に位相が入っている必要は全く無いが、証明を進めるためには位相を必要とする。

定義 6 ([8, Definition 2.1])**.** X をコンパクト・距離付け可能・完全不連結な位相空間とする（このような位相空間は必ずカントール集合の閉部分集合になる)。R を X 上の同値関係とする。R 上の位相 $\mathcal{O}$ が次の条件を満たすとき、$(R, \mathcal{O})$ を étale な同値関係と呼び、$\mathcal{O}$ を étale な位相と言う。

- $(R, \mathcal{O})$ は局所コンパクト・距離付け可能
- 写像 $(x, y) \mapsto (y, x)$ は、R から R への同相写像
- 写像 $((x, y), (y, z)) \mapsto (x, z)$ は、$R \times R$ の部分集合から R への連続写像
- 写像 $r : (x, y) \mapsto x$ は、R から X への局所同相写像（すなわち、(x, y) の clopen な近傍 U が存在し、$r(U)$ は X で clopen で、$r|U$ は U から $r(U)$ への同相写像）

同値関係 R 上の étale な位相は 1 つには定まらず、一般には非可算無限個の étale な位相が存在しうる。また、$X \times X$ の直積位相の R への制限が étale な位相を定めることはまれである。$(R, \mathcal{O})$ が étale な同値関係で、R' が R の部分同値関係であって且つ開集合（すなわち $R' \in \mathcal{O}$）のとき、相対位相によって R' も étale な同値関係となる。

$\varphi : G \curvearrowright X$ が自由な作用であるとき、$G \times X$ と R_φ のあいだの自然な 1 対 1 対応によって $G \times X$ における直積位相を R_φ にコピーすることが出来る。この位相によって R_φ が étale な同値関係になることは容易に確認できる。以降 R_φ にはこの自然な位相を入れるものとする。G が有限群である場合には、R_φ に定まる位相は $X \times X$ の直積位相の制限と一致する。

次の命題はコンパクトで étale な同値関係の構造を決定している。

命題 7 ([8, Proposition 3.2, Lemma 3.4])**.** X をコンパクト・距離付け可能・完全不連結な位相空間とし、$(R, \mathcal{O})$ を X 上のコンパクトで étale な同値関係とする。すると、clopen 集合による X の分割 $X_1, X_2, \ldots, X_K$ と、自然数 $n_1, n_2, \ldots, n_K$ と、自由な作用 $\varphi_k : \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z} \curvearrowright X_k$ $(k = 1, 2, \ldots, K)$ が存在し、

$$R = \bigcup_{k=1}^{K} \{(x, \varphi_k^l(x)) \in X \times X \mid x \in X_k,\ l = 1, 2, \ldots, n_k\}$$

が成立する。特に $\sup_x \#R[x]$ は有限となる（$\#R[x]$ は $R[x]$ の濃度)。また、位相 $\mathcal{O}$ は $X \times X$ の直積位相の制限に一致する。

定義 8 ([8, Definition 3.7])**.** X をコンパクト・距離付け可能・完全不連結な位相空間とし、$(R, \mathcal{O})$ を X 上の étale な同値関係とする。R の開かつコンパクトな部分同値関係の列 $R_1, R_2, \ldots$ が存在して

$$R_1 \subset R_2 \subset \ldots \ \text{かつ}\ R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$$

となるとき、R を AF 同値関係と呼ぶ。

換言すれば、コンパクトで étale な同値関係の増大和として書けるような同値関係を AF 同値関係と呼ぶ、という事である。AF は Approximately Finite を表す。命題 7 から分かるように、コンパクトで étale な同値関係はある意味で「有限な同値関係」とみなされる。AF 同値関係はその

極限というわけである。エルゴード的な同値関係やボレル同値関係の研究においても、このような「近似的に有限」と呼ぶべき同値関係が重要な役割を演じる。カントール集合の場合も似たような道筋を辿る。可算群の自由な作用から生じる同値関係 R_φ が（その自然な位相によって）AF 同値関係となることはほとんど期待できないことにも注意しておく。

次の結果は AF 同値関係の軌道同型による分類定理である。この定理を足がかりとしてカントール極小 $\mathbb{Z}^N$ 系を軌道同型で分類するのが我々の目標である。

定理 9 ([7, Theorem 2.3])**.** R_1, R_2 をカントール集合 X_1, X_2 上の極小な AF 同値関係とするとき、次は同値。

(1) R_1 と R_2 は軌道同型。

(2) X_1 から X_2 への同相写像 h が存在して、$h_*(M(R_1)) = M(R_2)$ となる。

一般に (1) から (2) が言えることは既に触れた。極小な AF 同値関係に対しては逆が成立することをこの定理は主張している。証明はかなり厄介で [7] の大部分を占めている。(2) に現れている不変測度の空間 $M(R)$ は大抵の場合計算可能である。AF 同値関係 R から AF 環と呼ばれる C^* 環 $C^*(R)$ を構成することが出来て、$M(R)$ は $C^*(R)$ 上の tracial state の全体と自然に同一視される。AF 環はその K_0 群によって分類可能であることが分かっており、そのような意味から、少なくとも C^* 環の研究者にとっては、$M(R)$ はよく分かっている対象であるという気分がする。

定義 10 ([8, Definition 4.1])**.** X をカントール集合とし R を X 上の同値関係とする。R が AF 同値関係と軌道同型になるとき、R を affable であると言う。

R 上の étale な位相 $\mathcal{O}$ が存在して $(R, \mathcal{O})$ が AF 同値関係となるときに R を affable であると言う、と言い換えることもできる。affable は AF-able からの連想による命名であり、英和辞書によれば「気やすく話せる・気のおけない・丁重な・物柔らかな」というのが元の意味である。次の成果が [6] の核心部分である。

定理 11. (X, φ) がカントール極小 $\mathbb{Z}^N$ 系のとき、R_φ は affable である。

R_φ には自然な位相が定まっているが、それを忘れて別の位相を上手に入れてやることにより R_φ を AF 同値関係とみなせる、というのが定理の主張である。上に述べた AF 同値関係の軌道同型による分類定理と合わせることにより定理 5 が得られる、というのが全体の流れである。

歴史的な経緯について触れておきたい。定理 5 は $N_1 = N_2 = 1$ の場合に [7] において証明された。また、対応する C^* 環が同型になるためには、(X_1, φ_1) と (X_2, φ_2) が強軌道同型であることが必要十分条件であることも示された。強軌道同型の定義はここでは述べないが（もちろん）軌道同型よりも幾分強い条件である。エルゴード変換から構成されるフォンノイマン環の設定では力学系の軌道同型類と環の同型類が 1 対 1 に対応したが、今の設定では少しだけずれが生じるということになる。[8] では軌道同型による分類を $\mathbb{Z}^N$ 作用に拡張するためのアプローチが整理された。限定的な結果（[12],[13]）がいくつか得られた後に、$\mathbb{Z}^2$ 作用の場合が [4] において完全解決された。$N \geq 3$ への拡張にはいくつかの技術的な困難があったが、現在準備中の論文 [6] において無事に解

決され、上の定理 11 が（したがって定理 5 が）証明される。しかしながら、対応する C^* 環の同型を判定する問題は未解決のままである。

4 吸収定理

定理 11 の証明で鍵となるのが吸収定理（定理 12）である。その本質的なアイデアは既に [7] に現れているが、明示的に定理として述べられたのは [8, Theorem 4.18] が最初である。$\mathbb{Z}^2$ 極小系の攻略に必要な形に改良されたバージョンが [5, Theorem 4.6] で、そのさらなる改良版が [14, Theorem 3.2] である。$\mathbb{Z}^N$ 極小系に対する軌道同型定理を得るにはこの最終改良版が必要である。

定理を述べるために言葉を準備する。R をカントール集合 X 上の AF 同値関係とする。閉集合 $Y \subset X$ への R の制限 $R \cap (Y \times Y)$ を $R|Y$ と書く。R からの相対位相によって $R|Y$ が étale な同値関係となるとき、Y を R-étale であるという。このとき $R|Y$ は自動的に AF 同値関係となる ([8, Theorem 3.11])。閉集合 $Y \subset X$ が任意の $\mu \in M(R)$ に対して $\mu(Y) = 0$ を満たすとき、Y は R-thin であるという。

定理 12 ([14, Theorem 3.2])**.** R をカントール集合 X 上の極小な AF 同値関係とする。X の閉集合 Y が R-étale かつ R-thin であるとする。Y 上に別の AF 同値関係 Q があって、$R|Y$ が Q の開集合であり、$R|Y$ から Q への包含写像が連続であるとする。このとき次の条件を満たす同相写像 $h : X \to X$ が存在する。

(1) $(h \times h)(R \vee Q) = R$ （ただし $R \vee Q$ は R と Q で代数的に生成される同値関係）

(2) $h(Y)$ は R-étale かつ R-thin

(3) $h|Y \times h|Y$ は Q から $R|h(Y)$ への同相写像

特に $R \vee Q$ は affable である。

Y が R-thin であるということは相対的に Y が小さい集合であることを意味している。全体で定義された R は Y 上の Q を吸収してしまえるというのが定理の意味である。いま同値関係 S の affability を示すのが目標であるとすると、$S = R \vee Q$ となるような AF 同値関係 R と Q を S の中に構成しそれらに対して吸収定理を適用する、というのが大雑把な作戦である。実際にはこの定理を繰り返し（$\mathbb{Z}^N$ 作用の場合ならちょうど N 回）使う必要があり、その議論を滞りなく進めるために (2) および (3) の条件を必要とする。

5 タイリング空間

タイリング空間はカントール集合上の同値関係と密接に関わっており、定理 11 の証明においても重要な役割を果たす。ここではタイリング空間に関する用語をまとめておきたい。タイリング空間やそこから生じる C^* 環などに関するサーベイとしては [10] が読みやすい。

$(\mathbb{R}^N, d)$ を N 次元ユークリッド空間とする。$p \in \mathbb{R}^N$ を中心とする半径 $r > 0$ の開球体を $B(p, r)$ と書く。$t \subset \mathbb{R}^N$, $p \in \mathbb{R}^N$ に対して $t + p = \{x + p \mid x \in t\}$ と書き、t の平行移動と呼ぶ。

$\mathbb{R}^N$ の空でないコンパクト集合の族 T が

- T は $\mathbb{R}^N$ の被覆
- 相異なる $t, t' \in T$ は内点を共有しない

を満たすとき、T を $\mathbb{R}^N$ のタイリングと呼び、$t \in T$ をタイルと呼ぶ。タイルは閉単位球に同相であることを要求するのが普通である。また、予め有限個のコンパクト集合を指定しておき、タイルはそれらの平行移動に限るという制約を付けるという設定もある。単にタイルを $\mathbb{R}^N$ の部分集合と思うのではなくて何らかのラベル（もしくは色）付けが成されている対象とみなす場合もある。

タイリングの集合に位相を入れたい。$\mathbb{R}^N$ の集合族 S と $p \in \mathbb{R}^N, r > 0$ に対して

$$S + p = \{s + p \mid s \in S\},$$
$$S \cap B(p, r) = \{s \in S \mid s \cap B(p, r) \neq \emptyset\}$$

とおく。T がタイリングなら $T + p$ もタイリングである。タイリング T_0 の近傍系を、正の実数 $r > 0$ を用いて

$$\{T \mid (T + p) \cap B(0, r) = T_0 \cap B(0, r) \text{ for some } p \in B(0, r^{-1})\}$$

で定めることにより、位相が定まる。この位相空間が完備距離空間であることや、$\mathbb{R}^N$ が平行移動によって自然に作用していることも簡単に分かる。

T がタイリングのとき $\{T+p \mid p \in \mathbb{R}^N\}$ の（上述の位相による）閉包を Ω_T と書き、T の hull と呼ぶ。$\mathbb{R}^N$ による平行移動を Ω_T に制限したものを φ_T と書く。φ_T は $\mathbb{R}^N$ の Ω_T への同相写像による作用である。Ω_T もしくは力学系 (Ω_T, φ_T) をタイリング空間と呼ぶ。可算群の作用が自由であることや極小であることの定義を 2 節で与えたが、$\mathbb{R}^N$ の作用についてもその定義を踏襲する。

T をタイリングとする。T の局所的な形状が平行移動によるずれを除いて有限個しかないとき、T は finite local complexity を持つと言う。正確に言えば、任意の $r > 0$ に対して

$$\{T \cap B(p, r) \mid p \in \mathbb{R}^N\} / \sim$$

が必ず有限集合ということである。ただし $S \sim S' \Leftrightarrow S = S' + p$ for some $p \in \mathbb{R}^N$ である。T が aperiodic であるとは、$T + p = T$ となるのは $p = 0$ のときに限ることを言う。T が次の性質を持つとき repetitive であると言う：任意の有限部分集合 $S \subset T$ に対してある $r > 0$ が存在し、どのような $p \in \mathbb{R}^N$ に対しても、

$$S' \subset T \cap B(p, r) \text{ かつ } S \sim S'$$

となる S' が見つかる。T のどの部分を取っても、ある一定の間隔以上の頻繁さでその形状が繰り返し現れる、というような意味である。次の命題が知られている。

命題 13. (1) タイリング T が finite local complexity を持てば、Ω_T はコンパクトになる。

(2) さらに T が aperiodic かつ repetitive であれば、$\varphi_T : \mathbb{R}^N \curvearrowright \Omega_T$ は自由かつ極小な作用である。

$\mathbb{R}^N$ のタイリング T が finite local complexity・aperiodicity・repetitivity という 3 つの性質を持つとする（ペンローズタイリングを初めとしてこのようなタイリングの実例は豊富に知られている)。上の命題により (Ω_T, φ_T) はコンパクト距離空間の上の $\mathbb{R}^N$ の自由かつ極小な作用である。この力学系がどのようにしてカントール集合と関わるのかを説明する。T が finite local complexity を持つことから $T/\sim$ は有限である。有限集合 $S \subset T$ を代表元の集まりとする。1 つ 1 つの $s \in S$ に対して s の内点 $\omega(s)$ を割り当てておく。s の平行移動 $s+p$ に対しては $\omega(s+p) = \omega(s) + p$ と決める。$\omega(s)$ は s の穴と呼ばれる。タイルに針で穴を開けたつもりである。s の情報を記憶させるために穴にラベル（色）を付けておくことも出来る。

$$X = \{T' \in \Omega_T \mid \exists t \in T' \text{ such that } \omega(t) = 0\}$$

とおくと、X は Ω_T の閉集合で、さらにカントール集合になる。原点に穴が開いているタイリングだけに限定すれば、$\mathbb{R}^N$ 方向の連続的な動きが封じられ、タイルをどのように配置するかという情報だけが生き残る。有限の範囲内ではタイルの配置は有限通りなので、有限集合の可算無限直積（のようなもの）が現れ、それがカントール集合である。作用 φ_T の横断方向にカントール集合が現れると言うこともできる。

$$R = \{(T', \varphi_T^p(T')) \mid T' \in X,\ p \in \mathbb{R}^N,\ \varphi_T^p(T') \in X\}$$

は X 上の同値関係となる。作用 φ_T の情報を横断方向に写し取ったものが R である。φ_T の極小性から R の極小性が得られる。R には自然な位相が入り étale な同値関係となることも分かる。以上の状況を抽象化して次の定義を設ける。

定義 14. $\varphi : \mathbb{R}^N \curvearrowright \Omega$ を $\mathbb{R}^N$ のコンパクト距離空間 Ω への自由かつ極小な作用とする。閉集合 $X \subset \Omega$ が次の条件を満たすとき、X を平坦カントール横断と呼ぶ。

(1) X はカントール集合に同相。

(2) 正の実数 $M > 0$ が存在して $C = \{\varphi^p(x) \mid x \in X,\ p \in B(0, M)\}$ が Ω の開集合となり、

$$X \times B(0, M) \ni (x, p) \mapsto \varphi^p(x) \in C$$

が同相写像となる。

(3) 任意の $x \in X$ と $r > 0$ に対して、x の X における開近傍 $U \subset X$ が存在して

$$\{p \in B(0, r) \mid \varphi^p(x) \in X\} = \{p \in B(0, r) \mid \varphi^p(y) \in X\}$$

が全ての $y \in U$ について成り立つ。

X が (Ω, φ) の平坦カントール横断であれば、

$$R = \{(x, \varphi^p(x)) \mid x \in X,\ p \in \mathbb{R}^N,\ \varphi^p(x) \in X\}$$

は X 上の極小な同値関係となり、étale な位相が自然に入る。上述のタイリング空間から生じる例が典型的である。[6] では実際にはこのような同値関係 R に対して定理 11 が証明される。

$\psi : \mathbb{Z}^N \curvearrowright Y$ がカントール極小 $\mathbb{Z}^N$ 系であれば、$Y \times \mathbb{R}^N$ を同値関係

$$\{((y,p),(\varphi^n(y),p+n)) \mid y \in Y,\ p \in \mathbb{R}^N,\ n \in \mathbb{Z}^N\} \subset (Y \times \mathbb{R}^N) \times (Y \times \mathbb{R}^N)$$

で割った商空間 Ω_ψ には自然に自由かつ極小な $\mathbb{R}^N$ 作用が定まり、$Y \times \{0\}$ の Ω_ψ における像 $Y_0 \subset \Omega_\psi$ は自然に平坦カントール横断とみなせる。さらに Y 上の étale な同値関係 R_φ は平坦カントール横断 Y_0 に定まる étale な同値関係と位相も込めて一致する。Ω は (Y,ψ) の mapping torus と呼ばれる。したがって、平坦カントール横断の概念は、カントール極小 $\mathbb{Z}^N$ 系と（$\mathbb{R}^N$ 上の）タイリング空間から生じる同値関係の両方を統一的に扱う枠組みと言える。

次の定理は [16, Theorem 2] の今の設定における翻訳である。

定理 15. $\varphi : \mathbb{R}^N \curvearrowright \Omega$ を $\mathbb{R}^N$ のコンパクト距離空間 Ω への自由かつ極小な作用とし、平坦カントール横断を持つとする。このとき、あるカントール極小 $\mathbb{Z}^N$ 系 (Y,ψ) が存在して、Ω は (Y,ψ) の mapping torus Ω_ψ に同相となる。さらに、この同相写像によって、$Y \times \{0\}$ の Ω_ψ における像 Y_0 は、Ω の（ある）平坦カントール横断に移る。

この定理により、タイリング空間 Ω の Čech コホモロジー $\check{H}^*(\Omega;\mathbb{Z})$ を考えることと、作用 $\psi : \mathbb{Z}^N \curvearrowright Y$ に付随して生じる群コホモロジー $H^*(\mathbb{Z}^N, C(Y,\mathbb{Z}))$ を考えることは、基本的に等価であると言える。何らかのクラスに属するタイリング空間についてこのようなコホモロジーを計算する方法が編み出されている。興味のある方は [15] や [3] およびそこに挙げられている参考文献を見られたい。また、対応する C^* 環の K 群がこれらのコホモロジーとどのような関わりを持つかという問題も興味深いが、知られていることはまだ少ない。

$i = 1,2$ に対して X_i が (Ω_i, φ_i) の平坦カントール横断であるとしよう。X_i 上に定まる同値関係を R_i と書く。もし Ω_1 と Ω_2 が同相であれば次が言える：空でない clopen 集合 $U_i \subset X_i$ と同相写像 $h : U_1 \to U_2$ が存在し、$h \times h$ は $R_1|U_1$ から $R_2|U_2$ への同相写像を導く。$N = 2$ の場合にはこの逆が成立することが分かっている（[11]）が、一般の次元では未解決である。

参考文献

[1] S. Adams, *An equivalence relation that is not freely generated*, Proc. Amer. Math. Soc. 102 (1988), 565–566.

[2] A. Furman, *Orbit equivalence rigidity*, Ann. of Math. 150 (1999), 1083–1108.

[3] F. Gähler, J. Hunton and J. Kellendonk, *Torsion in tiling homology and cohomology*, preprint. math-ph/0505048.

[4] T. Giordano, H. Matui, I. F. Putnam and C. F. Skau, *Orbit equivalence for Cantor minimal $\mathbb{Z}^2$-systems*, to appear in J. Amer. Math. Soc. math.DS/0609668.

[5] T. Giordano, H. Matui, I. F. Putnam and C. F. Skau, *The absorption theorem for affable equivalence relations*, to appear in Ergodic Theory Dynam. Systems. arXiv:0705.3270.

[6] T. Giordano, H. Matui, I. F. Putnam and C. F. Skau, *Orbit equivalence for Cantor minimal $\mathbb{Z}^d$-systems*, in preparation.

[7] T. Giordano, I. F. Putnam and C. F. Skau, *Topological orbit equivalence and C^*-crossed products*, J. Reine Angew. Math. 469 (1995), 51–111.

[8] T. Giordano, I. F. Putnam and C. F. Skau, *Affable equivalence relations and orbit structure of Cantor dynamical systems*, Ergodic Theory Dynam. Systems 24 (2004), 441–475.

[9] G. Hjorth and M. Molberg, *Free continuous actions on zero-dimensional spaces*, Topology Appl. 153 (2006), 1116–1131.

[10] J. Kellendonk and I. F. Putnam, *Tilings, C^*-algebras, and K-theory*, Directions in Mathematical Quasicrystals, 177–206, CRM Monogr. Ser. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[11] S. Lightwood and N. Ormes, *Bounded orbit injections and suspension equiavlence for minimal $\mathbb{Z}^2$-actions*, Ergodic Theory Dynam. Systems 27 (2007), 153-182.

[12] H. Matui, *Affability of equivalence relations arising from two-dimensional substitution tilings*, Ergodic Theory Dynam. Systems 26 (2006), 467–480. math.DS/0506251.

[13] H. Matui, *A short proof of affability for certain Cantor minimal $\mathbb{Z}^2$-systems*, Canad. Math. Bull. 50 (2007), 418–426. math.DS/0506250.

[14] H. Matui, *An absorption theorem for minimal AF equivalence relations on Cantor sets*, preprint. arXiv:0712.0733.

[15] L. Sadun, *Tiling spaces are inverse limits*, J. Math. Phys. 44 (2003), 5410–5414.

[16] L. Sadun and R. F. Williams, *Tiling spaces are Cantor set fiber bundles*, Ergodic Theory Dynam. Systems 23 (2003), 307–316.