カントール極小 $\mathbb{Z}^2$ 系の軌道同型による分類

千葉大学自然科学研究科
松井宏樹

Joint work with

T. Giordano, I.F. Putnam and C.F. Skau

$X :=$ **カントール集合** $\cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$\varphi : \mathbb{Z}^d \to \mathrm{Homeo}(X)$ **同相写像による作用**

φ **が自由（**free**）であるとは、**

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\},\ \forall x \in X \quad \varphi^n(x) \neq x$$

φ **が極小（**minimal**）であるとは、**

$$\forall x \in X \quad \{\varphi^n(x) : n \in \mathbb{Z}^d\} \text{ is dense in } X$$

$$R_\varphi = \{(x, \varphi^n(x)) : x \in X,\ n \in \mathbb{Z}^d\}$$

を、φ **によって定まる** X **上の同値関係（**equivalence relation**）と呼ぶ。**

$\varphi_i : \mathbb{Z}^{d_i} \curvearrowright X_i$；自由かつ極小 $i = 1, 2$

φ_1 と φ_2 が軌道同型（orbit equivalent）であるとは、

$\exists h : X_1 \to X_2$ homeomorphism

s.t. $h \times h(R_{\varphi_1}) = R_{\varphi_2}$

問題

いつ φ_1 と φ_2 は軌道同型になるか？
必要十分条件を求めよ。

考えられる不変量は何か？

$\varphi : \mathbb{Z}^d \to \mathrm{Homeo}(X)$ に対して、

$M_\varphi = \{\varphi\text{-invariant prob. measures on } X\}$

とおく。（M_φ は空では無い）

明らかに、

φ_1 **と** φ_2 **が軌道同型**

$\Rightarrow \exists h : X_1 \to X_2$ homeomorphism

s.t. $h_*(M_{\varphi_1}) = M_{\varphi_2}$

が成り立つ。

この逆は成り立つのか？

すなわち、M_φ **は完全不変量か？**

もし答えが Yes **なら、軌道同型による分類問題は解決したことになる。**

定理（GPS 1995） Yes when $d = 1$.

定理（GMPS 2006） Yes when $d \leq 2$.

証明の方針

AF（approximately finite）と呼ばれる同値関係を導入し、それを経由することによって、**軌道同型**を示す。

$X :=$ カントール集合

$R \subset X \times X$ を可算な同値関係とする。

i.e. $\forall x \in X, \{y \in X : (x, y) \in R\}$ is countable

R に topology が入っていて、次を満たすとき、R をétale relation という。

- locally compact and metrizable
- $(x, y) \times (y, z) \mapsto (x, z)$ is continuous
- $(x, y) \mapsto (y, x)$ is continuous
- $R \ni (x, y) \mapsto x \in X$ is a local homeo.

Fact

R がétale relation であって、しかも compact ならば、

$$\sup_{x \in X} \#\{y \in X : (x, y) \in R\} < \infty$$

となる。すなわち R は「uniformly finite」。

étale relation R が AF であるとは、

$\exists R_n \subset R$ open compact subrelation

s.t. $R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \dots$

$$R = \bigcup_n R_n$$

R が AF relation であれば、R からできる groupoid C^*-algebra は、AF 環になる。

定理（GPS 1995）

$R_i \subset X_i \times X_i$ minimal AF relations, $i = 1, 2$

$M_i :=$ {R_i-invariant prob. measures on X_i}

R_1 と R_2 は軌道同型

$\Leftrightarrow \exists h : X_1 \to X_2$ homeomorphism

s.t. $h_*(M_1) = M_2$

この定理を経由することによって、free minimal $\mathbb{Z}^d$-system を軌道同型によって分類したい。

そこで次のような定義をする。

$R \subset X \times X$；同値関係

R に topology を入れて、R を AF relation に出来るとき、R は affable であると言う。

問題

$\varphi : \mathbb{Z}^d \to \mathrm{Homeo}(X)$; 自由かつ極小

R_φ は affable か？

定理（GMPS 2006） Yes when $d \leq 2$.

証明の方針

まず、R_φ と $X \times \mathbb{Z}^2$ は、$(x, \varphi^n(x)) \mapsto (x, n)$ という対応によって同一視されるので、$X \times \mathbb{Z}^2$ の位相を R_φ にコピーする。

この topology で R_φ はétale relation になる。（しかし AF relation にはならない）

定理（Forrest 2000）

$\exists R \subset R_\varphi$ **「大きな」** open subrelation
s.t. R_φ **からの** induced topology **によって、**
R **は** AF relation

「大きな」の意味：
X **の部分集合** B **が存在して**

- $\mu(B) = 0$ for all $\mu \in M_\varphi$
- $R_\varphi[x] = R[x]$ for all $x \notin B$

となる。
つまり、測度ゼロの集合 B **を除いて、**R **と** R_φ **は一致している。**
R **と** R_φ **の「小さな」食い違いを、どのようにして誤魔化すか。**

定理（GMPS 2006）

$R \subset X \times X$ minimal AF relation

$Y \subset X$ closed, R-étale and R-thin

$K \subset Y \times Y$ compact relation

K is transverse to $R \cap (Y \times Y)$

$\Rightarrow \exists h : X \to X$

s.t. $h \times h(R \vee K) = R$

In particular, $R \vee K$ is affable

「小さな」閉集合 Y **で定義された** compact relation K **を、**R **が（**$h \times h$ **によって）「吸収」してしまえる！**

Forrest **の定理と、この吸収定理を、組み合わせることによって、**R_φ **が** affable **であることを示す。**

その際の問題点：

(1) Forrest **の方法そのままではうまく行かない。**Voronoi **分割を変形しなくてはいけない。**

(2) **吸収定理を、**2 **回続けて適用しなければいけない。**relation **に入っている** topology **を変えつつも、尚も続けて吸収定理を適用できるように、いくらか** topology **を制御してやらないといけない。**

今後の問題点：

(1) $d \geq 3$ **の場合。**

(2) **対応する** C^* **環の分類問題に応用できるか。**