The orbit structure of Cantor minimal $\mathbb{Z}^2$-systems

joint work with

T. Giordano

I. F. Putnam

C. F. Skau

$X :=$ the Cantor set

i.e. compact, metrizable
totally disconnected
perfect

$\varphi : \mathbb{Z}^d \to \mathrm{Homeo}(X)$; action

free $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall n \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$
$\forall x \in X$
$\varphi^n(x) \neq x$

minimal $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in X$
$\{\varphi^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}^d\}$ dense

$$R_\varphi := \left\{ (x, \varphi^n(x)) \in X \times X \;\middle|\; x \in X,\ n \in \mathbb{Z}^d \right\}$$

問題 (X, φ) を orbit equiv. で分類せよ

GPS '95 $d = 1$

GMPS $d = 2$

不変量は何か？

$$M_\varphi := \{ \mu : \varphi\text{-inv. prob. measure} \}$$

$$D_\varphi := C(X, \mathbb{Z}) \big/ \{ f \in C(X, \mathbb{Z}) \mid \mu(f) = 0 \ \forall \mu \in M_\varphi \}$$

Fact $(X, \varphi), (Y, \psi)$

$F : X \to Y$ homeo.

(1) F gives orbit equivalence

$\Downarrow$

(2) F gives $M_\varphi \cong M_\psi$

$\Updownarrow$

(3) F gives $D_\varphi \cong D_\psi$ as unital ordered grp

$R \subset X \times X$ countable equiv. relation

R に位相が入っているとする

locally cpt, Hausdorff,

second countable

$$\left.\begin{array}{l} (x,y)\times(y,z) \mapsto (x,z) \\ (x,y) \mapsto (y,x) \end{array}\right\} \text{conti.}$$

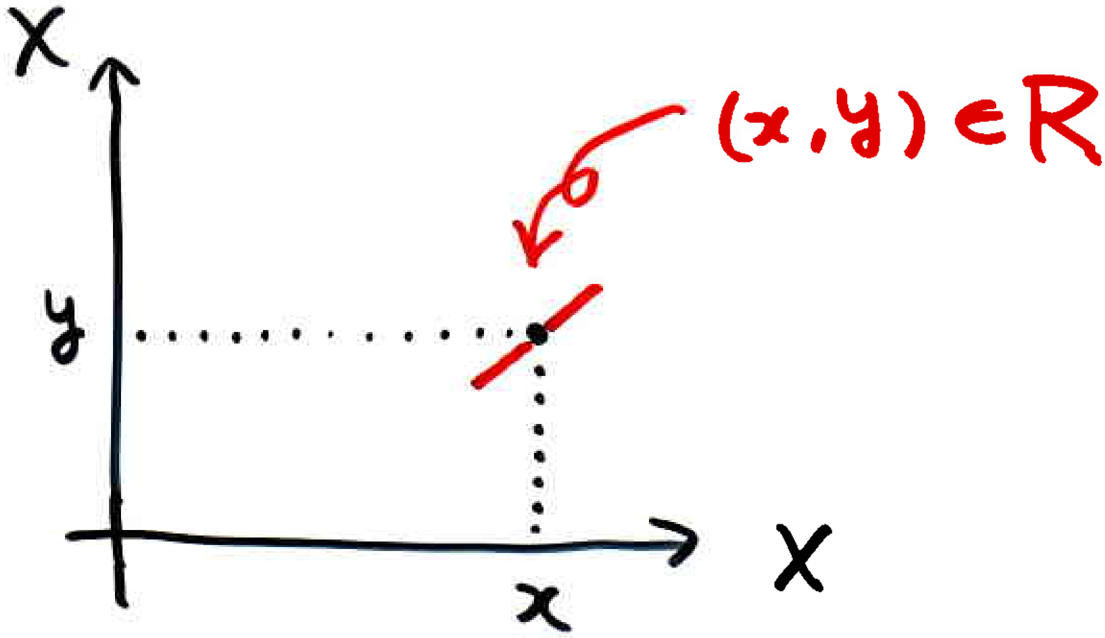
étale $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $r : R \longrightarrow X$, $(x,y) \mapsto x$ is a local homeo.

つまり $\forall (x,y) \in R$

$\exists U \subset R$ clopen nbh of (x,y)

s.t. $r(U) \subset X$ is clopen

$r|_U$ is a homeo.



<u>例</u> $\varphi : \mathbb{Z}^d \curvearrowright X$ free

$R_\varphi \ni (x, \varphi^n(x)) \longleftrightarrow (x, n) \in X \times \mathbb{Z}^d$

という bijection によって

R_φ に étale topology が入る

Rem

orbit equivalence で

étale topology は 必ずしも

保存されない

Prop

$\mathcal{J}$: étale top. on $R \subset X \times X$

$\mathcal{J}$ is compact

$\Longrightarrow$ (1) $\mathcal{J}$ is the induced top. from $X \times X$

(2) $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$ clopen partition

$m_i \in \mathbb{N}$ $i = 1, 2, \cdots, n$

$\varphi_i : \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z} \curvearrowright X_i$ free

s.t.

$$R = \left\{ (x, \varphi_i^k(x)) \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in X_i, \ k \in \mathbb{Z} \\ i = 1, 2, \cdots n \end{array} \right\}$$

特に R は uniformly finite

$R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \cdots$

increasing sequence of compact étale relation on X

$R := \bigcup R_n$

R with inductive limit topology is called an AF-relation

<u>Thm 1</u> (GPS '95)

$R_i \subset X_i \times X_i$ minimal AF relation $i = 1, 2$

M_i, D_i as before

T.F.A.E.

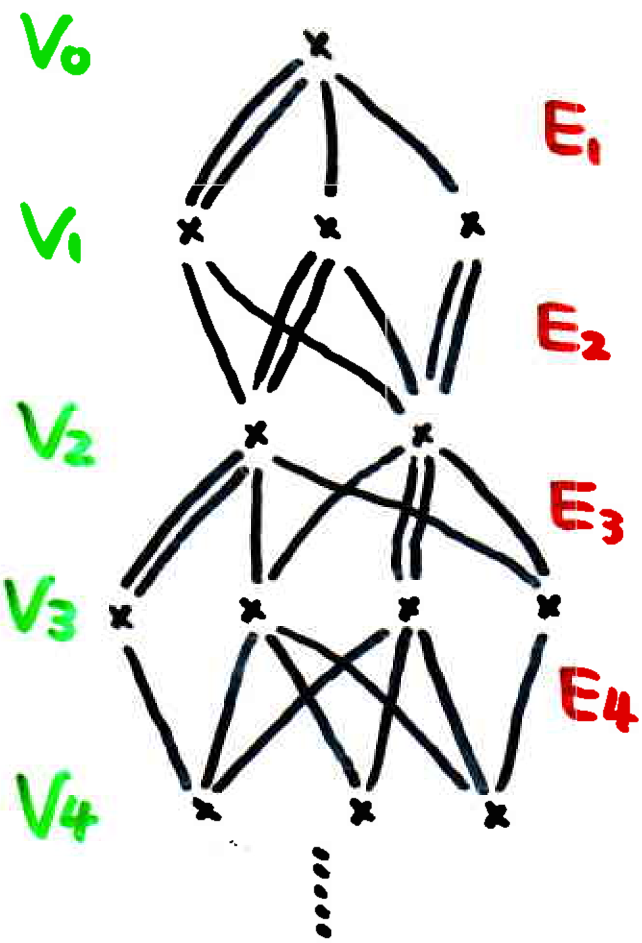
(1) R_1 is orbit equiv. to R_2

(2) $^\exists F : X_1 \to X_2$ homeo.

s.t. $F_*(M_1) = M_2$

(3) $D_1 \cong D_2$ as unital ordered grp.

Bratteli-diagram



$V = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$ vertex

$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ edge

V_n, E_n non-empty finite

$\# V_0 = 1$

$\left.\begin{array}{l} r : E_n \to V_n \\ s : E_n \to V_{n-1} \end{array}\right\}$ surjective

$X :=$ infinite path space

$$= \left\{ (e_n)_n \;\middle|\; \begin{array}{l} e_n \in E_n \\ r(e_n) = s(e_{n+1}) \end{array} \right\}$$

X は cpt. metrizable, totally discon.

$n \in \mathbb{N}$

$$R_n := \{ ((e_k), (f_k)) \mid e_k = f_k \text{ for } {}^\forall k > n \}$$

とおくと R_n は compact étale relation になる

$R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \cdots$

$R := \bigcup R_n$ AF-relation が得られる

Fact

任意の AF-relation は、このようにして得ることができる。

Def.

$R \subset X \times X$ equiv. relation

R is affable

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \mathcal{J}$: étale top. on R s.t. $(R, \mathcal{J})$ is AF

Thm 2 (GPS '95)

$\varphi : \mathbb{Z} \curvearrowright X$ free, minimal

$\Longrightarrow$ R_φ is affable

<u>例</u> $X := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$\varphi \in \mathrm{Homeo}(X)$: addition by $(1,0,0,0,\cdots)$

(X,φ) ; odometer system

$$R_\varphi = \{(x,\varphi^n(x)) \mid x \in X,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

$n \in \mathbb{N}$

$$R_n := \{(x,y) \in X \times X \mid x_k = y_k \ \ {}^\forall k > n\}$$

R_n は compact, étale であって

$R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \cdots$

$R := \bigcup R_n$; AF-relation

しかし $R \subsetneqq R_\varphi$

Thm 2 の証明の方針

与えられた R_φ の中に"大きい"AF-subrelation R を見つけて

$$R_\varphi = R \vee \{何か\}$$

とあらわす

R_φ は「R の小さい拡大」と思える

「吸収定理」を適用して

$$R_\varphi \underset{\text{o.e.}}{\sim} R$$

を示す $\square$

$\mathbb{Z}^2$-system の攻略には

次の吸収定理が必要になる

Absorption Theorem (GMPS)

$R \subset X \times X$ minimal, AF

$B \subset X$ closed set

$\beta : B \to B$: homeo. $\beta^2 = \mathrm{id}$

(1) ${}^\forall \mu$: R-invariant measure に対して $\mu(B) = 0$

(2) B is R-étale

(3) ${}^\forall x \in B$ $(x, \beta(x)) \notin R$

(4) $\beta \times \beta : R \cap (B \times B) \to R \cap (B \times B)$ is an isomorphism

$$\Rightarrow \quad R \underset{\text{o.e.}}{\sim} \tilde{R} := R \vee \{(x, \beta(x)) \mid x \in B\}$$

↑

β のグラフ

Thm 3 (GMPS)

$\varphi : \mathbb{Z}^2 \curvearrowright X$ free, minimal

$\Longrightarrow R_\varphi$ is affable

$x \in X$ の R_φ-orbit $\cong \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$

R_φ の中に AF-subrelation R を
みつけたい

R_φ の中に compact subrelation を
作らないといけない

$\rightsquigarrow \mathbb{Z}^2$ を 有限集合の和に表したい

$\rightsquigarrow \mathbb{R}^2$ を compact subset
の 和 に かきたい

$\rightsquigarrow \mathbb{R}^2$ の tiling

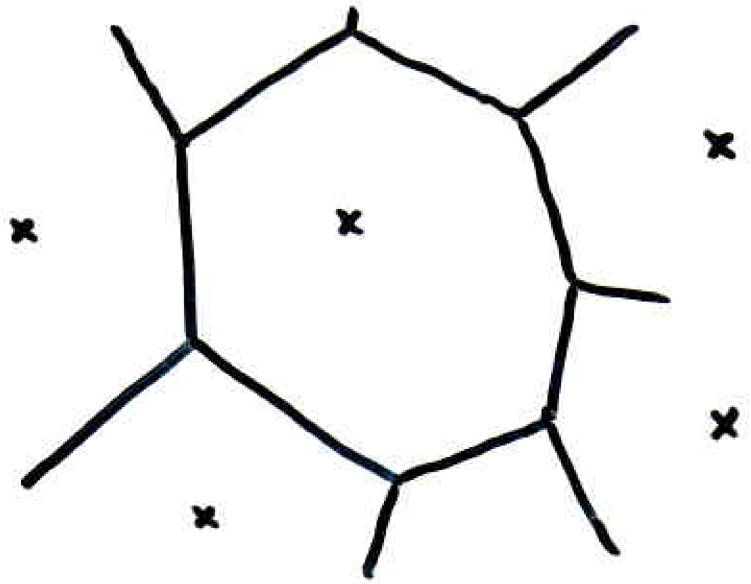
$U \subset X$ clopen set

$x \in X$

$E := \{ n \in \mathbb{Z}^2 \mid \varphi^n(x) \in U \}$ hitting time

E は $\mathbb{R}^2$ の中の
uniformly discrete subset

E による Voronoi 分割を取る



$\varphi^n(x) \sim \varphi^m(x) \iff n, m \in \mathbb{Z}^2$ は同じ Voronoi 領域に含まれる

と決めると、
compact subrelation が得られる

clopen set の列 $U_1, U_2, U_3, \cdots$

を $\mathrm{diam}(U_n) \to 0$ となるように取れば

どんどん粗い Voronoi 分割が得られる

つまり、"大きな" compact relation

を得ることができる

$$R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \cdots$$

$$R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \quad : \text{AF-subrelation of } R_4$$

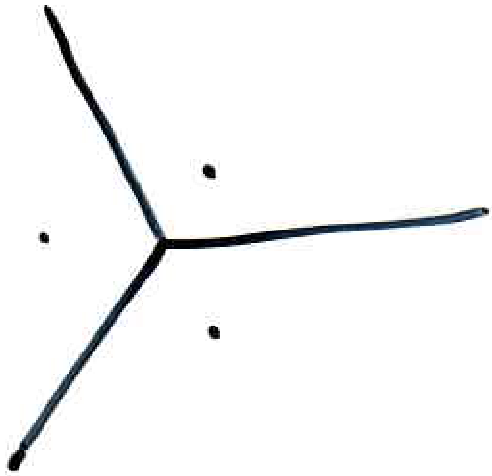
R_4 と R の比較

type I $\quad [x]_{R_4} = [x]_R$

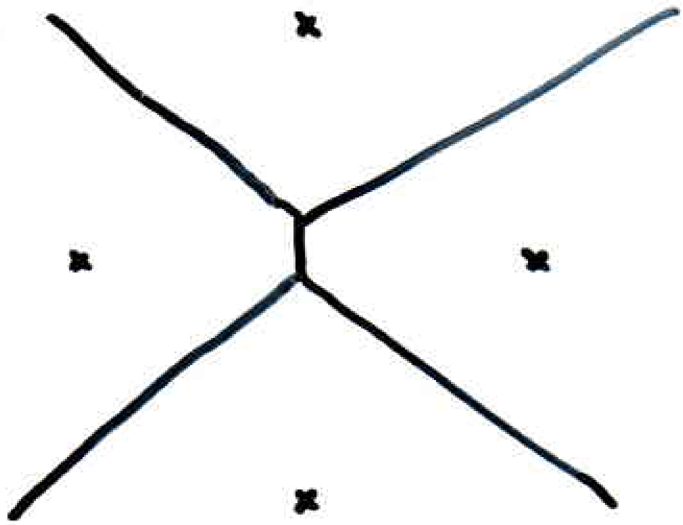
type II $\quad [x]_{R_4} =$ 2つの R-orbit

type III $\quad [x]_{R_4} =$ 3つの R-orbit type II

type III



中途半端な状況になると困る

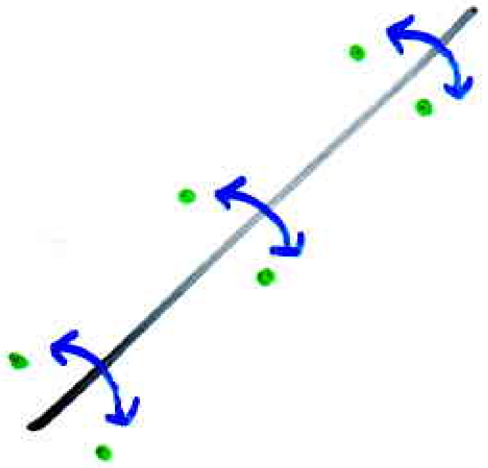


これを避けるために

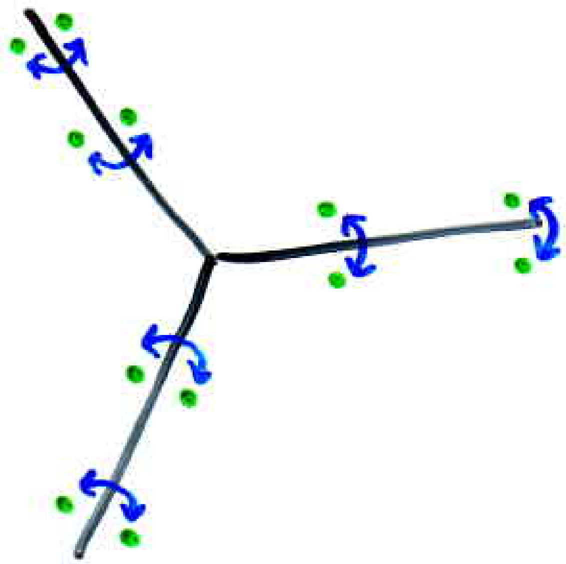
quasi-Voronoi 分割が必要

<u>Rem</u>　$d \geq 3$ の場合？

type Ⅱ



type Ⅲ



B := { 緑色の点たち }

β := $\curvearrowright$ で表わされた flip

とおけば

$$R_\varphi = R \vee \beta \text{のグラフ}$$

となる

吸収定理を2回つかうことにより

$$R_\varphi \underset{\text{o.e.}}{\sim} R$$

がわかる