カントール極小系の軌道同型に付随する軌道コサイクルの不連続点の個数について

松井宏樹

$X :=$ カントール集合 $\cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$\varphi \in \mathrm{Homeo}(X)$; 極小

つまり　自明でない
不変閉集合を持たない

$\rightsquigarrow$ (X, φ) カントール極小系
Cantor minimal system

$(X, \varphi), (Y, \psi)$; CM

φ と ψ が 軌道同型 である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists F : X \to Y$; homeo.
s.t. $\forall x \in X$
$$F(\mathrm{Orb}_\varphi(x)) = \mathrm{Orb}_\psi(F(x))$$

共役よりも弱い同値関係

$F : X \to Y$; 軌道同型

$\rightsquigarrow$ $^\exists n : X \to \mathbb{Z}$, $m : Y \to \mathbb{Z}$

s.t. $F(\varphi(x)) = \psi^{n(x)}(F(x))$ $x \in X$

$F^{-1}(\psi(y)) = \varphi^{m(y)}(F^{-1}(y))$ $y \in Y$

n, m を 軌道コサイクルと呼ぶ。

(X, φ), (Y, ψ) ; k-強軌道同型

$\overset{\text{def}}{\iff}$ n, m がそれぞれ高々 k 個の不連続点を持つような $F : X \to Y$ がとれる。
ただし不連続点は異なる軌道に乗っていなければならないとする。

注意

n, m が連続ならば、(X, φ) は (Y, ψ) か (Y, ψ^{-1}) に共役

定理 (GPS)

(1) (X,φ) と (Y,ψ) は 1-強軌道同型

$\Longleftrightarrow$ $K^0(X,\varphi) \cong K^0(Y,\psi)$

unital order iso.

(2) (X,φ) と (Y,ψ) は 軌道同型

$\Longleftrightarrow$ $K^0(X,\varphi)/\mathrm{Inf} \cong K^0(Y,\psi)/\mathrm{Inf}$

unital order iso.

$$K^0(X,\varphi) := C(X,\mathbb{Z}) \big/ \{ f - f\varphi^{-1} \mid f \in C(X,\mathbb{Z}) \}$$

; unital ordered group

$$\mathrm{Inf}(K^0(X,\varphi)) := \left\{ [f] \in K^0(X,\varphi) \;\middle|\; \begin{array}{l} \rho([f]) = 0 \quad \text{for all} \\ \rho : K^0(X,\varphi) \to \mathbb{R} : \text{positive homo} \end{array} \right\}$$

実は間違っている定理 (GPS)

(X,φ) と (Y,ψ) は k-強軌道同型

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Inf}(K^0(X,\varphi))$ と $\mathrm{Inf}(K^0(Y,\psi))$ は

ともに部分群 $\mathbb{Z}^{l-1}$ を持ち、$(l \leq k)$

$$K^0(X,\varphi)/\mathbb{Z}^{l-1} \cong K^0(Y,\psi)/\mathbb{Z}^{l-1}$$

となる。

注意　$\Rightarrow$ の方向は正しい

定理 (M)

$\exists\ (X,\varphi), (Y,\psi)$: CM

s.t. $K^0(X,\varphi)/\mathbb{Z} \cong K^0(Y,\psi)/\mathbb{Z} \cong \mathbb{Q}^3$

(X,φ) と (Y,ψ) は 2-強軌道同型

ではない

$x_0, x_1 \in X$：異なる2点

$$E(x_0, x_1) := C(X, \mathbb{Z}) \Big/ \left\{ f - f\varphi^{-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \in C(X, \mathbb{Z}) \\ f(x_0) = f(x_1) = 0 \end{array} \right\}$$

$$0 \to \mathbb{Z} \to E(x_0, x_1) \to K^0(X, \varphi) \to 0$$

$$\zeta(x_0, x_1) \in \mathrm{Ext}(K^0(X, \varphi), \mathbb{Z})$$

<u>Lem</u>

$F : X \to Y$：軌道同型

nの不連続点　$x_0, x_1 \in X$

mの　〃　　$y_0, y_1 \in Y$

$$\Rightarrow E(x_0, x_1) \cong E(y_0, y_1)$$

反例の構成の鍵

$\exists\, (X, \varphi)$: CM

s.t. $K^0(X, \varphi) \cong \mathbb{Q}^3$

ζ は全射ではない

予想

T.F.A.E

(1) (X, φ) と (Y, ψ) はある k に対して k-強軌道同型

(2) $\mathrm{Inf}(K^0(X, \varphi))$ と $\mathrm{Inf}(K^0(Y, \psi))$ が有限階数自由アーベル群を含み、それで割ると K^0-群が同型になる。