

1

\mathbb{Z}^2 極小系から生じる C^* 環の

AF 埋め込み性について

松井 宏樹

問題

$$\begin{array}{ccc}
 B & \hookrightarrow & A \\
 \text{C}^*\text{-algebra} & & \text{AF-algebra}
 \end{array}$$

AF環に埋め込む
ことができるか？

Def

$$\text{AF-algebra} \stackrel{\text{def}}{\iff} A = \overline{\bigcup A_n}^{\|\cdot\|}$$

$\dim A_n < \infty$

注意：AF環の部分環は
AF環とは限らない

例 $X := \text{cpt sp.}$

$C(X)$: AF \iff X : 全不連結

Thm (Pimsner)

3

X : cpt sp. $T \in \text{Homeo}(X)$

$C(X) \rtimes_T \mathbb{Z}$ が **AF** 埋め込み可能

$\Leftrightarrow (X, T)$: pseudo non-wandering

i.e. $\overline{T(U)} \subsetneq U$ となるような
開集合 U は存在しない

接合積 C^* -algebra

$$C(X) \rtimes_T \mathbb{Z} := C^*(C(X), u)$$

$$u^*u = uu^* = 1$$

$$ufu^* = f \circ T^{-1} \quad \forall f \in C(X)$$

では、 \mathbb{Z}^2 の場合はどうなるか？

$$T, S \in \text{Homeo}(X)$$

$$T \circ S = S \circ T$$

$$C(X) \rtimes_{T,S} \mathbb{Z}^2 := C^*(C(X), u, v)$$

$$u, v : \text{unitary} \quad uv = vu$$

$$ufu^* = f \circ T^{-1} \quad vfv^* = f \circ S^{-1}$$

$$\forall f \in C(X)$$

Thm (M)

(X, T, S) が **極小** であって、かつ

ある $(n, m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ に対して

$T^n S^m$ が **条件 (#)** を満たすならば

$C(X) \rtimes_{T,S} \mathbb{Z}^2$ は、**AF** 埋め込み

可能である

極小 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ T 不変かつ S 不変な
閉集合は \emptyset と X のみ

T が条件 (#) を満たす

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall U : T \text{ 不変開集合}$
 $\exists V ; \quad "$
s.t. $\overline{V} \subset U$

Lem $(X, T, S) : \text{極小}$

T が条件 (#) を満たす

$\implies \exists Y : \text{the Cantor set}$

$\varphi \in \text{Homeo}(Y) ; \text{極小}$

$f : Y \rightarrow \mathbb{Z} : \text{conti.}$

s.t. $\gamma \in \text{Homeo}(X \times Y) ; \text{極小}$

$\gamma(x, y) := (TS^{f(y)}(x), \varphi(y))$

Lem (X, T, S)

$T \in \text{Homeo}(X)$: 極小

$\Rightarrow C(X) \rtimes_{T,S} \mathbb{Z}^2$ は

AF 埋め込み可能

☹ $C(X) \rtimes_{T,S} \mathbb{Z}^2$

$$= \underbrace{C(X) \rtimes_T \mathbb{Z}} \rtimes_S \mathbb{Z}$$

この部分は AT 環になることが知られている

Thm

A : AT 環 $\alpha \in \text{Aut}(A)$

$\Rightarrow A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ は

AF 埋め込み可能

Lem $(X, T, S) \left. \vphantom{\begin{matrix} (X, T, S) \\ (Y, T', S') \end{matrix}} \right\} \text{極小}$
 (Y, T', S')

$\pi: Y \rightarrow X$: factor map

T は 条件 (#) を 満たす

π は local homeo. であるか

もしくは almost one-to-one

(つまり $\exists y \in Y \quad \pi^{-1}\pi(y) = \{y\}$)

$\Rightarrow T'$ も 条件 (#) を
 満たす