Centralizers of Cantor minimal systems

松井宏樹

1　はじめに

カントール極小系とその周辺のいくつかの話題について、難しくならないように気をつけながら、面白そうなところだけをつまみ食いして楽しむ、というのがこのノートの目的です。基本的には結果を紹介するだけなので、このノートを読むだけならばほとんど予備知識はいりません。せいぜい位相空間論とか群論の初歩だけで十分でしょう。しかし、証明しようとするとわりと大変だったりする事柄が多いことも事実なので、証明が気になる方のために、参考文献だけはきちんとあげることにします。

扱う対象は、局所コンパクトハウスドルフ空間 X と X から X への同相写像（つまり自己同相）φ の組 (X,φ) です。このような (X,φ) をここでは位相力学系と言うことにします。まず最初に φ の極小性を定義してから、どのような空間の上に極小な φ が存在しうるかという問題を考えます。次の節では、カントール集合というちょっと変わった位相空間の性質を調べます。その次にいよいよカントール極小系を説明します。ただし、あまり専門的な話をしても仕方ないので、感覚的に理解することが可能な例をとおして、大ざっぱに説明するだけにします。そして最後に、筆者自身の得た結果を紹介します。

2　極小性と位相推移性

X が局所コンパクトなハウスドルフ空間であるとき、X から X への同相写像の全体を $\mathrm{Homeo}(X)$ と書くことにします。写像の合成に関して $\mathrm{Homeo}(X)$ は群になっています。いま $\varphi \in \mathrm{Homeo}(X)$ をひとつ固定します。各点 $x \in X$ に対して

$$Orb_\varphi(x) \;=\; \{\ \varphi^n(x)\ \ ;\ \ n \in \mathbf{Z}\ \}$$

とおき、この集合を x の（φ に関する）軌道と呼びます。x の軌道 $Orb_\varphi(x)$ は X の可算部分集合であって、$Orb_\varphi(x)$ が有限集合になることと x が周期点（つまりある $n \in \mathbf{N}$ に対し

て $\varphi^n(x) = x$ となる）であることは明らかに同値です。次のような定義をします。

定義 1. (X, φ) が位相力学系であるとする。

(i) (X, φ) が位相推移的（topologically transitive）であるとは、ある $x \in X$ が存在して、$Orb_\varphi(x)$ が X で稠密になることを言う。

(ii) (X, φ) が極小（minimal）であるとは、すべての $x \in X$ に対して、$Orb_\varphi(x)$ が X で稠密になることを言う。

極小性は位相推移性よりも強い性質であることがわかります。(X, φ) が位相推移的であれば当然 X は可分でなければなりません。

極小な位相力学系の例を考えてみます。X が整数全体の集合 $\mathbf{Z}$ であるとしましょう。そして φ を、$n \in \mathbf{Z}$ に対して $\varphi(n) = n + 1$ とします。すると任意の $n \in \mathbf{Z}$ について $Orb_\varphi(n) = \mathbf{Z}$ となりますから、$(\mathbf{Z}, \varphi)$ は極小な力学系です。でもこの例は、空間全体がひとつの軌道になっているので、ぜんぜん面白くありません。

今度は面白い例をあげます。X は一次元トーラス $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ であるとします。無理数 $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ をひとつ固定します。実数 x に α を足すという操作 $x \mapsto x + \alpha$ は、自然に $X = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ の上の同相写像を導きます。これを φ と書きます。すると (X, φ) は極小な位相力学系になることが知られていて、無理数回転（irrational rotation）という名前までついています。(X, φ) が極小であることの証明はとても簡単です。たとえば [PY] の補題 1.6 をご覧になってください。

さて、与えられた局所コンパクトハウスドルフ空間 X の上に、位相推移的もしくは極小な自己同相写像 φ は存在するでしょうか。この問題の答えを表にしてみたのが次です。

	極小	位相推移的
$\mathbf{R}$	ない	ない
$\mathbf{R}/\mathbf{Z}$	ある	ある
$\mathbf{R}^2$	ない	ある
$\mathbf{R}^2 \setminus \{\text{finite points}\}$	ない	ある
$\mathbf{R}^n$ $(n \geq 3)$	?	ある
$\mathbf{S}^{2n}$	ない	ある
$\mathbf{S}^{2n+1}$	ある	ある
カントール集合	ある	ある

この表についてちょっと説明します。

X が $\mathbf{R}$ つまり直線のときは、表の欄はどちらも「ない」になっています。つまり、位相推移的な自己同相は（したがってもちろん極小写像も）存在しません。これはとても簡単に証明できます。位相空間論の手頃な演習問題といった感じです。

位相推移的な自己同相の欄は、いちばん上を除いてほかはすべて「ある」になっています。つまり、たいていの空間に位相推移的な自己同相は存在するわけです。[O] の 18 章には、X が $[0,1]\times[0,1]$ （つまり正方形）であるときの証明が出ています。この証明の真似をすれば、X が「二次元以上の局所ユークリッド的な可分コンパクト距離空間の連結開集合」である場合に、位相推移的な自己同相が作れることがわかります。（証明のポイントはベールの定理です。）というわけで、上の表にあげられた $\mathbf{R}$ とカントール集合以外の空間については、位相推移的な自己同相を持つことがわかります。

極小な自己同相写像の欄は結構「ない」ことも多いですね。順番に見ていくと、まず $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ のときは、さっき例としてあげた無理数回転という極小写像があります。平面 $\mathbf{R}^2$ に極小写像がないことは、Brouwer transformation theorem の系としてわかります。この定理の証明はたとえば [Fr1] にあります。（私はこの証明をフォローしていません。たとえ $\mathbf{R}^2$ と言えど割とめんどくさいみたいです。）[H] には、平面から二個以上の有限個の点を抜いた空間に極小自己同相が存在しないことの証明があります。平面から一点を除いた空間にもやはり極小同相写像が存在しないことは [CY] で示され、その後より簡単な証明が [Fr2] で与えられました。（それでもやっぱり難しいみたいですね。）ところが n が三以上のときの $\mathbf{R}^n$ では、まだわかっていないのではないかと思われます。（少なくとも私は証明の書いてある文献を発見できませんでした。）局所コンパクトだがコンパクトではない連結な空間 X が極小自己同相写像をもつという例は、いままでのところ知られていないのではないかという気がします。

X がコンパクトな多様体であるときには、極小同相写像を持ちうるためには少なくともオイラー数がゼロでなければならないということが知られています（[Fu] 参照）。したがって $2n$ 次元球面 $\mathbf{S}^{2n}$ には極小自己同相は存在しません。$\mathbf{S}^{2n+1}$ には存在するというのは、[FH] で示されています。[FH] ではもっと一般に、一次元トーラスの局所自由な作用を持ちうるコンパクト多様体の上には極小微分同相写像が存在する、という命題が証明されています。構成のポイントはやはり無理数回転です。

表のいちばん下に、カントール集合をあげました。節をあらためて、このちょっと変わった位相空間を考えてみたいと思います。

3　カントール集合

まず位相空間についての言葉をいくつか定義します。

定義 2. (i) 位相空間 X が完全（perfect）であるとは、X が孤立点を含まないことをいう。

(ii) 位相空間 X が全不連結（totally disconnected）であるとは、全ての連結成分が一点のみからなることをいう。

(iii) 位相空間 X が完全不連結（extremally disconnected）であるとは、開集合の閉包がまた開集合であることをいう。

本によっては、上の定義の (ii) と (iii) の用語が違っていることがしばしばあります。ここでの言葉の使い方は岩波の数学辞典によっています。一般に、ハウスドルフ空間が完全不連結であれば全不連結ですが逆は成立しません。（いまから説明するカントール集合は、全不連結ですが完全不連結ではありません。）完全不連結な空間としては、例えば $\beta\mathbf{N}$（可算離散集合のストーンチェックのコンパクト化）があげられます。

定理 3. $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ に直積位相を入れた空間は、完全かつ全不連結なコンパクト距離空間である。逆に、位相空間 X が完全かつ全不連結なコンパクト距離空間であるならば、X は $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ に同相である。

証明は [Y] の例 5.8 に書いてあります。位相が開かつ閉な部分集合で生成されるという性質（0-dimensional と言われる）と全不連結という条件が、コンパクト性の仮定のもとで同値になることが証明のポイントです。ちなみにこの本の例 2.13 には、$\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ と $\{a,b,c\}^{\mathbf{N}}$ が同相であることのわかりやすい証明が書いてあります。

定義 4. 上の定理の条件を満たす位相空間をカントール集合と呼ぶ。つまり、カントール集合とは $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ に同相な位相空間のことである。

X をカントール集合としましょう。定義から、X は $X \times X$ にも同相だし、$X^{\mathbf{N}}$ にも同相であることになります。また、X の空でない開かつ閉な部分集合は X 自身と同相であることもわかります。このように、カントール集合 X はきわめて特殊な性質を持った空間です。

さて、この変わった空間であるカントール集合の上の位相力学系として、マルコフサブシ

フトと呼ばれるものを考えてみたいと思います。

n を二以上の自然数とします。n かける n の行列で、行列の各成分が 0 もしくは 1 であるようなものを $0-1$ 行列と呼ぶことにします。

定義 5. $0-1$ 行列 A が既約であるとは、任意の $1 \leq i, j \leq n$ に対してある $m \in \mathbf{N}$ が存在し、$A^m(i,j)$（A^m の ij 成分）がゼロでないことをいう。

いまサイズが n かける n の $0-1$ 行列 A が与えられたとして、次のようなことを考えてみます。n 個の元からなる集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ を用意します。$\{1, 2, \ldots, n\}^{\mathbf{Z}}$ は（直積位相によって）カントール集合です。行列 A を使ってこのカントール集合の部分集合 X を

$$X = \{x = (x_n)_{n \in \mathbf{Z}} \ ; \ A(x_n, x_{n+1}) = 1 \text{ for all } n \in \mathbf{Z}\}$$

とおきます。すると X は閉部分集合であることがわかります。そして $x = (x_n)_n \in X$ に対して、$\varphi(x) = (x_{n+1})_n$ と決めると、$\varphi(x)$ もまた明らかに X の点になります。φ という写像は、両側無限列を「ずらす」働きをしていて、ちょっと考えると X から X への同相写像になっていることもわかります。つまり (X, φ) は位相力学系です。この力学系は昔からよく研究されているもので、マルコフサブシフトとか有限型サブシフトとか呼ばれています。例として、行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

を考えてみましょう。行列 A が既約であることはすぐわかります。A から決まる $\{1, 2, 3\}^{\mathbf{Z}}$ の閉集合 X にはたとえば

$$\ldots 12323213.23121323 \ldots$$

という点が含まれています。（真ん中の小数点みないなのは、$0 \in \mathbf{Z}$ に対応する座標を明示するために書いています。）この点は φ によって

$$\ldots 23232132.3121323 \ldots$$

という点に移るわけです。こんな風に、「記号」をたくさん並べて考えたりすることが多いので、カントール集合の上の力学系のことを、記号力学系と言ったりもします。

次が成り立つことが知られています。

定理 6. 上の設定で、$0-1$ 行列 A が既約であったとする。すると、X はカントール集合になり、また (X, φ) は位相推移的になる。

証明はたとえば [PY] の定理 1.4 を見て下さい。そんなに難しくありません。

定理によるとマルコフサブシフトは位相推移的になることがあるわけですが、実は、絶対に極小にはなりません。次の節では別の方法で、カントール集合の上の極小同相写像を構成したいと思います。

4 カントール極小系

X がカントール集合であって φ が X の上の極小な自己同相写像であるとき、(X, φ) をカントール極小系と呼びます。

カントール極小系の例を説明する前に、次元群と呼ばれる不変量を定義しておきましょう。(X, φ) をカントール極小系とします。$C(X, \mathbf{Z})$ と書いて、X から整数群 $\mathbf{Z}$ への連続関数の全体を表すことにします。空間が連結である場合には、$\mathbf{Z}$ のような離散空間への連続関数は、全空間で定数であるようなものに限られてしまい、つまらないものでしかありません。しかし、カントール集合 X は開かつ閉な集合をたくさん持つので、$C(X, \mathbf{Z})$ を考えることに意味があるわけです。各点ごとに足し算することによって、$C(X, \mathbf{Z})$ はアーベル群になっています。

$$B_\varphi = \{f - f \circ \varphi\ ;\ f \in C(X, \mathbf{Z})\}$$

とおきます。明らかに B_φ は $C(X, \mathbf{Z})$ の部分群になっています。これをコバンダリー部分群と呼びます。そして、$C(X, \mathbf{Z})$ を B_φ で割った群を $K^0(X, \varphi)$ と書くことにします。関数 $f \in C(X, \mathbf{Z})$ の定める $K^0(X, \varphi)$ の元を $[f]$ と記すことにします。明らかに $K^0(X, \varphi)$ もアーベル群です。いま、正錐と呼ばれる $K^0(X, \varphi)$ の部分集合 $K^0(X, \varphi)^+$ を

$$K^0(X, \varphi)^+ = \{[f]\ ;\ f \in C(X, \mathbf{Z}),\ f \geq 0\}$$

と決めます。$K^0(X, \varphi)^+$ の二つの元の和はまた $K^0(X, \varphi)^+$ の元になりますが、$K^0(X, \varphi)^+$ は部分群ではありません。また、X 全体で 1 という値を取る定数関数の定める同値類 $[1]$ は、もちろん $K^0(X, \varphi)^+$ のひとつの元を定めます。このようにして $(K^0(X, \varphi), K^0(X, \varphi)^+, [1])$ という三つ組が決まったわけですが、これを (X, φ) に付随する（単位元をもつ）次元群と呼びます。（この次元群は、勝良さんの講演に出てきた AF 環の K_0 群と密接な関わりを持っています。詳細については [GPS] とそこにあげられている参考文献を参照して下さい。）[GPS] における主要結果は、三つ組 $(K^0(X, \varphi), K^0(X, \varphi)^+, [1])$ がカントール極小系 (X, φ) の強軌道同型類の完全不変量であるということを主張するものです。[M1] では、軌道同型や強軌道同型の定義も含めて [GPS] の結果を日本語で紹介していますので、興味のある方はご覧になってください。

それではカントール極小系の例を紹介しましょう。

まずダンジョワ系と呼ばれている例を説明します。これは前に説明した無理数回転とも関連しているカントール極小系です。$\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ を無理数とします。

$$A = \{n + m\alpha\ ;\ n, m \in \mathbf{Z}\}$$

という $\mathbf{R}$ の可算部分集合を考えます。A の元を添え字に持つ二つの可算集合 $B = \{b_p; p \in A\}$ と $C = \{c_p; p \in A\}$ を用意します。そして、集合 Y を、$\mathbf{R} \setminus A$ と B と C との、互いに素な和（disjoint union）と決めます。今から集合 Y の上に全順序 $\preceq$ を定義したいと思います。まず、$\mathbf{R} \setminus A$ の二点に対しては、その順序関係を $\mathbf{R}$ における通常の順序と同じとします。そして、$x \in \mathbf{R} \setminus A$, $b_p, b_q \in B$, $c_p, c_q \in C$ に対して、

$$x \prec b_p \overset{def}{\Leftrightarrow} x < p, \quad x \prec c_p \overset{def}{\Leftrightarrow} x < p$$

$$b_p \prec b_q \overset{def}{\Leftrightarrow} p < q, \quad c_p \prec c_q \overset{def}{\Leftrightarrow} p < q$$

$$b_p \prec c_q \overset{def}{\Leftrightarrow} p \leq q$$

とします。これでちゃんと Y に全順序が定義されたことがわかります。Y には最大元も最小元もないことに注意します。（要するに Y は、実数直線の中で A の点のところで切り込みを入れた感じの集合です。数学的にきちんと説明しようとすると結構ごちゃごちゃしてしまいますね。）$y_1 < y_2$ という二点に対して、$(y_1, y_2) = \{y \in Y; y_1 < y < y_2\}$ とおきます。(y_1, y_2) という形の集合を開集合の準基底とするような位相を Y に入れます。この位相によって Y は、局所コンパクトハウスドルフ空間になります。（「閉区間」のコンパクト性は、実数のときと全く同様に示されます。たとえば [Y] の定理 4.1 を参照のこと。ポイントは、上に有界な Y の部分集合は必ず上限をもつという事実です。）また、A という集合が $\mathbf{R}$ で稠密であることを使うと、Y の位相が開かつ閉な集合で生成されることもわかります。さて、$x \in \mathbf{R} \setminus A$ と $p \in A$ に対し

$$x \mapsto x + 1, \quad b_p \mapsto b_{p+1}, \quad c_p \mapsto c_{p+1}$$

とすることによって、「1を足す」という全単射写像 T_1 が Y の上でよく定義されます。しかも T_1 は順序を保っていますから、T_1 は Y から Y への同相写像になります。同様に「α を足す」という同相写像 T_α もよく定義されます。T_1 という作用で Y という空間をわったものを X とします。つまり、

$$y_1 \sim y_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} T_1^n(y_1) = y_2 \text{ for some } n \in \mathbf{Z}$$

という同値関係で Y を類別した集合が X です。商写像を $\pi : Y \to X$ とし、X にはこれによる商位相を入れます。少し考えると、X はカントール集合であることがわかります。しかも、T_α という Y の同相写像は、自然に X の同相写像 φ を導き、$\varphi \circ \pi = \pi \circ T_\alpha$ となっています。この (X, φ) が実はカントール極小系になっているのです。φ が極小であることをきちんとは証明しませんが、本質的には無理数回転の時と全く同じです。(最初に選んだ α が無理数であるということが大事です。)

では、この節の最初に説明した次元群はこの場合どうなっているでしょうか。結果だけを述べると、$K^0(X, \varphi)$ は $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ に同型であり、正錘は

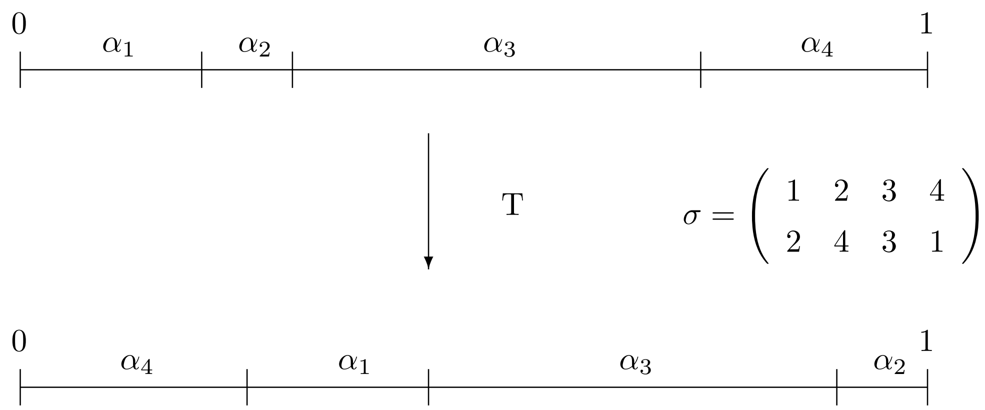
$$K^0(X, \varphi)^+ = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \ ; \ n + m\alpha \geq 0\}$$

となっています。また [1] は $(1, 0)$ に対応します。これより、正錘までこめて考えると、α が異なれば次元群も違ってくることになります。これらの計算の詳細は [PSS] に書いてありますので、ご覧になってください。また、(X, φ) の C^* 環を用いた(日本語の)説明が [M1] にもあります。

では次に、区間入れ替え変換 (interval exchange transformation) と呼ばれるカントール極小系を説明します。(この区間入れ替えという言葉は私が勝手に作った和訳です。もし既に interval exchnge という言葉の和訳がどこかにありましたらごめんなさい。) 2 以上の自然数 n を固定します。その和がちょうど 1 になるような n 個の正の実数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ を用意します。$[0, 1)$ という半開区間を

$$\beta_0 = 0, \ \beta_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i, \quad I_i = [\beta_{i-1}, \beta_i)$$

というふうにして、$I_1, I_2, \ldots, I_n$ という半開区間達の和にわけます。$\{1, 2, \ldots, n\}$ の上の置換 σ をひとつ固定して、σ によって $I_1, I_2, \ldots, I_n$ たちを入れ替えるという変換 T を考えます。たとえば次の図のような感じです。



変換 T は、$[0,1)$ から $[0,1)$ への全単射ではありますが、明らかに β_i のところで連続ではありません。$A_0 = \{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$ として、

$$A = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} T^k(A_0)$$

とおきます。A は $[0,1)$ の可算部分集合です。この A を用いて、さきほどのダンジョワ系のときと同様のことをします。つまり、A の元を添字にもつ二つの集合 B と C を用意して、

$$X = ((0,1] \setminus A) \cup B \cup C \cup \{0\}$$

とおき、全順序を入れます。「開区間」を開集合にするような位相を X に入れると、T に対応する X から X への写像が同相写像としてよく定義されることがわかります。この (X, φ) のことを区間入れ替え変換と呼びます。

定理 7. 上の設定で、さらに次を仮定する。

(i) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ が $\mathbf{Q}$ 上一次独立である。
(ii) $\sigma(\{1, 2, \ldots, j\}) = \{1, 2, \ldots, j\}$ ならば $j = n$ である。

すると、(X, φ) はカントール極小系になる。

[K1] に証明があります。（本当はこれより弱い条件でも大丈夫であることが証明されています。）$n = 2$ のケースは、実は、前に説明したダンジョワ系と同型なものになることがわかるので、区間入れ替え変換はダンジョワ系の一般化であるということもできます。

区間入れ替え変換 (X, φ) の次元群は $K^0(X, \varphi)$ は、$\mathbf{Z}^n$ に同型になることが知られています。（[P] の定理 2.1 を参照してください。）$\mathbf{Z}^n$ の生成元は、$[\beta_{i-1}, \beta_i)$ という区間の特性

関数たちです。したがって [1] は $(1,1,\cdots,1)$ に対応します。では正錘はどうなっているでしょうか。変換 T や φ は明らかに $[0,1)$ 区間のルベーグ測度を保っています。よって、次元群の元 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{Z}^n\setminus\{0\}$ が正錘に含まれるためには、最低限

$$\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\cdots+\alpha_na_n>0$$

でなければばりません。しかし一般にはこの条件は必要条件にすぎないことが知られています。（つまり $\{\alpha_i\}$ や σ によっては、区間入れ替え変換は uniquely ergodic ではないのです。）詳しくは [KN] や [K2] などをご覧になってください。

5　カントール極小系の中心化元

最後に私自身が得た結果について簡単に紹介したいと思います。

(X,φ) がカントール極小系であるとします。

$$C(\varphi)=\{\gamma:X\to X\ ;\ \gamma \text{ is continuous},\ \ \gamma\circ\varphi=\varphi\circ\gamma\}$$

とおきます。$C(\varphi)$ は、極小な同相写像 φ と交換するような、X から X への連続写像の全体です。もし $C(\varphi)$ が同相写像のみからなる集合であるならば $C(\varphi)$ は群になるわけですが、一般には $C(\varphi)$ はモノイドでしかありません。いま $\gamma\in C(\varphi)$ であったとしましょう。この γ から次元群 $K^0(X,\varphi)$ の上の群準同型　$\mathrm{mod}\ (\gamma)$ が得られることを説明します。任意の $g\in C(X,\mathbf{Z})$ に対して、$g\circ\gamma$ はまた $C(X,\mathbf{Z})$ の元ですから、γ は加群 $C(X,\mathbf{Z})$ 上の準同型を定めています。$f\in C(X,\mathbf{Z})$ として、$f-f\circ\varphi$ という形の元について γ をひっかけてやると、

$$(f-f\circ\varphi)\circ\gamma=f\circ\gamma-f\circ\varphi\circ\gamma=f\circ\gamma-f\circ\gamma\circ\varphi$$

となって、やはりコバウンダリー部分群の元になることがわかります。したがって、γ を合成するという操作は、コバウンダリー部分群による商群である $K^0(X,\varphi)$ の群準同型を、よく定義することがわかります。γ によって決まるこの群準同型を　$\mathrm{mod}\ (\gamma)$ と書きます。そして、

$$T(\varphi)=\{\gamma\in C(\varphi)\ ;\quad \mathrm{mod}\ (\gamma)=id\}$$

とします。また、$C_h(\varphi)=\{\gamma\in C(\varphi);\gamma \text{ is a homeomorphism}\}$ とし、$T_h(\varphi)=C_h(\varphi)\cap T(\varphi)$ とおきます。

私は次の定理を証明しました。

定理 8.　(i) (X,φ) がカントール極小系のとき、もし $T_h(\varphi)$ が有限部分群 G を持てば、G は巡回群である。

(ii) $T(\varphi) \setminus T_h(\varphi)$ が空でないようなカントール極小系 (X, φ) が存在する。

(i) の結果は、$C_h(\varphi)$ が任意の有限群を含みうる（というのは昔から知られていました）のに比べて、$T_h(\varphi)$ には強い制限があるということを主張しています。実際これまでのところ、$T(\varphi)$ が非可換になるような例さえ見つかっていません。(ii) は、$\gamma \in C(\varphi)$ 自身は同相写像ではないのに、次元群の上に導く写像　mod (γ) は恒等写像になってしまうことがあると言っているわけで、ちょっと不思議な感じがします。(i)(ii) の証明はそれぞれ [M2] と [M3] にあります。どちらのプレプリントも京大数学教室のホームページから取れるようになっていますので、もしよければご覧になってください。

参考文献

[CY] Le Calvez, P.; Yoccoz, J. C.; *Un thorme d'indice pour les homomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe*, Ann. of Math. (2), 146 (1997), 241-293.

[Fu] Fuller, F. B.; *The existence of periodic points*, Ann. of Math. (2), 57 (1953), 229-230.

[FH] Fathi, A.; Herman, M; *Existence de diffomorphismes minimaux*, Asterisque, N0. 49, (1977), 37-59.

[Fr1] Franks, J.; *A new proof of the Brouwer plane translation theorem*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 12 (1992), 217-226.

[Fr2] Franks, J.; *The Conley index and non-existence of minimal homeomorphisms*, Proceedings of the Conference on Probability, Ergodic Theory, and Analysis (Evanston, II, 1997), Illinois J. Math., 43 (1999), 457-464.

[GPS] Giordano, T.; Putnam, I. F.; Skau, C. F.; *Topological orbit equivalence and C^*-crossed products*, J. reine angew. Math., 469 (1995), 51-111.

[H] Handel, M.; *There are no minimal homeomorphisms of the multipuctured plane*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 12 (1992), 377-400.

[K1] Keane, M; *Interval exchange transformations*, Math. Z., 141 (1975), 25-31.

[K2] Keane, M; *Non-ergodic interval exchange transformations*, Israel J. Math., 26 (1977), 188-196.

[KN] Keynes, H; Newton, D.; *A "minimal", non-uniquely ergodic interval exchange transformation*, Math. Z., 148 (1976), 101-105.

[M1] 松井宏樹; *Cantor minimal systems and full groups*, 京都大学数理解析研究所講

究録 1110, Hilbert C^*-modules and groupoid C^*-algebras, 9-17.

[M2] Matui, H.; *Finite order automorphisms and dimension groups of Cantor minimal systems*, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[M3] Matui, H.; *Dimension groups of topological joinings and non-coalescence of Cantor minimal systems*, preprint 2000.

[O] Oxtoby, J. C.; *Measure and category*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 2, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971.

[P] Putnam, I. F.; *The C^*-algebras associated with minimal homeomorphisms of the Cantor set*, Pacific J. Math., 136 (1989), 329-353.

[PSS] Putnam, I. F.; Schmidt, K.; Skau, C. F.; *C^*-algebras associated with Denjoy homeomorphisms of the circle*, J. Operator Theory, 16 (1986), 99-126.

[PY] Pollicott, M; Yuri, M; *Dynamical systems and ergodic theory*, London Mathematical Society student Texts 40, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[Y] 矢野公一; 距離空間と位相構造, 共立講座２１世紀の数学第４巻, 共立出版

e-mail; matui@kusm.kyoto-u.ac.jp
〒606-8502 京都市左京区北白川追分町
京都大学理学部数学教室