# カントール極小系の次元群と自己同型群

松井 宏樹

$(X, \varphi)$; Cantor minimal system

$\Longleftrightarrow$ $X := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ the Cantor set

$\varphi \in \mathrm{Homeo}(X)$ : minimal

i.e. $\forall x \in X$

$\{\varphi^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ is dense in $X$

$C(\varphi) := \{\gamma \in \mathrm{Homeo}(X) \mid \gamma \circ \varphi = \varphi \circ \gamma\}$

automorphism group of $(X, \varphi)$

$C(\varphi)$ は $X$ に自由に作用し もちろん $\varphi$ の巾を含んでいる。 $C(\varphi) \supset \mathbb{Z}\varphi$

$$K^0(X,\phi) := C(X,\mathbb{Z}) \Big/ \{ f - f\circ\phi^{-1} \mid f \in C(X,\mathbb{Z}) \}$$

<u>Thm (GPS)</u>

$(K^0(X,\phi), K^0(X,\phi)^+, [1])$ は simple dimension group であって、$(X,\phi)$ の強軌道同型類に対する完全不変量である。

$\gamma \in C(\phi)$ に対して

$$\mathrm{mod}(\gamma) : [f] \mapsto [f\circ\gamma^{-1}]$$

は $K^0(X,\phi)$ の automorphism として well-def. である。

## Thm

$T(\phi) := \ker \mathrm{mod} \lhd C(\phi)$

(i) $T(\phi) \supset H$ ; finite subgroup

$\Rightarrow$ $H$ は巡回群

(ii) $C(\phi) \supset G$ ; finite subgroup

素数 $p$ が $G \cap T(\phi)$ の位数をわる

$\Rightarrow$ $G$ の $p$-シロー群

は 巡回群

## Remark

(Lemańczyk & Mentzen '88)

$\forall G$ ; finite group

$\exists (X, \phi)$ : Cantor minimal system

s.t. $C(\phi) = \mathbb{Z}\phi \oplus G$

skew product extension の

$K^0$-group を計算する必要がある。

$(Y, \psi)$ ; Cantor minimal system

$c : Y \to G$ ; conti.

$X := Y \times G$ ; Cantor set

$\phi(y, g) := (\psi(y), g \cdot c(y))$

$\gamma_h(y, g) := (y, hg)$

$(X, \phi)$ ; skew product extension

$\{\gamma_h\}_{h \in G} \subset C(\phi)$ ; canonical commutant

Thm

$K^0(X, \phi)$

$= \lim B_n : \mathbb{Z}[G]^{m_n} \to \mathbb{Z}[G]^{m_{n+1}} \Big/ \mathbb{Z}^{|G|-1}$

と書ける。ただし $B_n$ は $\mathbb{Z}[G]$-module positive map.

**Thm**

$(D, D^+, u)$ ; simple dimension group

$m \in \mathbb{N}$ T.F.A.E.

(i) $\exists (X, \phi)$

s.t. $K^0(X, \phi) \cong D$

as a dimension group

$T(\phi) \supset \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

(ii) $D/mD \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ as a group

かつ $u \in D$ は $m$ でわれる。

例 $(X, \phi)$ ; Morse substitution からできる subshift

$(0 \mapsto 01 \quad 1 \mapsto 10)$

$C(\phi) = T(\phi) \cong \mathbb{Z}\phi \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$K^0(X, \phi) \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \oplus \mathbb{Z}$