昔の思い出

松田 茂樹

1989 年 8 月 1 日

0　序文

僕は大学の三年になるまで、整数論という分野があることをよく理解していなかったのですが、数学科へ進もうとか思う人が僕と同じ状況にあったなら、これはあまり好ましいことではないので、紹介らしきものを書きます。(ただし、数論の紹介ではなく、何故、数論が好きになったかの紹介です。)

他学科と同じく数学科でも専門の講義は 2 年の後期から始まります。「代数」が好きだった私は、ある時教官写真集を見て、代数演習の助手の人の専攻の欄に「整数論」と書かれているのを見て、愕然とした記憶があります。一体大学という所で、未だに整数などを研究して何が楽しいのだろうか。勿論、この時の私の頭には、高校の数 I 程度のイメージしかなかった訳です。この印象が変わったのは、3 年の前期に可換環論を習ってからです。(この時、輪講で高木貞次の『代数的整数論』を読んでいたせいもある。) この講義において

- 可換環は、幾何的な対象である。
- 従って、整数論も幾何的なものである。

という見方があることを知りました。事情に通じている人なら要するに僕が代数幾何なるものを知らなかったのだなあと分るはずです。ただ、特に数論で扱うような可換環は十分に普通の幾何的対象に近いものだということを強調しておきます。

さて、ここで「幾何、幾何」と叫んでいるのは、多様体 (特に複素多様体) および、ホモロジー、コホモロジー論のことです。余計なお喋りはこのくらいにして

1 多様体の位相空間が、その上の関数環 (或いは環の層) と結びついている様子。
2 整数環を直線と見做す見方。
3 上の見方による御利益。
4 言い訳。

の順に話していくことにします。

1　多様体とその上の関数環

まず注意したいのは、極大イデアルと点の関係です。

例 **1.1.**

$$\begin{array}{ll} M: & C^\infty\text{-多様体} \qquad x: M \text{ 上の点} \\ \mathcal{O}: & M \text{ 上の } C^\infty \text{ 関数のなす環} \end{array}$$

とするとき、$\mathfrak{m}_x = \{f \in \mathcal{O} \mid f(x) = 0\}$ は $\mathcal{O}$ の極大イデアルになる。

Proof. $f \notin \mathfrak{m}_x$、即ち $f(x) \neq 0$ ならば $\mathcal{O}f + \mathfrak{m}_x = \mathcal{O}$ となることを示せばよい。x の近傍 $U \subset M$ で正数 ε に対し、

$$f(y) > \varepsilon \text{ for } \forall y \in U \tag{1.1}$$

となるものがある。U 内に台を持ち、x で 1 を取る C^∞-関数 ρ で任意の $z \in M$ に対して $0 \leq \rho(z) \leq 1$ となるようなものを作れる。$f' = \rho f + 1 - \rho$ と置くと、$(1-\rho)(y) = 0$ となるところでは、つまり $\rho(y) = 1$ なら、$y \in U$ より $\rho f(y) = f(y) > 0$ となる。故に f' は M 上至る所 0 でないから $f' \in \mathcal{O}^\times$ でかつ $f' \in \mathcal{O}f + \mathfrak{m}_x$ だから O.K. □

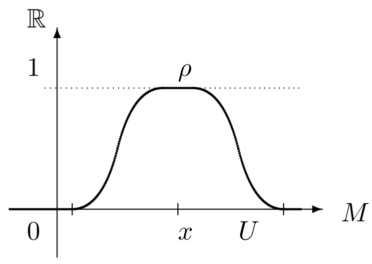


図 1　ρ

この逆は成立しません。即ち、$\mathcal{O}$ の極大イデアルは必ずしも $\mathfrak{m}_x$ の形に書けるとは限らないのですが、それでも両者の関係が深いということだけは分ると思います。

例 **1.2.** $\mathbb{C}$ を複素数体とするとき、$\mathbb{C}^n$ (直積空間) の点は、$\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ の極大イデアルと次の対応で一対一に対応する。

$$\mathbb{C}^n \in (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto (X_1 - \alpha_1, \ldots, X_n - \alpha_n) \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]. \tag{1.2}$$

この場合は綺麗に両者が対応します。$\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ は $\mathbb{C}^n$ 上の多項式型の関数全体なので、これは例 1 の類似になっています。

次に注意したいのが、多様体の位相的な性質が、その上の関数達のなす環の性質によく反映されるということです。

例 **1.3.**

$$\begin{array}{ll} M: & C^\infty\text{-多様体}, \quad x \in M \\ \mathcal{O}_x: & x \text{ のある近傍における } C^\infty \text{ 関数全体のなす環} \\ \mathfrak{m}_x: & f \in \mathcal{O}_x \text{ で } f(x) = 0 \text{ なるもののなすイデアル} \end{array}$$

とすれば、$\mathcal{O}_x$ は $\mathfrak{m}_x$ を極大イデアルとする局所環で、$\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x \simeq \mathbb{R}$ であり、$f \in \mathcal{O}_x$ の x での値と f の $\mathcal{O}/\mathfrak{m}_x$ への像を同一視出来る。更に、次が成立する。

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2) = \dim M. \tag{1.3}$$

つまり $\mathcal{O}_x$ は M の次元の情報を持つわけです。同じことは複素多様体でも言えます。(ただし、複素多様体としての次元とそれを実多様体と見做した場合の次元は異なることに注意。)

次元だけでは面白くないので、別の例を見ましょう。$\mathbb{C}$ は複素数体を表すとします。

例 **1.4.**

$$\begin{array}{lcl} U & : & \mathbb{C} \text{ 内の開集合} \\ \mathcal{O}(U) & : & U \text{ 上の正則関数全体} \\ d/dz & : & \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U);\ f \mapsto df/dz \end{array}$$

とするとき、次が成立する。

$$\frac{d}{dz} \text{ の核が定数関数のみ} \Leftrightarrow U \text{ が連結}$$
$$\frac{d}{dz} \text{ が全射} \Leftrightarrow U \text{ が単連結}$$

より一般に U の連結成分の数は $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ker}(d/dz)$ の数に一致します。層係数のコホモロジーを知っている人は $\mathbb{C}$ を定数層として

$$H^0(U, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Ker}(\frac{d}{dz})$$
$$H^1(U, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Cok}(\frac{d}{dz})$$

となることから上のことが納得出来るでしょう。

最後に環論的な面を見ておきます。

例 **1.5.**

$$\begin{aligned} x \in & \mathbb{C}^n \\ \mathcal{O}_x : & x \text{ のある近傍で正則な関数全体のなす環} \\ \mathfrak{m}_x : & f \in \mathcal{O}_x \text{ で } f(x) = 0 \text{ となるもののなすイデアル} \end{aligned}$$

とするとき、m_x は極大イデアルであり、例 1.3 で述べたように、

$$\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x \simeq \mathbb{C}, \quad \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2) = n$$

となるのですが、更に $\mathcal{O}_x$ は Krull 次元 (Appendix 付録 A 参照) が n であるような正則局所環 (Appendix 付録 B 参照) になります。特に $n = 1$ なら $\mathcal{O}_x$ は P.I.D. (単項イデアル整域) です。

ちょっと付け加えておくと、例 1.4 の記号で U が連結の時、$\mathcal{O}(U)$ はネーター環にはならず、従って、P.I.D. でもないのですが、有限生成なイデアルは単元生成になり、P.I.D. に近いものであることが分ります。(因みにこのような環のことを Bezout ring という。)

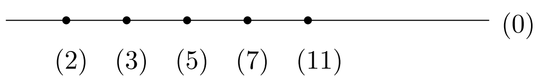
以上のような見方をする場合は、$\mathbb{C}$ は複素平面とは呼ばれているものの、どちらかと言うと一次元の対象、つまり曲面ではなく曲線 (この場合は直線) と見做した方が良いことにも注意して下さい。

2　整数環を直線と見做す

まず有理整数環 Z がどのように多様体と見做されるかということについて述べてしまいます。まず位相空間としては

$$X = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ は } \mathbb{Z} \text{ の素イデアル }\} \tag{2.1}$$

となっています。(これを $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ と書きます。) $\mathbb{Z}$ は P.I.D. ですから、素イデアルは素数 p により生成される (p) か、(0) のいずれかです。図に書けば



のようになります。例 1.1 や 例 1.2 の類似でいくと、極大イデアルだけを取ればよいのですが、ある事情から素イデアルも含めることになります。詳しくは代数幾何の本を見て下さい。位相は開集合を $\emptyset$ または X から有限個の極大イデアルを除いたものになります。で、この時の開集合 $U = X - \{(p_1), (p_2), \ldots, (p_r)\}$ 上正則な関数全体のなす環を

$$\mathcal{O}(U) = \left\{ f/g \;\middle|\; f, g \in \mathbb{Z}, g \neq 0,\ g \text{ は } p_i \text{ 達の積} \right\} \tag{2.2}$$

として定めます。ただし、p_i は素数を表します。例えば $U = X - \{(3)\}$ とすれば、

$$\mathcal{O}(U) = \left\{ f/3^r \;\middle|\; f \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{N} \right\} \tag{2.3}$$

となります。$\mathcal{O}(U)$ は P.I.D になります。また、(p) という点の近傍で正則な関数全体は $p \neq 0$、つまり p が素数なら、

$$\mathcal{O}_{(p)} = \mathbb{Z}_{(p)} = (\mathbb{Z} \text{ の } \mathbb{Z} - (p) \text{ による局所化 }) \tag{2.4}$$

ですが、これは一次元正則局所環であり、例 1.5 と対応がつくことが分ると思います。因みにこいつの極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とすると

$$\begin{aligned} &\mathcal{O}_{(p)}/\mathfrak{m} \simeq \mathbb{F}_p \quad (\text{位数 p の有限体}) \\ &\dim_{\mathbb{F}_p}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1 \end{aligned}$$

です。例 1.3 や 例 1.5 との対応を考えれば、(p) の近くで正則な関数 f は (p) における値を $\mathbb{F}_p$ という体に持つことになります。以上のような類似から、$\mathbb{Z}$ は一次元的な対象、つまり、曲線の一種だと思えるわけです。もっと一般に代数体 K (= 有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大) の整数環 $\mathcal{O}_K$ (= $\mathbb{Z}$ の K 内での整閉包) を取ってくると、$\mathcal{O}_K$ は似たような意味で曲線と見做せます。

勿論、このような定式化を行っても実質上は何も $\mathbb{Z}$ や $\mathcal{O}_K$ についての知識が増えたことにはなりません。しかし、$\mathbb{Z}$ や $\mathcal{O}_K$ についての新しい視点が与えられます。古典的な意味での曲線についての理論の類似を追うことで新たな展望が開けたりするわけです。

注意したいのは、$X = \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ は位相空間としては全くつまらない構造しか持たないことです。にも関わらず X の幾何的性質が考察出来るのは、その上の関数環の構造が大切な役割を果たすからです。これらのことをうまく説明するには例 1.4 でちょっと口走った「層」の概念が有効です。層というのは、例えば C^∞-多様体や複素多様体などでは、その位相空間に加えて微分可能構造、或いは正則関数をのっけるための構造を入れている訳ですが、それにあたるものを拡張したものです。とはいうものの定義は非常に抽象的であり、単に局所と大局をつなげる道具とでも言った方がいいかもしれません。先に $X = \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ の開集合の上で正則な関数というのを決めましたが、これは X の上に環の層を定めていることになります。一般に、位相空間 X とその上の環の層 $\mathcal{O}_X$ の対 $(X, \mathcal{O}_X)$ のことを環付空間 (Appendix 付録 C) と呼びますが、多様体は皆環付空間と見做すことが出来ます。そして今考えた $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ も環付空間の例になっているわけです。$\mathbb{Z}$ は最も単純な可換環であるわけですが、同様に勝手な (1 を持つ) 可換環は $\mathbb{Z}$ と同じようにして環付空間と見做せます。これが Grothendieck のアフィンスキームと呼ばれるものです。興味を持った人は、代数幾何 (代数・幾何と混同せぬように！) の教科書を見てると良いでしょう。

3　御利益

本当は 1 節, 2 節 に引き続いて 2 節 で説明したように可換環を幾何的対象と見做して理論を作ることの御利益について (例えば、ガロア理論というのは幾何的なものであるとか、ゼータ関数について、または Brauer

群についての応用について etc.) の話をしたかったのですが、どうも自分で文章を読み返してみると、「分る人には当たり前、そうでない人には意味不明」のことを口走っているようなので、取り敢えず整数論をかじっている人には面白いだろうと思われる例を一つだけ挙げるに留めたいと思います。

命題 3.1. *1 の原始 m 乗根を ζ_m で表す。1 の m 分体 $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ の整数環は $\mathbb{Z}[\zeta_m]$ である。*

$\mathbb{Z}[\zeta_m]$ は $\mathbb{Z}$ 上整ですから、$\mathbb{Z}[\zeta_m]$ が正規であることさえ示せばよいわけです。これは Appendix 付録 B を見れば分るように、「幾何的な」問題です。にも関わらず、普通の整数論の教科書を見ると、判別式やら何やらを用いた証明しか載っていません。これはある意味では仕方の無いことですが、これだけ代数幾何と整数論が接近している現在、もっと可換環論を利用して示す方が自然な気がします。以下可換環論はある程度知っているものとして証明を書いていきます。

Proof. (A). まず、m が素数巾の時に帰着します。$(m, n) = 1$ とするとき、

$$\mathbb{Z}[1/m][\zeta_{mn}] \cap \mathbb{Z}[1/n][\zeta_{mn}] = \mathbb{Z}[\zeta_{mn}]$$

であるから、$\mathbb{Z}[1/m][\zeta_{mn}]$, $\mathbb{Z}[1/n][\zeta_{mn}]$ が正規ならばよい。例えば $\mathbb{Z}[1/m][\zeta_{mn}]$ について、ζ_{mn} の $\mathbb{Z}[1/m][\zeta_n]$ 上の最小多項式を $f(X)$ とすれば、$f(X) \mid X^m - \zeta_n$ であり、$X^m - \zeta_n$ が m を割らない標数の所で分離的であることに注意すれば、$\mathbb{Z}[1/m][\zeta_{mn}]$ は $\mathbb{Z}[1/m][\zeta_n]$ 上 etale になる。従って、$\mathbb{Z}[1/m][\zeta_n]$ が正規なら良い。これは、$\mathbb{Z}[\zeta_n]$ が正規ならば成立する。以上から、$\mathbb{Z}[\zeta_m]$、$\mathbb{Z}[\zeta_n]$ が正規なら $\mathbb{Z}[\zeta_{mn}]$ も正規になる。

(B). 次に $m = p^r$ (p は素数) として、この場合に $\mathbb{Z}[\zeta_m]$ が正規であることを証明します。この場合は Eisenstein 多項式に直します。つまり、円周の m 等分多項式を $\Phi_m(X)$ で表すとき、上と同様にして $\mathbb{Z}[1/p][\zeta_m]$ は正規であることが分るので、後は $\mathbb{Z}_{(p)}[X]/\Phi_m(X)$ が正規であれば良いのですが、

$$\Phi_m(X) = X^{(p-1)p^{r-1}} + X^{(p-2)p^{r-1}} + \cdots + X^{p^{r-1}} + 1$$

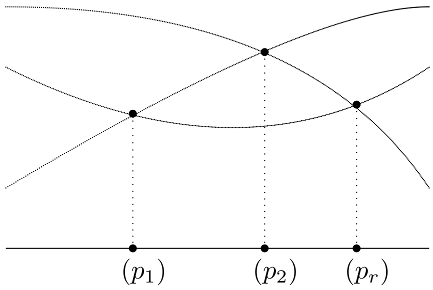
だから、$X = Y + 1$ と置けば、適当な整式 $g(Y)$ に対し

$$\Phi_m(X) = Y^{(p-1)p^{r-1}} + pg(Y)Y + p$$

と書けることが分る。従って、$Z_{(p)}[X]/\Phi_m(X)$ は $\mathbb{Z}$ 上 Eisenstein 多項式による拡大によって得られることになるので、正則であり、故に正規である。

□

一応、幾何的な解説を加えておきます。正規というのは局所的な概念です。(一次元ネーター環では正規も正則も同じなので、「接戦が引けるようなもの」と思ってよい。ここらについては Appendix 付録 B を参照。) さて、m を割る素数を $p_1, \ldots, p_r$ とすると、図で書けば次のようになっています。



つまり、Spec$\mathbb{Z}[\zeta_m]$ から Spec$\mathbb{Z}$ への射は (p_i) 達以外の所では「局所同型」になっているのです。(A) でやっているのは、各 (p_i) 以外の所では問題ないですよということを式で言い換えただけです。で、分岐が起きている (p_i) 達の所だけが問題なのですが、ここは Eisenstein 多項式を使えばクリア出来ますよというのが (B) です。このように幾何的に考えると見通しが良くなります。これがこの文章で一番言いたかったことです。(註: 上の図は、実はかなりいい加減な図です。本当は Spec$\mathbb{Z}[\zeta_m]$ はこのように分かれてはいない一本の曲線なのですが、(p_i) で分岐しているということを強調するために、こう書きました。)

4　言い訳

この文を書き始めた時は、題は「整数論とコホモロジー」にするつもりでしたが、結局はコホモロジーには殆ど触れられませんでした。ひとえに筆者の力不足と怠惰な性格によるものですが、セミナーの発表と重なっていて疲れていたこともあるのです。どうもすみません。

付録 A　Krull 次元

定義をまず述べてしまいます。A を乗法についての単位元を持つ可換環とします。(今まで、またこれ以後も、可換環と言えば単位元を持つものとする。) まず、素イデアルの減少列 $\mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_0 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_n$ のことを、長さ n の素イデアル鎖と言うことにします。素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して、$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0$ となる素イデアル鎖のうち、長さが最大であるものの長さを $\mathfrak{p}$ の高さと言い、$\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ で表します。A の Krull 次元は

$$\dim A = \sup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)} (\mathrm{ht}(\mathfrak{p})) \qquad \text{(付録 A.1)}$$

で定義されます。つまり、素イデアルの減少列の長さの最大値です。

例 付録 **A.1.**
- K が体なら、$\dim K = 0$ (素イデアルは (0) だけ。)
- $\dim \mathbb{Z} = 1.$
- $\dim A = n$ なら、$\dim A[X] = n + 1.$ 従って、

$$\dim K[X_1, X_2, \ldots, X_n] = n \quad (K \text{ は体}),$$
$$\dim \mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots, X_n] = n + 1.$$

- また、K を体として、

$$\dim(K[X,Y]/(X^3+Y^3+XY)) = 1 \tag{付録 A.2}$$
$$\dim(K[X,Y,Z]/(Z-X^2-Y^2)) = 2 \tag{付録 A.3}$$
$$\dim(K[X,Y,Z]/(X-Y^2,Z)) = 1 \tag{付録 A.4}$$

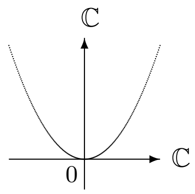
となります。

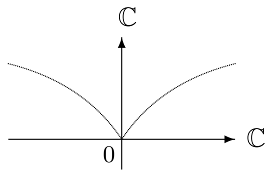
例えば、(付録 A.2) の環は、K^2 の中で $x^3+y^3+xy=0$ なる点の集合に対応し、また、(付録 A.4) の環は、K^3 の中で $x=y^2, z=0$ なる点の集合に対応します。K が $\mathbb{R}$ (実数体) の場合を考えれば感覚とあうと思います。また、$K=\mathbb{C}$ の場合を考えれば、何故 $\mathbb{C}$ ($\leftrightarrow \mathbb{C}[X]$ に対応) を曲線と見るか納得出来るでしょう。

付録 B　正則性と正規性

ここでは可換環が正則だということの定義はしません。が、例をいくつか挙げます。それで感覚は理解は出来るでしょう。大体は「接線がひける」ということに対応するという感じです。

例 付録 B.1.　$\mathbb{C}[X,Y]/(Y-X^2)$ は正則　　$\mathbb{C}[X,Y]/(Y^3-X^2)$ は非正則





例 付録 B.2.　$\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ は非正則、$\mathbb{Z}\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ は非正則。

$\mathbb{Z}[(1+\sqrt{5})/2]$ は、$\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ の正規化、即ち $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の中での整閉包になっています。つまり、整閉包を取ることで、曲線を「滑らか」にしているわけです。なお、一次元 Noether 環では正規と正則は同値になります。(一般の Noether 環では正則なら正規ということしか言えない。)

$\mathbb{C}[X,Y]/(Y^3-X^2)$ や $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ を同類にして考えることが出来るというのは、なかなか凄いことだと思います。整数論に現れる環が十分に幾何的だと考える理由の一つがここにあります。(環論をよく知っている人のために一言付け加えると、ここで僕が頭に思い浮かべているのは例えば excellent ring みたいなものです。)

付録 C　環付空間

層とか圏について知っている人に対してちょっと補足しておきます。先に多様体を環付空間と見做すと言いましたが、本当は各点の stalk が局所環である環付空間、即ち局所環付空間と見做す方がよいです。というのは、圏として見るとき、関手

$$\mathrm{Spec} : (1\,\text{を持つ可換環の圏}) \to (\text{環付空間の圏}) \tag{付録 C.1}$$

は fully faithful ではないのですが、

$$\mathrm{Spec} : (1\,\text{を持つ可換環の圏}) \to (\text{局所環付空間の圏}) \tag{付録 C.2}$$

はちゃんと fully faithful になってくれるからです。(局所環付空間の射は各 stalk の準同型が局所環の準同型になっているものと定める。) 同じように、$1 \leq r \leq \infty$ として、

$$
\begin{array}{ccc}
(C^r\text{-多様体の圏}) & \to & (\text{局所環付空間の圏}); \\
M & \mapsto & (M \text{ の位相空間}, C^r\text{-関数の層})
\end{array}
$$

なども、fully faithful な関手です。局所環付空間が多様体の自然な拡張になっていることが納得出来ると思います。

慣習上、参考文献を挙げておきます。

- 可換環論については

  [1] H. Matsumura, Commutative Algebra (Benjamin)

  がお薦めです。(神田の古本屋によく新品同様のが置いてある。) 日本語では次のものがあります。

  [2] 永田雅宜, 可換環論 (紀伊国屋書店)
- 代数幾何については、やはり EGA, つまり

  [3] Gothendieck Dieudonné, Elements de géométrique algébrique, (IHES)

  を挙げねばならないのですが、いきなり読むのは大変です。

  [4] Hartshorn, Algebraic Geometry, (Springer GTM)

  [5] Mumford, Introduction to Algebraic Geometry

  などが読みやすいでしょう。初学者には [5] あたりがお薦めです。
- 層やホモロジー代数については

  [6] 河田敬義, ホモロジー代数 I, II, (岩波基礎数学)

  や、その巻末にある参考文献を見るとよいです。

  [7] 竹内外史, 層, 圏, トポス, (日本評論社)

  は、予備知識が少なくてかつ面白いと思います。
- 整数論については山程本があるので挙げませんが、

  [8] 岩澤健吉, 代数関数論, (岩波書店)

  は一度は読んでおくべきでしょう。