圏と関手

千葉大学大学院理学研究科 松田茂樹

目次

1　概要

(1.1). この文章は千葉大の学生向けに書いた圏および関手についての紹介文です。主に [Ka76] および [Mac98] を参考にしています。

(1.2). 数学においては, いくつかの異なる理論で同じ役割をするものがいろいろとある。例えば直積という概念は, 集合の理論や, 位相空間の理論, 加群の理論, 環論などいくつもの理論に現れる。そこで, このような概念を抽象化して各理論によらないメタな理論を作ることを考える。この場合, 直積などの対象を構成的に定義しようとするとどうしても各理論に固有の定義にならざるを得ないので, そうではなく, 対象は何の構造も持たない点みたいなものと見なす。その代わりに基本的に射に注目し, 射によって対象を特徴付けることになる。少々分かりにくい例えだが, 人を見るときに, その人の身長とか体重とか中身を見るのではなく, 他者とどういう関係にあるか, 社会的な位置付けみたいなものでその人を捉えるという立場を取るようなものである。こうした視点に立つと, 例えば集合論における直積, 位相空間の直積, 加群の直積などを統一的に定義することが可能になる。また集合論のおける非連結和と加群の直和を統一的に扱うことも可能になる。それにより, 複数の理論の間の関係がよりすっきりと見えてくるし, ある数学の理論から別の数学の理論の定理を導くなどのことが簡単にできるようになる。

(1.3). 圏論は, 歴史的には Eilenberg と Mac Lane により代数的位相幾何学における「自然な射」を厳密に定式化することを目的に考えられた。「自然な射」は様々な場面に現れるが, ここでは体 K 上のベクトル空間を例にとって説明しよう。K 上の有限次元ベクトル空間は, 次元が等しければ互いに同型である。例えば V を有限次元ベクトル空間とすると, その双対空間 $V^\vee = \mathrm{Hom}(V, K)$ は V と同型である。しかし, V と $V^\vee$ の間には自然な同型は存在しない。一方, V と $V^{\vee\vee} = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(V, K), K)$ の間には $\eta : V \to V^{\vee\vee};\ x \mapsto (\varphi_x : p \mapsto p(x))$ なる自然な同型がある。この場合の $\eta : V \to V^{\vee\vee}$ の自然さを, 感覚的にではなく数学的にきちんと定義したいということである。この自然さは, 単独の V だけで考えるのではなく, 他のベクトル空間との関係, つまり線形写像まで含めて考えれば明解に説明できる。$f : V \to W$ なるベクトル空間の線形写像があった場合, やはり自然な線形写像 $F(f) : V^{\vee\vee} \to W^{\vee\vee}; \varphi \mapsto \psi$ が $\psi(q) = \varphi(q \circ f)$ で定まる。V, W についての η をそれぞれ $\eta_V : V \to V^{\vee\vee}; x \mapsto (p \mapsto p(x))$, $\eta_W : W \to W^{\vee\vee}; y \mapsto (q \mapsto q(y))$ と書いて区別する。このとき $q \circ f(x) = q(f(x)) = q(y)$ より

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V^{\vee\vee} \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \longrightarrow & W^{\vee\vee} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x & \longmapsto & (\varphi = \eta_V(x) : p \mapsto p(x)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ y & \longmapsto & (\psi = \eta_W(y) : q \mapsto q \circ f(x) = q(y)) \end{array}$$

が可換になる。この図式は $F(V) = V^{\vee\vee}$, $F(W) = W^{\vee\vee}$ と書くなら,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[d, "f"'] & F(V) \arrow[d, "F(f)"] \\ W \arrow[r, "\eta_W"'] & F(W) \end{tikzcd}$$

と表せる。このような η_V の族を与えるのが, 自然な射である。つまり, η を特定の V から $V^{\vee\vee}$ への射とみなすのではなく, 全ての K 上のベクトル空間 V について $\eta_V : V \to V^{\vee\vee}$ を定める規則と見なし, それが $f : V \to W$ なる線形写像について上の図式を可換にするということでもって「自然さ」を定式化しているわ

けである。この例における F のように, ベクトル空間のような対象と, その間の線形写像のような射の両方に別の対象や射を対応させるものを関手と呼ぶ。そして, 自然な同型 η は, この関手と関手の間の射として捉えられる。上の例で言えば, id を恒等関手, つまり V を V 自身に写し $f: V \to W$ を $f: V \to W$ そのものに写す $\mathrm{id}(V) = V$, $\mathrm{id}(f) = f$ なる関手とすると, η は関手 id から関手 F への射になっている。このような関手から関手への射を自然変換と呼ぶ。

以上のような議論を一般的に行えるような枠組を作るには, ベクトル空間のような「対象」とその間の線形写像のような「射」の集まりを抽象化する必要がある。それが圏と呼ばれるものである。そして関手は, 圏 $\mathscr{C}$ の対象をもう一つの圏 $\mathscr{C}'$ の対象に写し, $\mathscr{C}$ の射を $\mathscr{C}'$ の射に写す仕組として定義される。すると「自然な射」が, 関手から関手への射 (自然変換) として一般的に定義できるというわけである。

(1.4). このように, 圏や関手の概念はもともとは自然な射を定式化するために考えられたわけだが, 冒頭にも書いたように, このように射を重視する考え方や, 圏や関手という枠組は, その後いろいろな理論において様々な応用があることがわかってきた。もはや現代数学は圏と関手の概念なしには成り立たないと言っても過言ではない。この文章ではこれまで圏論を知らなかった学生を対象に, 主にホモロジー代数などへの応用を念頭に置いて, 圏論における基本的な概念, 言葉を理解できるようになるための入門的な内容を書いている。なお, 圏論は論理学や計算機科学などにも応用があるが, ここではそのような話題には触れていない。また, 極限の概念については別のノートにまとめるために, ここでは書いていない。

(1.5). 圏の理論においてはその性格上, 集合全体のなす族のような概念を扱わざるを得ない。そのため数学基礎論で問題になるような議論が必要になるが, ここではそのような議論は省略することにする。ただし何も用語を用意しないと記述が面倒になるので, 集合全体のなす集まりや群全体のなす集まりなどを表す言葉としてクラスという用語を使用する。集合全体からなるクラスを考えればわかるように, クラス自身は集合とは限らない。

2 圏

(2.1). 圏の導入の仕方にはいくつかの方法があるが, ここでは次のように定義することにする。

(2.2) 定義 (圏). 次のような 6 つ組 $\mathscr{C} = (\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}, \mathrm{Mor}\,\mathscr{C}, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, 1, \circ)$ を考える。

- クラス $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. その要素を対象 (**object**) と呼ぶ。
- クラス $\mathrm{Mor}\,\mathscr{C}$. その要素を射 (**morphism**) と呼ぶ。
- 写像 $\mathrm{dom} : \mathrm{Mor}\,\mathscr{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. 射 f に対し $\mathrm{dom}\, f$ を始域 (**domain**) と呼ぶ。
- 写像 $\mathrm{cod} : \mathrm{Mor}\,\mathscr{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. 射 f に対し $\mathrm{cod}\, f$ を終域 (**codomain**) と呼ぶ。また, $X = \mathrm{dom}\, f$, $Y = \mathrm{cod}\, f$ であることを記号的に $f : X \to Y$ のように表記する。集合の写像とは限らないので注意。更に, $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ に対し, $\mathrm{dom}\, f = X$, $\mathrm{cod}\, f = Y$ なる $f \in \mathrm{Mor}\,\mathscr{C}$ 全体のなすクラスを $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ ないしは, 単に $\mathrm{Hom}(X, Y)$ と書く。
- 写像 $1 : \mathrm{Ob}\,\mathscr{C} \to \mathrm{Mor}\,\mathscr{C}; X \mapsto 1_X$. 1_X はしばしば id_X とも書き, 恒等射 (**identity**) と呼ぶ。
- 任意の X, Y, $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ に対する写像 $\circ : \mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$; $(f, g) \mapsto g \circ f$. この演算を合成 (**composition**) と呼ぶ。また $g \circ f$ を f と g の合成 (**composite**) と呼ぶ。

圏 (**category**) とは, このような 6 つ組であって次の条件を満たすものである。

(1) (結合律) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ のとき $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
(2) (恒等射) 任意の $f \in \mathrm{Mor}\,\mathscr{C}$ に対し, $X = \mathrm{dom}\,f$, $Y = \mathrm{cod}\,f$ として, $f \circ 1_X = 1_Y \circ f = f$.

条件から特に $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ に対し $\mathrm{dom}\,1_X = \mathrm{cod}\,1_X = X$ でなければならないことに注意。

(2.3). 上の定義は少し分かりにくいが, 要するに, 対象全体のクラス $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ と, 対象間の射全体のなすクラス $\mathrm{Mor}\,\mathscr{C}$ を抽象的に与え, 射については, 始域 (domain) と終域 (codomain) を指定し, 恒等射と合成という射が持つ最低限の性質のみを公理的に仮定している。したがって, 定義の上では対象や射と言っても単なるクラスの要素にすぎない。それでも定義の (1), (2) の条件があるため, 射についての最低限の操作はできることになる。また, dom と cod から全ての射は何らかの対象 X から Y への射であるので, いずれかの $\mathrm{Hom}(X, Y)$ に属す。結果的に, 圏は対象のクラス $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ と, 任意の対象 X, Y に対する射の集合 $\mathrm{Hom}(X, Y)$, 恒等射, および合成から決まる。このように見た方が直観的に理解しやすいので, この形で例を挙げることにする。

(2.4) 例. 集合の圏 $\mathscr{C} = (\mathsf{Set})$ は次のように定まる。

(1) $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ は集合全体のなすクラス。
(2) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ は X から Y への写像全体のなす集合。
(3) 1_X は恒等写像 $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, X)$.
(4) 合成は写像の合成。

(2.5) 例. 群の圏 $\mathscr{C} = (\mathsf{Grp})$ は次のように定まる。

(1) $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ は群全体。
(2) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(G, H)$ は G から H への準同型全体.
(3) 1_G は恒等写像 $\mathrm{id}_G \in \mathrm{Hom}(G, G)$.
(4) 合成は準同型の合成。

(2.6) 例. 位相空間の圏 $\mathscr{C} = (\mathsf{Top})$ は次のように定まる。

(1) $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ は位相空間全体のなすクラス。
(2) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ は X から Y への連続写像全体のなす集合。
(3) 1_X は恒等写像 $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, X)$.
(4) 合成は連続写像の合成。

(2.7). 同様にして, 環の圏, 可換環の圏, A 加群の圏など様々な圏が定まる。

(2.8) 補足. 上の例から分かるように, $\mathscr{C}$ の対象は「集合」や「群」を抽象化したものであり, $\mathscr{C}$ の射はそれらの間の「写像」や「準同型」を抽象化したものであり, また 1_X は「恒等写像」を抽象化したものである。しかし, 一般の圏においては X, $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ はそれ自身が集合の構造を持っているとは限らない。したがって, 射 $f : X \to Y$ も通常の意味での集合の写像とみなせるとは限らない。単に X, $Y \in \mathscr{C}$ に対し $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ という集合が与えられて, それが上の仮定を満たしていさえすればよい。それゆえ「射の合成」も (4) の性質を満たすものとして, 抽象的に定義する必要があるわけである。以下, そのような圏の例をいくつか挙げる。

(2.9) 例. $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ も $\mathrm{Mor}\,\mathscr{C}$ も空集合である圏を空圏 (**empty category**) という。

(2.10) 例. $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ を 1 点だけからなる集合 $\{x\}$ とし, 射の集合を $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(x,x)=\{1_x\}$ と定めると $\mathscr{C}$ は圏。

(2.11) 例. S を集合とする。$\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}=S$ とし, $x,y\in S$ に対し x から y への射の集合を

$$\mathrm{Hom}(x,y)=\begin{cases}\{1_x\}, & x=y,\\ \varnothing, & x\neq y.\end{cases}$$

とすることで, 圏 $\mathscr{C}$ を作ることができる。

(2.12) 例. M をモノイドとする。つまり, M は空でない集合で, 2 項演算 $M\times M\to M\,;\ (f,g)\mapsto fg$ が定義され, 結合律 $f(gh)=(fg)h$ を満たし, 単位元, 即ち任意の $f\in M$ に対し $ef=fe=f$ となる $e\in M$ が存在するとする。この時, $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ を 1 点からなる集合 $\{x\}$ とし, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(x,x)=M$, 合成を M の演算, 1_x を $e\in M$ と定めると $\mathscr{C}$ は圏。

(2.13). 対象が集合の構造を持ち, 射も写像と見なすことができ, 集合の写像として異なれば圏の射としても異なるような圏は **concrete category** と呼ばれる。これは, 後で定義する関手の言葉を使えば, 集合の圏への忠実な関手が存在する圏として定義できる。上の例の中では最初に挙げた集合の圏や群の圏, 位相空間の圏などが典型的な concrete category である。(5.2) 参照。

(2.14) 補足. この文章の定義では, $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ や $\mathrm{Mor}\,\mathscr{C}$, $\mathrm{Hom}(X,Y)$ はクラスであって必ずしも集合ではない。上の例でも, 集合の圏や群の圏の場合は, 対象のクラス $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ は集合ではない。ただし, これらの場合でも $\mathrm{Hom}(X,Y)$ は集合である。$\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ や $\mathrm{Mor}\,\mathscr{C}$ が集合である場合, $\mathscr{C}$ を小圏 (**small category**) という。また, 任意の $X,Y\in\mathscr{C}$ に対し $\mathrm{Hom}(X,Y)$ が集合である場合, $\mathscr{C}$ は局所小 (**locally small**) であるという。ここでは説明は省くが, 圏論における集合論的な問題を回避する方法はいくつかあり, Grothendieck は, 宇宙 (universe) という仕組を導入することで, 基本的に集合の範囲で圏論を展開している。この場合は, 宇宙 $\mathscr{U}$ を固定するとき, 圏が小圏とは $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ や $\mathrm{Mor}\,\mathscr{C}$ が $\mathscr{U}$ 小集合であることとし, また, 圏が局所小とは, 任意の $X,Y\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ に対し $\mathrm{Hom}(X,Y)$ が $\mathscr{U}$ 小集合であることとする。この文章ではこのような事柄には踏み込まないが, 後で述べる米田の補題 (8.5) には局所小という条件が必要になることは注意しておきたい。

(2.15) 定義. $\mathscr{C}$ を圏, $X,Y\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ とする。$f:X\to Y$ が同型射 (**isomorphism**) であるとは, f の逆射 (**inverse**), 即ち $g:Y\to X$ なる射で, $f\circ g=1_Y$, $g\circ f=1_X$ なるものが存在することである。またこのとき X,Y は同型である (**isomorphic**) という。f が同型射であれば, 明らかに逆射も同型射である。また, g,g' がともに f の逆射なら $g=g1_Y=g(fg')=(gf)g'=1_Xg'=g'$ より $g=g'$ だから, 逆射は f に対し一意的。

(2.16) 例.
(1) 集合の圏 (Set) での同型射とは, 全単射のこと。
(2) 群の圏 (Grp) での同型射とは同型写像のこと。
(3) 位相空間の圏 (Top) での同型射とは同相写像のこと。

(2.17) 定義. 圏 $\mathscr{C}$ に対し, 射の向きを逆にした圏を双対圏 (**dual category**) ないしは逆圏 (**opposite category**) という。この文章では $\mathscr{C}^\circ$ と書く。正確には次のような圏。

$$\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}^\circ=\mathrm{Ob}\,\mathscr{C},\quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^\circ}(X,Y)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,X)$$
$\mathscr{C}^\circ$ での 1_X は $\mathscr{C}$ での 1_X
$\mathscr{C}^\circ$ での $g\circ f$ は $\mathscr{C}$ での $f\circ g$

(2.18). 双対圏の定義が可能であるのも, 射の概念を抽象化したお陰と言える。

(2.19). 次の節で説明する圏における種々の概念については, 射の向きを逆にしたものも同時に定義されることが多い。これらは元の概念の双対 (**dual**) と呼ばれる。また圏における命題についても, その双対命題が考えられる。その命題が一般の圏についての形式的なものであれば, 双対命題の証明は単に射の向きを逆にするだけで得られる。つまり双対圏で考えることにより, 元の命題の証明から双対命題の証明が得られることになる。

(2.20) 定義. $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ を圏とするとき, $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$ という圏を, $\mathrm{Ob}(\mathscr{C} \times \mathscr{D}) = \mathrm{Ob}\,\mathscr{C} \times \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$, 射を $\mathscr{C}$ の射と $\mathscr{D}$ の射のペアとして定め, これを $\mathscr{C}$ と $\mathscr{D}$ の圏の直積 (**product**) という。これについての恒等射や射の合成などの定義は自明だと思われるので省略する。

3 圏における種々の概念

(3.1). 圏においては対象や射が抽象化されているため, 例えば 2 つの集合の直積を構成的に要素のペアの集合として定義したりするようなことはできない。その代わりに, 射に注目することで, これらの概念を定義することになる。このような射による特徴付けは普遍性と呼ばれる。こういう見方は, 一見抽象的でわかりにくいと感じるかもしれないが, 一旦慣れてしまうと実は非常に見通しがよく, 場合によっては極めて効率的であることがわかるだろう。また, 集合論における単射や全射といった概念も要素を使わず射の性質によって再定義することができる。この節では, このような事柄について説明する。まずは直積を, 普遍性を用いて定義することから始める。この例から, これまで構成的に定義したものがどのように射の性質から定義できるかを見て欲しい。

(3.2) 定義. $\mathscr{C}$ の対象の族 $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の直積 (**direct product**), あるいは単に積 (**product**) とは, 対象 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ および各 λ に対する $p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ の組 $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, p_\lambda\right)$ であって, 任意の $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ と射の族 $f_\lambda : X \to X_\lambda$ に対し, $f : X \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ で, 任意の λ に対し $f_\lambda = p_\lambda \circ f$ となるものが一意的に存在するという性質を持つものである。この種の性質を一般的に普遍性 (**universality**) と呼ぶ。以後しばしば $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を $\prod X_\lambda$ と略記する。

$$\begin{tikzcd} \prod X_\lambda \arrow[r, "p_\lambda"] & X_\lambda \\ X \arrow[u, dashed, "\exists_1 f"] \arrow[ur, "f_\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

(3.3). 上の定義は少し分かりづらいので, まず, 集合の圏においては通常の直積が確かに上の意味での直積であることを, 2 つの集合 X, Y の直積の場合に説明しよう。$X \times Y$ を通常の直積, 即ち (x, y) $(x \in X,\ y \in Y)$ なる順序付きの組全体のなす集合とする。また, $p_1 : X \times Y \to X$; $(x, y) \mapsto x$, $p_2 : X \times Y \to Y$; $(x, y) \mapsto y$ を X 及び Y への射影とする。このとき $(X \times Y, p_1, p_2)$ が (3.2) の普遍性を持つことを示せばよい。即ち集合 Z と写像 $q_1 : Z \to X$, $q_2 : Z \to Y$ が与えられたとき, $f : Z \to X \times Y$ で $q_i = p_i \circ f$ $(i = 1, 2)$ となるものが一意的に存在することを言えばよい。$f(z) = (q_1(z), q_2(z))$ なる写像は確かにこの性質を満たしており, また

一般に p_1 で x に, p_2 で y に写る元が (x,y) しかないことから一意的であることもわかる。

$$\begin{tikzcd} X & X\times Y \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & Y \\ & Z \arrow[ul, "q_1"] \arrow[u, dashed, "f"'] \arrow[ur, "q_2"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} q_1(z) & (q_1(z),q_2(z)) \arrow[l, mapsto, "p_1"'] \arrow[r, mapsto, "p_2"] & q_2(z) \\ & z \arrow[ul, mapsto, "q_1"] \arrow[u, mapsto, "f"'] \arrow[ur, mapsto, "q_2"'] & \end{tikzcd}$$

もちろん, 従来の直積がこの性質を満たしているというだけでは, 直積を普遍性によって特徴付けたことにはならない。同様の性質を持つものが他にもあるかもしれないからである。しかし実際には上のような組は同型の違いを除けば一意的に決まる。より一般に次の (3.4) が成立する。

(3.4) 命題. 任意の圏において, (X_λ) の直積 $(\prod X_\lambda, p_\lambda)$ は存在すれば同型を除いて一意的であり, その同型射も一意的。即ち, もし (Z, q_λ) も直積の普遍性を持てば, 同型 $f : Z \to \prod X_\lambda$ で, 任意の λ に対し $p_\lambda \circ f = q_\lambda$ であるものが一意的に存在する。

(3.4.1)
$$\begin{tikzcd} \prod X_\lambda \arrow[d, "p_\lambda"'] & Z \arrow[l, dashed, "\exists_1 f"'] \arrow[dl, "q_\lambda"] \\ X_\lambda & \end{tikzcd}$$

(証明). (Z, q_λ) が (3.4.1) の性質を満たすとする。$(\prod X_\lambda, p_\lambda)$ が (3.2) の普遍性を満たすことから $f : Z \to \prod X_\lambda$ で (3.4.1) の図式が可換であるようなものが存在する。同様に, (Z, q_λ) も同じ普遍性を満たすことから $g : \prod X_\lambda \to Z$ が存在し, 下の可換図式が得られる。

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "q_\lambda"'] & \prod X_\lambda \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "p_\lambda"'] & Z \arrow[l, "f"'] \arrow[dl, "q_\lambda"] \\ & X_\lambda & \end{tikzcd}$$

このとき $g \circ f$ も id_Z も図式を可換にするので, やはり一意性から $g \circ f = \mathrm{id}_Z$ でなければならない。全く同様の理由で $f \circ g$ も恒等写像なので, g は f の逆射であり, したがって f が同型であることがわかる。 $\square$

(3.5). なお, 勝手な圏においては必ずしも直積が存在するとは限らない。しかし存在すれば同型を除いて一意的に決まり, 更にその同型射も一意的に決まるというわけである。

(3.6) 定義. $\mathscr{C}$ の対象の族 $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の直和 (**direct sum**) ないしは単に和 (**sum**), あるいは余積 (**coproduct**) とは, 対象 $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ および各 λ に対する $i_\lambda : X_\lambda \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の組 $\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, i_\lambda\right)$ であって, 任意の $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ と射の族 $f_\lambda : X_\lambda \to X$ に対し, $f : \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X$ で, 任意の λ に対し $f_\lambda = f \circ i_\lambda$ となるものが一意的に存在するという普遍性を持つもの。直積と同様, 以後しばしば $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を $\coprod X_\lambda$ と略記する。

$$\begin{tikzcd} \coprod X_\lambda \arrow[d, dashed, "\exists 1 f"'] & X_\lambda \arrow[l, "i_\lambda"'] \arrow[dl, "f_\lambda"] \\ X & \end{tikzcd}$$

(3.7) 命題. 圏 $\mathscr{C}$ において, 直和は存在すれば同型の違いを除いて一意的。正確には, もし (Z, j_λ) が直和の

普遍性を持てば, 同型 $f : \coprod X_\lambda \to Z$ で, 任意の λ に対し $i_\lambda = j_\lambda$ であるものが一意的に存在する。

(3.7.1)
$$\begin{tikzcd} \coprod X_\lambda \arrow[r, dashed, "\exists 1 f"] & Z \\ X_\lambda \arrow[u, "i_\lambda"] \arrow[ur, "j_\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

(証明). 証明は直積の場合とほぼ同様なので省略する。 □

(3.8) 例. 集合の圏 (Set) では, 直積は通常の直積。直和は非連結和。学部の授業ではあまり非連結和を扱わないと思われるので, ここで定義を復習しておこう。集合の族 A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ の非連結和 (**disjoint union**) とは

$$\bigsqcup A_\lambda = \{(a, \lambda) \mid a \in A_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$$

なるもの。ただし (a, λ) は順序付きの組を表す。こうすることで, 各 A_λ が互いに共通部分を持たないような和集合を構成できる。この場合, $i_\lambda : A_\lambda \to \bigsqcup A_\lambda$ は $i_\lambda(a) = (a, \lambda)$ で定まる射。例えば

$$A \sqcup A = \{(a, i) \mid a \in A,\ i = 1, 2\} = A \times \{1, 2\}$$

である。これが確かに直和の普遍性を満たしていることは簡単に確かめられる。

(3.9) 例. 位相空間の圏 (Top) では, 直積は集合としての直積に直積位相を入れたもの。また $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の直和は集合としての非連結和に, 各 X_λ が開かつ閉になるように位相を入れたもの。

(3.10) 例. A を環とするとき, 左 A 加群の圏 (A-Mod) では, 直積は集合としての直積 $\prod_\lambda M_\lambda$ に, $(x_\lambda) + (y_\lambda) = (x_\lambda + y_\lambda)$, $a(x_\lambda) = (ax_\lambda)$ のように成分ごとに和やスカラー倍を定義したもの。また直和は,

$$\bigoplus M_\lambda = \{(x_\lambda) \in \prod M_\lambda \mid \text{有限個を除いて } x_\lambda \neq 0\}$$

なる $\prod M_\lambda$ の部分加群と, $x \in M_\lambda$ を, λ 成分が x で他は 0 である元に写す $i_\lambda : M_\lambda \to \bigoplus M_\lambda$ なる射たちからなる組 $(\bigoplus M_\lambda, i_\lambda)$. また有限個の族の場合は直積と直和は A 加群としては同型になる。

(3.11) 例. 群の圏 (Grp) では直積は通常の直積群, 直和は自由積。

(3.12) 例. この文章では, 可換環と言えば積についての単位元 1 を持つものとし, 準同型は 1 を 1 に写すものとする。この場合, 可換環の圏では, 直積は通常の直積環。(有限個の) 直和はテンソル積。

(3.13) 定義. $\mathscr{C}$ を圏, $e \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ とする。

(1) e が終対象 (**final object**) $\Leftrightarrow \forall X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}, \exists_1 g : X \to e.$
(2) e が始対象 (**initial object**) $\Leftrightarrow \forall X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}, \exists_1 f : e \to X.$
(3) e が零対象 (**zero object**) $\Leftrightarrow$ e は始対象かつ終対象。

これらは存在すれば同型を除いて一意的に決まる。

(3.14) 補足. なお, 終対象は空である族の直積, 同じく始対象は空である族の直和と見なせる。

(3.15) 例. (Set) では, 終対象は 1 点だけからなる集合 $\{\varnothing\}$, 始対象は $\varnothing$. この 2 つは集合の圏において同型ではない (つまり, これらの間に全単射がない) ので, (Set) では零対象は存在しない。ちなみに任意の集合 A

に対し, $\mathrm{Hom}(\varnothing, A)$ が一点だけからなるということは次のようにわかる。もともと A から B への写像とは (グラフで考えれば) $G \subset A \times B$ なる部分集合 G で

(M1) $\forall a \in A$ に対し, $\exists b \in B$ s.t. $(a, b) \in G$.
(M2) $(a, b), (a, b') \in G \Rightarrow b = b'$

という条件を満たすものとして定義できる。したがって, 写像全体は次のように書ける。

$$\mathrm{Hom}(A, B) = \{G \subset A \times B \mid \text{(M1) かつ (M2) が成立}\}$$

こう考えると, $A = \varnothing$ の場合は $A \times B = \varnothing$ であるが, $G = \varnothing \subset A \times B$ は条件を満たすので, $\mathrm{Hom}(\varnothing, B) = \{\varnothing\}$ より, 確かに一点だけからなる集合になっている。一方, $A \neq \varnothing$ で $B = \varnothing$ なら $\mathrm{Hom}(A, \varnothing) = \varnothing$ である。実際, この場合も $A \times B = \varnothing$ だが, $G = \varnothing \subset A \times B$ は (M1) の条件を満たさない。

(3.16) 例. A 加群の圏では, 終対象も始対象もどちらも $\{0\}$. したがって $\{0\}$ は零対象でもある。

(3.17) 例. (積についての単位元を持つ) 可換環の圏では, 終対象は零環, 始対象は $\mathbb{Z}$. この二つは同型ではないので, 零対象は存在しない。

(3.18). 一般には圏 $\mathscr{C}$ の対象 X は, $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ の 1 つの要素に過ぎないので, そのままでは X の点を考えることはできない。しかし, 集合の圏 (Set) においては集合 X の点 x を与えることは, 終対象 $\{\varnothing\}$ からの写像 $f : \{\varnothing\} \to X$ を $f(\varnothing) = x$ として定めることと同等であるから, X と $\mathrm{Hom}(\{\varnothing\}, X)$ を同一視できる。このことに着目して, 一般の圏 $\mathscr{C}$ においても, もし $\mathscr{C}$ が終対象 e を持つ場合は, $\mathrm{Hom}(e, X)$ の元を $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ の点と呼ぶ場合がある。このような定義は $\mathscr{C}$ が群の圏や加群の圏の場合は意味がないが, 特定の圏では有用な場合がある。

(3.19). 次に, 直積や直和の概念を少し一般化した概念について説明する。

(3.20) 定義 (ファイバー積). 圏 $\mathscr{C}$ における射 $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ のファイバー積ないしは引き戻し (**fiber product**, **fibered product**, **pullback**) とは対象 $X \times_Z Y$ と $p : X \times_Z Y \to X$, $q : X \times_Z Y \to Y$ の組 $(X \times_Z Y, p, q)$ であって次の普遍性を満たすもの。

(1) $fp = gq$.
(2) 任意の対象 T と射 $u : T \to X$, $v : T \to Y$ で $fs = gt$ なる組に対し, $u : T \to X \times_Z Y$ で $s = pu$, $t = qu$ なるものが一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "\exists_1 u"] \arrow[drr, bend left, "t"] \arrow[ddr, bend right, "s"'] & & \\
& X \times_Z Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

$f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ のファイバー積は, 存在すれば強い意味で一意的。つまり (W, p', q') で上の普遍性を満たすものがあれば, 同型 $v : W \to X \times_Z Y$ で $p' = pv$, $q' = qv$ なるものが一意的に存在する。証明はこれまでと同様なので省略する。

(3.21). $X \times_Z Y$ という記号には f, g という射が明示されていない。f, g を明示的に書きたい場合の表記は標準的なものがあるわけではないように思われるが, 例えば

$$X \times_{\langle f,g \rangle} Y, \qquad X \underset{f \searrow Z \swarrow g}{\times} Y$$

のような表記が使われることがある。また, 上の定義で s, t から定まる写像 $u : T \to X \times_Z Y$ を (s, t) と書く場合がある。

(3.22). $\mathscr{C}$ に終対象 e が存在するなら, $\mathscr{C}$ における $X \times_e Y$ は $X \times Y$ と一致する。

(3.23) 定義 (余ファイバー積). 圏 $\mathscr{C}$ における射 $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ の余ファイバー積ないしは押し出し (**fiber sum**, **fibered sum**, **pushout**) とは対象 $X \sqcup_Z Y$ と $i : X \to X \sqcup_Z Y$, $j : X \sqcup_Z Y \to Y$ の組 $(X \sqcup_Z Y, i, j)$ であって次の普遍性を満たすもの。

(1) $if = jg$.
(2) 任意の対象 T と射 $s : T \to X$, $t : T \to Y$ で $sf = tg$ なる組に対し, $u : X \sqcup_Z Y \to T$ で $s = ui$, $t = uj$ なるものが一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd}
 & & T \\
Y \arrow[r, "j"] \arrow[urr, bend left, "t"] & X \sqcup_Z Y \arrow[ur, dashed, "\exists_1 u"] & \\
Z \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"'] & X \arrow[u, "i"'] \arrow[uur, bend right, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

ファイバー積と同様, 余ファイバー積も存在すれば強い意味で一意的である。つまり, (W, i', j') が同様の普遍性を満たすなら, 同型 $v : X \sqcup_Z Y \to W$ で $i' = vi$, $j' = vj$ なるものが一意的に存在する。

(3.24). こちらについても, f, g を明示的に書きたい場合は

$$X \sqcup_{\langle f,g \rangle} Y, \qquad X \underset{f \nwarrow Z \nearrow g}{\sqcup} Y$$

のような表記が使われることがある。

(3.25). 圏 $\mathscr{C}$ に始対象 e が存在するときは, 余ファイバー積 $X \sqcup_e Y$ は, 直和 $X \sqcup Y$ と一致する。

(3.26) 例. 集合の圏 (Set) では $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ のファイバー積は常に存在する。実際,

$$X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$$

とし, $p : X \times_Z Y \to X$ と $q : X \times_Z Y \to Y$ を包含写像 $X \times_Z Y \to X \times Y$ と $X \times Y$ から X や Y への射影の合成で定義すれば, $(X \times_Z Y, p, q)$ はファイバー積の普遍性を満たすことが簡単に確かめられる。特別な場合をいくつか見てみよう。

(1) $X \subset Z$, $Y \subset Z$ が Z の部分集合で, f, g が包含写像の場合, $X \times_Z Y$ は $X \cap Y$ と同一視できる。
(2) $f : X \to Z$ が写像で, $Y \subset Z$ が部分集合, g が包含写像の場合, $X \times_Z Y$ は $f^{-1}(Y)$ と同一視できる。特に $z \in Z$ に対し, $X \times_Z \{z\}$ は $f^{-1}(z)$ とみなせる。

(3.27) 例. 集合の圏 (Set) では, $f: Z \to X$, $g: Z \to Y$ の余ファイバー積も常に存在する。実際, 非連結和 $X \sqcup Y$ において $x \in X$, $y \in Y$ に対し

$$xRy \Leftrightarrow\ z \in Z \text{ で } f(z) = x,\ g(z) = y \text{ なるものが存在する}$$

という関係 R で生成される同値関係を $\sim$ とするとき,

$$X \sqcup_Z Y = X \sqcup Y / \sim$$

とおき, $i: X \to X \sqcup_Z Y$ や $j: Y \to X \sqcup_Z Y$ を自然な包含写像と全射 $X \sqcup Y \to X \sqcup_Z Y$ の合成で定義すれば, $(X \sqcup_Z Y, i, j)$ は余ファイバー積の普遍性を満たす。

(1) $f: Z \to X$, $g: Z \to Y$ が単射であれば, $X \sqcup_Z Y$ は X と Y を Z をのりしろにして貼り合わせたものと見なせる。
(2) $Z \subset X$ が部分集合で f が包含写像, $Y = \{y\}$ が 1 点からなる集合のときは, $X \sqcup_Z \{y\}$ は $Z \subset X$ を 1 点につぶした集合と見なせる。

(3.28) 例. 可換環の圏では, $f: A \to B$, $g: A \to C$ なる環準同型の余ファイバー積は環のテンソル積 $B \otimes_A C$ である。

(3.29). 次に, 集合の圏における単射や全射の概念を圏の射の場合に拡張しよう。節の冒頭でも注意したように, 圏においては射が抽象化されているので, 集合の写像のように単射や全射の概念を定めるわけにはいかない。そうではなく, 他の射との関係でもってこれらに代わる概念を定義する必要がある。

(3.30). 集合の圏においては, $f: X \to Y$ が単射であるとき $g: Z \to X$ は, $f \circ g$ により一意的に決まる。即ち $\mathrm{Hom}(Z, X) \to \mathrm{Hom}(Z, Y)$; $g \mapsto f \circ g$ なる射は単射である。逆に, $\mathrm{Hom}(Z, X) \to \mathrm{Hom}(Z, Y); g \mapsto f \circ g$ が単射であれば, f は単射である。実際, $x, x' \in X$ に対し $f(x) = f(x')$ だとする。このとき $Z = \{z\}$ を 1 点からなる集合, $g, g' \in \mathrm{Hom}(Z, X)$ をそれぞれ $g(z) = x$, $g'(z) = x'$ で定まる写像とすれば, $f \circ g = f \circ g'$ より $g = g'$ だから, $x = x'$ でなければならない。つまり次が成立する。

$$f: X \to Y \text{ が単射} \iff \text{任意の } Z \text{ に対し, } \mathrm{Hom}(Z, X) \to \mathrm{Hom}(Z, Y)\ ; g \mapsto f \circ g \text{ が単射。}$$

同様に, $f: X \to Y$ が全射であるときには, $g: Y \to Z$ が, $g \circ f$ により一意的に決まる。即ち $\mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$; $g \mapsto g \circ f$ なる射は単射である。逆に, $\mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$; $g \mapsto g \circ f$ が単射であれば, f は全射である。実際, もし f が全射でなければ $y_0 \notin f(X)$ なる y_0 が取れる。このとき $Z = \{0, 1\}$ とし, $g: Y \to Z$ を任意の y に対し $g(y) = 1$ なる写像, また $g': Y \to Z$ を $g'(y_0) = 0$, $y \neq y_0$ なら $g'(y) = 1$ なる写像とする。すると, $g \neq g'$ だが $g \circ f = g' \circ f$ である。以上から次が言える。

$$f: X \to Y \text{ が全射} \iff \text{任意の } Z \text{ に対し, } \mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z); g \mapsto g \circ f \text{ が単射。}$$

これらの単射や全射の言い換えでは, X という集合の要素は必要なく, 射だけが必要なので, 一般の圏で意味を持つ。以上を踏まえて次のように定義する。

(3.31) 定義. $\mathscr{C}$ を圏, $f: X \to Y$ を $\mathscr{C}$ の射とする。

(1) $f: X \to Y$ が **mono** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall Z \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ に対し, $\mathrm{Hom}(Z, X) \to \mathrm{Hom}(Z, Y)$ が単射。
(2) $f: X \to Y$ が **epi** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall Z \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ に対し, $\mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$ が単射。

なお, mono であることを monic ないしは monomorphic, epi であることを epic ないしは epimorphic と言う場合もある。また, mono である射を monomorphism, epi である射を epimorphism と呼ぶこともある。この文章では mono や epi を形容詞的にも名詞的にも使う。

(3.32) 例. (3.30) より, 集合の圏 (Set) では mono は単射, epi は全射であることと同値。A を環とするとき, 左 A 加群の圏 (A-Mod) でも同様である。

(3.33). 一方, concrete category (2.13) であっても mono は単射とは限らないし, また epi も全射とは限らない。

(3.34) 例. ハウスドルフ位相空間のなす圏 (HausTop) では,

$$f : X \to Y \text{ が epi} \quad \Longleftrightarrow \quad f(X) \text{ が } Y \text{ で稠密}$$

である。実際, まず $f(X)$ が Y で稠密だとしよう。$g, h : Y \to Z$ が位相空間の連続写像で, $g \circ f = h \circ f$ なるものとすると, もし $g \neq h$ なら $g(y) \neq h(y)$ なる $y \in Y$ が存在するので, ハウスドルフの仮定より $g(y) \in V$, $h(y) \in W$ なる Z の開集合 V, W で $V \cap W \neq \varnothing$ なるものが取れる。このとき $U = g^{-1}(V) \cap h^{-1}(W)$ とすると, $U \cap f(X) \neq \varnothing$ である。よって $f(x) \in U$ なる $x \in X$ が存在するが, このき $g \circ f(x) = h \circ f(x) \in V \cap W$ となって矛盾。よって, $g = h$ でなければならないので, f は epi. 逆に, $f : X \to Y$ が稠密でないとする。このとき, $f(X) \subset Y$ の閉包を $\overline{f(X)}$ として, $Y \sqcup Y = \{(y, i) \mid y \in Y,\ i = 0, 1\}$ を 2 つの Y の非連結和とし, $i_0 : Y \to Y \sqcup Y;\ y \mapsto (y, 0)$, $i_1 : Y \to Y \sqcup Y;\ y \mapsto (y, 1)$ を自然な包含写像とする。同値関係 $\sim$ を

$$y \in \overline{f(X)} \text{ なら } (y, 0) \simeq (y, 1)$$

となるような最小の同値関係として定義する (つまり 2 つの Y を $\overline{f(X)}$ をのりしろとして貼り合わせる)。そして $Z = Y \sqcup Y / \sim$ を商位相空間, $p : Y \sqcup Y \to Z$ を自然な射とする。Z は明らかにハウスドルフ空間である。$g_0, g_1 : Y \to Z$ を $g_0 = p \circ i_0$, $g_1 = p \circ i_1$ で定義すると, 構成から $g_0 \circ f = g_1 \circ f$ であるが, $f(X) \subset Y$ が稠密でないことから $y \notin \overline{f(X)}$ なる $y \in Y$ が存在し, このとき $g_0(y) \neq g_1(y)$ だから $g_0 \neq g_1$. よって f は epi ではない。

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dr, "i_0"] \arrow[drr, bend left, "g_0"] & & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \sqcup Y \arrow[r, "p"] & Z \\
 & Y \arrow[ur, "i_1"'] \arrow[urr, bend right, "g_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

(3.35) 補足. ハウスドルフ位相空間ではなく, 位相空間のなす圏 (Top) においては, epi は集合論的に全射であることと同値である。実際, $Z = \{0, 1\}$ に密着位相 (indiscrete topology), つまり $\varnothing$ と Z のみを開集合とする位相を入れたとする。もし, $f : X \to Y$ が全射でなければ, $y_0 \notin f(X)$ を取るとき, $g : Y \to Z$ を値 0 を取る定数関数, また $h : Y \to Z$ を, $y \neq y_0$ なら $h(y) = 0$, $h(y_0) = 1$ なる関数とするとき, g, h は連続写像で $g \circ f = h \circ f$ だが, $g \neq h$ である。

(3.36) 例. (ComRng) を可換環のなす圏とする。ただし可換環というときは, 積についての単位元 1 の存在を仮定し, 準同型は 1 を 1 に写すものとする。このとき, $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ は集合の写像としてはもちろん全射ではないが, (ComRng) において epi である。より一般に A を可換環, S を A の積閉集合とするとき, 局所化 $\varphi : A \to S^{-1}A$ は epi である。これは, $\mathrm{Hom}(S^{-1}A, B)$ が空でない場合, つまり $f : S^{-1}A \to B$ なる準同型が存在する場合は, $f(S) \subset B^{\times}$ であることから, 局所化の普遍性により $\mathrm{Hom}(A, B) \simeq \mathrm{Hom}(S^{-1}A, B)$ であ

ることによる。具体的には, $a \in A$, $s \in S$ とするとき $f(s/1)f(a/s) = f(a/1)$ かつ $f(s/1) \in B^\times$ から $f(a/s)$ は $f(a/1)$ と $f(s/1)$ で決まるが, これは $A \to B$ から一意的に決まる。

(3.37) 例. concrete category (2.13) において, mono が必ずしも単射でない例としては次のようなものがある。(Div) を, 加除群 (**divisible group**), 即ち, アーベル群 G であって, 任意の自然数 n に対し, n 倍写像 $G \to G; g \to ng$ が全射であるようなもの, を対象とし, 準同型を射とする圏とする。このとき (Div) のおける自然な全射準同型 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は, 集合の写像としては単射ではないが mono であることを示そう。$g, h : G \to \mathbb{Q}$ を加除群からの準同型で $f \circ g = f \circ h$ なるものとするとき, $g = h$ を言えばよい。$g - h$ を g と書き直せば, $f \circ g = 0$ なら $g = 0$ を示してもよい。$x \in G$ とする。G は加除群なので, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $ny = x$ なる $y \in G$ が存在する。よって, $g(x) = g(ny) = ng(y)$ だが, 仮定から $g(y) \in \mathbb{Z}$ だから, $g(x) \in n\mathbb{Z}$. 即ち $g(x)$ は全ての自然数で割り切れるので, $g(x) = 0$ である。よって $g = 0$.

(3.38). 集合の圏 (Set) では, 射 f が mono かつ epi なら全単射なので, 圏の同型射である。しかし一般の圏では mono かつ epi であるからといって同型とは限らない。例えば上の (3.34) のように (HausTop) においては, 射 $f : X \to Y$ が単射でかつ像が Y で稠密なら mono かつ epi である。しかし, f が集合論的な全射でなければ逆射が存在しないので, 必ずしも同型ではない。

(3.39) 命題. $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ に対し,

(1) f, g が mono なら $g \circ f$ も mono.
(2) f, g が epi なら $g \circ f$ も epi.

(証明). 定義から自明。 □

(3.40) 命題. $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ に対し,

(1) gf が mono なら f も mono.
(2) gf が epi なら g も epi.

(証明). (1) 合成 $\mathrm{Hom}(W, X) \to \mathrm{Hom}(W, Y) \to \mathrm{Hom}(W, Z)$ が単射なら $\mathrm{Hom}(W, X) \to \mathrm{Hom}(W, Y)$ も単射であることから明らか。(2) 合成 $\mathrm{Hom}(Z, W) \to \mathrm{Hom}(Y, W) \to \mathrm{Hom}(X, W)$ が単射なら $\mathrm{Hom}(Z, W) \to \mathrm{Hom}(Y, W)$ も単射であることから明らか。 □

(3.41) 補足. 普遍性を用いた定義には, 様々な理論に対し共通の定義ができるということの他に, 逆に個々の理論に対しそうであるべき定義がわかるという利点もある。これも圏論という抽象化の大きな御利益の 1 つだと思う。例えば, 0^0 をどう定義すべきかという問題を考えてみよう。集合論的に見れば, これらは有限集合 S に対し S^0 をどう定義するか, つまりは空なる族 $()_{x \in \varnothing}$ に対する直積をどう定義すべきかという問題に帰着できる。これは構成的な定義を考えようとすると混乱してしまうが, 普遍性の視点で見れば, これは集合の圏における終対象として定義すべきであることは明らかである。よって 1 点からなる集合, 例えば $\{\varnothing\}$ と定義するのが良いことがわかる。すると, 0^0 は $\{\varnothing\}$ の元の数だから, $0^0 = 1$ と定義するのが自然であることが分かる。

4 関手

(4.1). 圏論における関手とは, ある意味集合論における写像にあたるものだが, 写像とは異なり, 対象と射の両方を写す対応になっている。まずは定義から述べよう。

(4.2) 定義. $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ を圏とするとき, 共変関手 (**covariant functor**) $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ とは次のものの組。

(1) 写像 $F : \mathrm{Ob}\,\mathscr{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}'; X \to F(X)$.

(2a) 各 $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ に対し, 写像 $F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(F(X), F(Y)); f \mapsto F(f)$ であって次を満たすもの。

  (i) $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

  (ii) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[rr, "F(g\circ f)"] \arrow[dr, "F(f)"'] & & F(Z) \\ & F(Y) \arrow[ur, "F(g)"'] & \end{tikzcd}$$

対象についての写像と, 射についての写像のどちらも同じ F という記号を用いているので注意。同様に, 反変関手 (**contravariant functor**) とは, 次のものの組である。

(1) 写像 $F : \mathrm{Ob}\,\mathscr{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}'; X \to F(X)$.

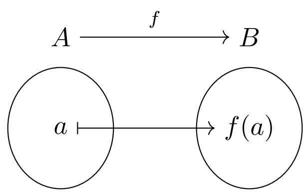
(2b) 各 $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ に対し, 写像 $F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(F(Y), F(X)); f \mapsto F(f)$ であって次を満たすもの。

  (i) $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

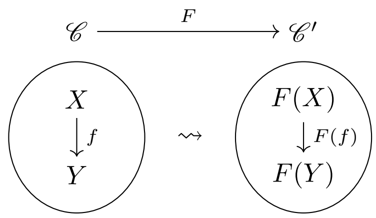
  (ii) $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$.

共変関手と違い, 射の向きが逆になることに注意。

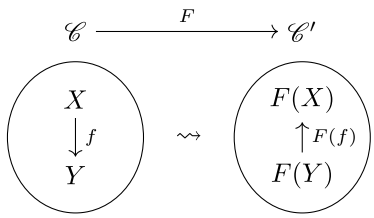
(4.3). 集合の写像 $f : A \to B$ が次のようなイメージであるとすると,



圏の関手 $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ は次のようなイメージになる。



共変関手



反変関手

また, $F:\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}\to\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}'$ と各 $X,Y\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ に対する $F:\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(F(X),F(Y))$ が与えられたとき, それが上の (2a) ないしは (2b) を満たすこと, 即ち F が共変関手ないしは反変関手であることを, F は関手的 (**functorial**) であるという風に言う。

(4.4). 反変関手 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{C}'$ は, $F:\mathscr{C}^\circ\to\mathscr{C}'$ なる共変関手ともみなせる。そこで, 特に断りがない場合は, $F:\mathscr{C}\to\mathscr{C}'$ と書いたら共変関手, $F:\mathscr{C}^\circ\to\mathscr{C}'$ と書いたら反変関手を表すものとする。

(4.5) 補足. 具体的な関手 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{C}'$ を与える場合, しばしば対象についての写像を与えれば, 射についての写像は自然に自明なものが定まることがある。このような場合, 「関手 F を $F(X)$ が次のようなものと定める」といった言い方をし, 射の説明を省略することがある。

(4.6) 例. $\mathscr{C}$ を圏とするとき, $X\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ に対し X 自身を対応させ, 射 $f:X\to Y$ に対し f 自身を対応させる $\mathscr{C}$ から $\mathscr{C}$ への関手を $\mathscr{C}$ の恒等関手 (**identity functor**) という。この文章では $1_{\mathscr{C}}$ ないしは $\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ と表記する。1 や id と略記することも多い。

(4.7) 例. 集合の圏を (Set), 位相空間の圏を (Top) で表すとき, $F:(\mathsf{Top})\to(\mathsf{Set})$ という共変関手が次のようにして定まる。

(1) 位相空間 $X\mapsto X$ (位相構造を忘れたもの)。
(2) 連続写像 $f\mapsto f$ (単なる写像とみなしたもの)。

このように構造を忘れて集合とみなす関手を忘却関手 (**forgetful functor**) という。

(4.8) 例. (Top) を位相空間の圏, $(\mathbb{R}\text{-}\mathsf{Alg})$ を可換 $\mathbb{R}$ 代数の圏とする。このとき $F:(\mathsf{Top})\to(\mathbb{R}\text{-}\mathsf{Alg})$ を

(1) $X\mapsto C(X)=X$ 上の $\mathbb{R}$ 値連続関数全体のなす環。
(2) $(f:X\to Y)\mapsto(F(f):C(Y)\to C(X);\varphi\mapsto\varphi\circ f)$.

として定めると, F は反変関手である。この例のように圏論の枠組を使うと, 位相空間のような図形的なものと, 可換 $\mathbb{R}$ 代数という代数的なものを直接関係付けることが可能になる。

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} & \\ X \arrow[ur, "\varphi\circ f"] \arrow[rr, "f"'] & & Y \arrow[ul, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

(4.9) 例. K を体とし, $(K\text{-}\mathsf{Vec})$ を対象が K ベクトル空間, 射が K 線形写像である圏とする。このとき $F:(K\text{-}\mathsf{Vec})\to(K\text{-}\mathsf{Vec})$ を次のように定める。

(1) V を K ベクトル空間とするとき, $F(V)$ を V の双対空間, 即ち $V^\vee=\mathrm{Hom}_K(V,K)$ (V から K への K 線形写像全体) とする。
(2) 線形写像 $f:V\to W$ に対し, $F(f)=f^\vee:W^\vee\to V^\vee;\varphi\mapsto\varphi\circ f$ とする。

このとき F は反変関手である。

$$\begin{tikzcd} & K & \\ V \arrow[ur, "f^\vee(\varphi)=\varphi\circ f"] \arrow[rr, "f"'] & & W \arrow[ul, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

(4.10) 例. K を体とする。位相空間 X に対してその K 係数の m 次ホモロジー群 (resp. コホモロジー群) $\mathrm{H}_m(X)$ (resp. $\mathrm{H}^m(X)$) を対応させる関手 (Top) $\to$ (K-Vec) は共変 (resp. 反変) 関手。一般に位相空間の性質をそのまま数学的に扱うのは大変であるが, 線形代数は扱いが簡単である。この (コ) ホモロジー関手を通じて, 位相空間の性質を線形代数に写し取ることができるようになっている。

5　充満性, 忠実性, 部分圏

(5.1). 圏 $\mathscr{C}$ と $\mathscr{C}'$ の間に関手 $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ があるというだけでは, 2 つの圏がこの関手によってどれ程密接に関係しているか, つまり片方の圏の性質が F を通じてどの程度もう一方の圏に反映されるかはわからない。この問題については次に説明する関手の忠実性や充満性が基本的である。なお (9.3) も参照のこと。

(5.2) 定義. $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ を共変関手とする。$\mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$ が単射であるとき F は忠実 (**faithful**) であるといい, また全射であるとき充満 (**full**) であるという。特に全単射のときは充満忠実 (**fully faithful**) であるという。

(5.3) 例. 忘却関手は忠実であるが, 一般には充満ではない。例えば (4.8) の忘却関手 (Top) $\to$ (Set) を考えると, (Set) では連続でない写像も射であるので充満ではない。

(5.4). 充満忠実でない関手では, 元の圏での性質が写った先の圏に良く反映されない。例えば, 上の例の忘却関手 F : (Top) $\to$ (Set) を考えてみよう。位相空間の連続写像 $f : X \to Y$ は全単射であっても同相写像とは限らない。これは逆写像が連続であるとは限らないためである。したがって, $F(f)$ が同型でも f が同型とは限らない (下図)。つまり集合の圏で考えると元の射が同型かどうか判断できないわけで, それだけ情報が失われていることになる。

$$\mathsf{(Top)} \xrightarrow{\text{忘却関手 } F} \mathsf{(Set)}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f\text{ が同相でなくても}"'] & & F(X) \arrow[d, "F(f)\text{ は全単射 (集合の圏での同型) となり得る}"] \\ Y & \rightsquigarrow & F(Y) \end{tikzcd}$$

(5.5). 一方, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ が充満忠実であれば, $f : X \to Y$ が同型であることと $F(f) : F(X) \to F(Y)$ が同型であることは同値である。実際, f が同型なら, もちろん $F(f)$ も同型であるが, 逆に $F(f)$ が同型なら $g' \in \mathrm{Hom}(F(Y), F(X))$ で $F(f) \circ g' = 1_{F(Y)}$, $g' \circ F(f) = 1_{F(X)}$ なるものが存在するが, $\mathrm{Hom}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$ から $F(g) = g'$ なる g が存在する。これが f の逆射になっていることを示すのは簡単である。同型であるものを同じとみなす立場からは, 圏論において関手が充満忠実であることは, 集合論において写像が単射であることの類似と見なせることがわかるだろう。

(5.6). 以前定義した concrete category (2.13) という概念は, ここでの言葉を使うと, 圏 $\mathscr{C}$ と, $\mathscr{C}$ から集合の圏への忠実な関手 $F : \mathscr{C} \to$ (Set) の組 $(\mathscr{C}, F)$ のことであると定義できる。

(5.7) 定義. $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ を圏とする。$\mathrm{Ob}(\mathscr{C}') \subset \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ かつ任意の $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}')$ に対し $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(X, Y) \subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ であってかつ恒等射と合成が共通であるとき, $\mathscr{C}'$ を $\mathscr{C}$ の部分圏 (**subcategory**) という。更に, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ が常に成立するとき, $\mathscr{C}'$ を $\mathscr{C}$ の充満 (**full**) 部分圏という。

(5.8) 例. アーベル群のなす圏 (Abel) は, 群の圏 (Grp) の充満部分圏。

$$(\mathsf{Abel}) \xrightarrow{\text{full subcategory}} (\mathsf{Grp}).$$

6　自然変換

(6.1). ここでは圏論が生まれるきっかけとなった自然変換について説明する。これは言わば関手から関手への射である。

(6.2) 定義. $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ を圏とする. F, G を $\mathscr{C}$ から $\mathscr{C}'$ への共変関手とするとき, F から G への自然変換 (**natural transform**) ないしは (関手の) 射 $\varphi : F \to G$ とは, 各 $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ に対する $\varphi_X \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(F(X), G(X))$ の族で任意の $f : X \to Y$ に対し次が可換であるもの。

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \rightsquigarrow & \\ Y & & \end{array} \qquad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\varphi_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

序文でも説明したように, 圏論はもともとこの自然変換を定式化するために考えられた。

(6.3). $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ を圏とするとき, 圏 $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ を

対象 : $\{\mathscr{C}$ から $\mathscr{C}'$ への (共変) 関手 $\}$
射 : 共変関手 $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ に対し, $\mathrm{Hom}(F, G) = \{\varphi : F \to G \mid$ 自然変換 $\}$

で定めると, $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ は自然に圏になる。

(6.4) 定義. F, G を $\mathscr{C}$ から $\mathscr{C}'$ への共変関手とする。自然変換 $\varphi : F \to G$ が 同型, あるいは $\varphi : F \to G$ が自然同型 (**natural isomorphism**) であるとは, φ が $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ における同型射であることである。これは, $\varphi : F \to G$ が自然変換で, かつ任意の $X \in \mathscr{C}$ に対し $\varphi_X : F(X) \to G(X)$ が同型であることとも言い換えられる。

(6.5) 例. 冒頭の例をもう一度挙げよう。K を体, $(K\text{-}\mathsf{Vec})$ を K ベクトル空間のなす圏, $D : (K\text{-}\mathsf{Vec}) \to (K\text{-}\mathsf{Vec})$ をベクトル空間 V に対し, 双対ベクトル空間 $V^\vee = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ を対応させ, 線形写像 $f : V \to W$ に対し $f^* : W^\vee \to V^\vee$; $\varphi \mapsto \varphi \circ f$ を対応させる反変関手とする。すると, $F = DD : (K\text{-}\mathsf{Vec}) \to (K\text{-}\mathsf{Vec})$ は共変関手である。このとき, ベクトル空間 V に対し, $\eta_V : V \to F(V) = V^{\vee\vee}$ を $\eta_V(x) = \varphi : p \to p(x)$ と定める。すると, η は $(K\text{-}\mathsf{Vec})$ の恒等関手 id から F への自然変換である。実際, 冒頭でも述べたように $f : V \to W$ を線形写像とするとき,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[d, "f"'] & V^{\vee\vee} \arrow[d, "f^{\vee\vee}"] \\ W \arrow[r, "\eta_W"'] & W^{\vee\vee} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (\eta_V(x) : p \mapsto p(x)) \arrow[d, mapsto] \\ y = f(x) \arrow[r, mapsto] & (\eta_W(y) : q \mapsto q(y) = q \circ f(x)) \end{tikzcd}$$

が可換になる。(1.3) 参照。

(6.6) 例. (ComRng) を, 可換環の圏[*1], (Grp) を群の圏とする。可換環 A と自然数 n に対し, $GL_n(A) = \{X \in M_n(A) \mid \det X \in A^\times\}$ と置く。ただし $M_n(A)$ は A を成分とする n 次正方行列, $A^\times$ は A の可逆元全体のなす群を表す。$f : A \to B$ が環の準同型なら, $GL(f) : GL_n(A) \to GL_n(B)$ なる群の準同型が誘導される。このとき可換環 A に $GL_n(A)$ を対応させ, 環準同型 $f : A \to B$ に $GL(f)$ を対応させることで関手 $GL_n :$ (ComRng) $\to$ (Grp) が定まる。特に $n = 1$ のときの GL_1 を $\mathbb{G}_m$ と書く。$\mathbb{G}_m(A) = A^\times$ である。このとき, 可換環 A に対し, $\det_A : GL_n(A) \to \mathbb{G}_m(A)$ を $X \in GL_n(A)$ に対し $\det X \in \mathbb{G}_m(A)$ を対応させる準同型とすると, det は GL_n から $\mathbb{G}_m$ への自然変換である。実際, 環準同型 $f : A \to B$ に対し次は可換である。

$$\begin{tikzcd} GL_n(A) \arrow[r, "\det_A"] \arrow[d, "GL_n(f)"'] & \mathbb{G}_m(A) \arrow[d, "\mathbb{G}_m(f)"] \\ GL_n(B) \arrow[r, "\det_B"] & \mathbb{G}_m(B) \end{tikzcd}$$

(6.7). 後で用いる自然変換についての性質をいくつか挙げておく。まず, 自然変換と関手の合成から。$\mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}$ を圏, $S : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$, $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ を関手, $\varphi : F \to G$ を自然変換とする。

$$\begin{tikzcd} \mathscr{B} \arrow[r, "S"] & \mathscr{C} \arrow[r, shift left=2, "F"] \arrow[r, shift right=2, "G"'] \arrow[r, phantom, "\downarrow\varphi"] & \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

$X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{B}$ に対し $(\varphi S)_X$ を $(\varphi S)_X = \varphi_{S(X)} : FS(X) \to GS(X)$ で定めると, φ が自然変換であることから $\mathscr{B}$ の射 $f : X \to Y$ について次が可換になるので, $\varphi S : FS \to GS$ なる自然変換を得る。

$$\begin{tikzcd} FS(X) \arrow[r, "(\varphi S)_X"] \arrow[d, "FS(f)"'] & GS(X) \arrow[d, "GS(f)"] \\ FS(Y) \arrow[r, "(\varphi S)_Y"'] & GS(Y) \end{tikzcd}$$

また, $\mathscr{C}, \mathscr{D}, \mathscr{E}$ を圏, $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $T : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ を関手, $\varphi : F \to G$ を自然変換とする。

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, shift left=2, "F"] \arrow[r, shift right=2, "G"'] \arrow[r, phantom, "\downarrow\varphi"] & \mathscr{D} \arrow[r, "T"] & \mathscr{E} \end{tikzcd}$$

このときも $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ に対し $(T\varphi)_X$ を $(T\varphi)_X = T(\varphi_X) : TF(X) \to TG(X)$ と定めると, φ が自然変換であることから, $\mathscr{C}$ の射 $f : X \to Y$ について次が可換になるので, $T\varphi : TF \to TG$ なる自然変換を得る。

$$\begin{tikzcd} TF(X) \arrow[r, "(T\varphi)_X"] \arrow[d, "TF(f)"'] & TG(X) \arrow[d, "TG(f)"] \\ TF(Y) \arrow[r, "(T\varphi)_Y"'] & TG(Y) \end{tikzcd}$$

(6.8). $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ を圏, F, G, H をいずれも $\mathscr{C}$ から $\mathscr{D}$ への関手とする。自然変換 $\varphi : F \to G$, $\psi : G \to H$ に対し, その合成 $\psi \circ \varphi : F \to H$ を, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ に対し, $(\psi \circ \varphi)_X : F(X) \to H(X)$ が $\psi_X \circ \varphi_X$ となるように定義する。

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, shift left=4, "F"] \arrow[r, "G"] \arrow[r, shift right=4, "H"'] & \mathscr{D} \end{tikzcd} \quad (\downarrow\varphi,\ \downarrow\psi)$$

[*1] この文章では可換環は積についての単位元 1 を持ち, 準同型は 1 を 1 に写すものと仮定する。

$f: X \to Y$ なる $\mathscr{C}$ の射に対し, 次の $\mathscr{D}$ の図式が可換であることから, $\psi \circ \varphi$ は確かに自然変換である。

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\varphi_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\varphi_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d, "\psi_X"'] & G(Y) \arrow[d, "\psi_Y"] \\ H(X) \arrow[r, "H(f)"] & H(Y) \end{tikzcd}$$

このとき, $\psi \circ \varphi$ を φ と ψ の垂直合成 (**vertical composite**) と呼ぶ。

(6.9). $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}$ を圏, $F, G: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $S, T: \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ を関手, $\varphi: F \to G$, $\psi: S \to T$ を自然変換とする。

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathscr{D} \arrow[r, bend left, "S"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\psi"] & \mathscr{E} \end{tikzcd}$$

このとき, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ に対し $\mathscr{D}$ の射 $\varphi_X : F(X) \to G(X)$ が対応するので, ψ が自然変換であることから次の可換図式を得る。

$$\begin{tikzcd} SF(X) \arrow[r, "(\psi F)_X"] \arrow[d, "(S\varphi)_X"'] & TF(X) \arrow[d, "(T\varphi)_X"] \\ SG(X) \arrow[r, "(\psi G)_X"'] & TG(X) \end{tikzcd}$$

これは, 次の自然変換の等号を意味する。

$$T\varphi \circ \psi F = \psi G \circ S\varphi \tag{6.9.1}$$

そこで, 自然変換 $\psi\varphi : SF \to TG$ を $\psi\varphi = T\varphi \circ \psi F = \psi G \circ S\varphi$ と定義する。これを φ と ψ の水平合成 (**horizontal composite**) と呼ぶ。

(6.10) 定義 (関手のなす圏). $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ を圏とするとき, 対象が $\mathscr{C}$ から $\mathscr{D}$ への関手で, 関手 $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ に対し, $\mathrm{Hom}(F, G)$ を F から G への自然変換全体のなす集合とする。このとき, $1_F : F \to F$ を, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ に対し $1_{F(X)} : F(X) \to F(X)$ を対応させる自然変換とし, $\varphi: F \to G$, $\psi : G \to H$ に対し, $\psi \circ \varphi$ を垂直合成で定義すると, 圏ができる。これを, $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ ないしは $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$ と書き, $\mathscr{C}$ から $\mathscr{D}$ への関手のなす圏と呼ぶ。

7 随伴

(7.1). この節では, 圏と言えば局所小, 即ち $\mathrm{Hom}(X, Y)$ が集合であるような圏のみを考えることにする。また (Set) を集合の圏とする。随伴にはいくつかの定義の仕方がある。ここでは比較的分かりやすいと思われる定義から始める。後で述べる例を見れば, 随伴関手の重要性が良くわかると思う。

(7.2) 定義. $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ を圏とする。$\mathscr{C}$ と $\mathscr{D}$ の間の随伴 (**adjunction**) とは共変関手 $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ および $\mathscr{C}^{\circ} \times \mathscr{D}$ から (Set) への関手の自然同型 $\eta : \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(-), -) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, G(-))$ の組 (F, G, η) のことである。このとき, (F, G) を随伴対 (**adjoint pair**) と言ったり F を G の左随伴関手 (**left adjoint**), G を F の右随伴関手 (**right adjoint**) と言ったりする。また, このことを

$$F \dashv G$$

と表記したり, あるいは, 図式の中で

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, shift left=1.5ex, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, shift right=1.5ex, "G"'] & \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

などと書く。定義からこれは,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), Y) \xrightarrow[\eta_{X,Y}]{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Y))$$

のような, X, Y について関手的な, つまり $\mathscr{C}$ の射 $f : X' \to X$ 及び $\mathscr{D}$ の射 $g : Y \to Y'$ に対し, 次が可換になるような全単射の族があることとも言い換えられる。

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), Y) \arrow[r, "\sim", "\eta_{X,Y}"'] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Y)) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X'), Y') \arrow[r, "\sim", "\eta_{X',Y'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X', G(Y')) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \varphi \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \psi \arrow[d, mapsto] \\ g \circ \varphi \circ F(f) \arrow[r, mapsto] & G(g) \circ \psi \circ f \end{tikzcd}$$

随伴を別の形で定式化してみよう。

(7.3) 定義 (随伴 (2)). 圏 $\mathscr{C}$ と圏 $\mathscr{D}$ の間の随伴を共変関手 $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ および自然変換 $\epsilon : \mathrm{id}_{\mathscr{C}} \to GF$, $\delta : FG \to \mathrm{id}_{\mathscr{D}}$ の組 (F, G, ϵ, δ) であって次を満たすものと定義する。

(1) 自然変換の合成 $G \xrightarrow{\epsilon G} GFG \xrightarrow{G\delta} G$ は 1_G.
(2) 同じく $F \xrightarrow{F\epsilon} FGF \xrightarrow{\delta F} F$ は 1_F.

このとき, ϵ を単位射 (**unit**), δ を余単位射 (**counit**) と呼ぶ。

(7.4). 前の定義との関係を述べよう。まず, この定義 (7.3) から初めの定義 (7.2) が得られることを示す。上の (F, G, ϵ, δ) が与えられたとき, $\mathscr{D}$ の射 $g \in \mathrm{Hom}(F(X), Y)$ に対し, $\epsilon_X : X \to GF(X)$ と $G(g) : GF(X) \to G(Y)$ の合成として, $G(g) \circ \epsilon_X : X \to G(Y)$ が定まる。同様に, $f \in \mathrm{Hom}(X, G(Y))$ に対し, $F(f) : F(X) \to FG(Y)$ と $\delta_Y : FG(Y) \to Y$ の合成として $\delta_Y \circ F(f) : F(X) \to Y$ が定まる。

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), Y) \arrow[r, shift left, "\eta_{X,Y}"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Y)) \arrow[l, shift left, "\theta_{X,Y}"] \\ g \arrow[r, mapsto] & G(g) \circ \epsilon_X \\ \delta_Y \circ F(f) & f \arrow[l, mapsto] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[d, "g"'] \\ Y \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} GF(X) \arrow[d, "G(g)"'] & X \arrow[l, "\epsilon_X"'] \arrow[dl, "\eta_{X,Y}(g)"] \\ G(Y) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, "\theta_{X,Y}(f)"] \\ FG(Y) \arrow[r, "\delta_Y"'] & Y \end{tikzcd} \quad \leftsquigarrow \quad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] \\ G(Y) \end{tikzcd}$$

すると, η や θ は $\mathscr{C}^{\circ} \times \mathscr{D} \to (\mathsf{Set})$ なる関手の自然変換になっている。また, $\theta_{X,Y} \circ \eta_{X,Y}(g)$ は次のように書ける。

$$\theta_{X,Y} \circ \eta_{X,Y}(g) = \delta_Y \circ F(G(g) \circ \epsilon_X) = \delta_Y \circ FG(g) \circ (F\epsilon)_X.$$

このとき次の図式において, 上の三角形の部分は仮定から可換, また下の四角形の部分は ϵ が自然変換であることから可換なので ($(\delta F)_X = \delta_{F(X)}$ に注意), $g = \theta_{X,Y} \circ \eta_{X,Y}(g)$ が言える。

$$\begin{tikzcd}
 & F(X) \arrow[dl, bend right, "(F\epsilon)_X"'] \arrow[d, "(1_F)_X"] \\
FGF(X) \arrow[r, "(\delta F)_X"] \arrow[d, "FG(g)"'] & F(X) \arrow[d, "g"] \\
FG(Y) \arrow[r, "\delta_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

同様に, $\eta_{X,Y} \circ \theta_{X,Y}(f)$ は,

$$\eta_{X,Y} \circ \theta_{X,Y}(f) = G(\delta_Y \circ F(f)) \circ \epsilon_X = (G\delta)_Y \circ GF(f) \circ \epsilon_X.$$

このとき下の図式において上の四角形は, $(\epsilon G)_Y = \epsilon_{G(Y)}$ に注意すると, ϵ が自然変換であることから可換。また下の三角形は仮定より可換なので, $\eta_{X,Y} \circ \theta_{X,Y}(f) = f$ が言える。

$$\begin{tikzcd}
GF(X) \arrow[d, "GF(f)"'] & X \arrow[l, "\epsilon_X"'] \arrow[d, "f"] \\
GFG(Y) \arrow[dr, bend right, "(G\delta)_Y"'] & G(Y) \arrow[l, "(\epsilon G)_Y"'] \arrow[d, "(1_G)_Y"] \\
 & G(Y)
\end{tikzcd}$$

よって η, θ は互いの逆変換なので, これらは自然同型。

(7.5). 今度は逆に, (7.2) の意味での随伴 (F, G, η) が与えられたとする。このとき, $\mathrm{Hom}(F(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}(X, G(Y))$ において, $Y = F(X)$ の場合の $\mathrm{Hom}(F(X), F(X)) \simeq \mathrm{Hom}(X, GF(X))$ なる射の $1_{F(X)}$ の行き先を $\epsilon_X : X \to GF(X)$ とする。すると, η の関手性より ϵ_X は関手的で, したがって $\epsilon : \mathrm{id}_{\mathscr{C}} \to GF$ なる自然変換が定まる。同様に, $X = G(Y)$ の場合を考えると, $\mathrm{Hom}(FG(Y), Y) \simeq \mathrm{Hom}(G(Y), G(Y))$ で $1_{G(Y)}$ に写る元として $\delta_Y : FG(Y) \to Y$ とすることで自然変換 $\delta : FG \to \mathrm{id}_{\mathscr{D}}$ が定まる。このとき, $\epsilon_X : X \to GF(X)$ より次の可換図式を得る。$1_{GF(X)}$ の行き先を 2 通り計算すれば $\delta F \circ F\epsilon = 1_F$ がわかる。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(FGF(X), F(X)) \arrow[r, dash, "\sim"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(GF(X), GF(X)) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}(F(X), F(X)) \arrow[r, dash, "\sim"] & \mathrm{Hom}(X, GF(X))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\delta F)_X \arrow[d, mapsto] & 1_{GF(X)} \arrow[l, mapsto] \arrow[d, mapsto] \\
(\delta F)_X \circ (F\epsilon)_X = 1_{F(X)} & \epsilon_X \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}$$

同様に, $G\delta \circ \epsilon G = 1_G$ もわかるので, (7.3) の意味での随伴 (F, G, ϵ, δ) が定まる。この構成が前のパラグラフと逆の構成になっていることは簡単に確かめられる。以上から, (7.2) と (7.3) が同等であることがわかる。

(7.6). 随伴関手は, ある意味一意的である。このことをきちんと説明するには, 随伴の共役の概念が必要になる。ここでは詳しい説明は省略する。興味がある人は, 例えば [Mac98, IV, 7] などを参照のこと。概要は次の通り。

(7.7). (F, G, ϵ, δ), $(F', G', \epsilon', \delta')$ を, 共通の圏 $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ についての $F, F' : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $G, G' : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$, なる随伴とする。$\sigma : F \to F'$, $\tau : G' \to G$ を自然変換とするとき, $\sigma_X^* : \mathrm{Hom}(F'(X), Y) \to \mathrm{Hom}(F(X), Y); f \mapsto f \circ \sigma_X$, $\tau_{X*} : \mathrm{Hom}(X, G'(Y)) \to \mathrm{Hom}(X, G(Y)); g \mapsto \tau_Y \circ g$ なる射が定まる。

(7.7.1)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(F'(X), Y) & \xrightarrow{\eta'_{X,Y}} & \mathrm{Hom}(X, G'(Y)) \\ {\scriptstyle \sigma_X^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{Y*}} \\ \mathrm{Hom}(F(X), Y) & \xrightarrow{\eta_{X,Y}} & \mathrm{Hom}(X, G(Y)) \end{array}$$

が可換となるような組 (σ, τ) を, (F, G, ϵ, δ), $(F', G', \epsilon', \delta')$ についての共役 (**conjugate**) と言う。(7.7.1) の可換性は, 次のいずれかの図式の可換性と同値になる。証明は [Mac98, IV, 7, Theorem 2] 参照。

(7.7.2)
$$\begin{array}{ccc} G' & \xrightarrow{\quad\tau\quad} & G \\ {\scriptstyle \epsilon G'}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle G\delta'} \\ GFG' & \xrightarrow{G\sigma G'} & GF'G' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\quad\sigma\quad} & F' \\ {\scriptstyle F\epsilon'}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \delta F'} \\ FG'F' & \xrightarrow{F\tau F'} & FGF' \end{array}$$

(7.7.3)
$$\begin{array}{ccc} FG' & \xrightarrow{F\tau} & FG \\ {\scriptstyle \sigma G'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\ F'G' & \xrightarrow{\quad\delta'\quad} & 1_{\mathscr{D}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1_{\mathscr{C}} & \xrightarrow{\quad\epsilon\quad} & GF \\ {\scriptstyle \epsilon'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G\sigma} \\ G'F' & \xrightarrow{\tau F'} & GF' \end{array}$$

2 つの随伴の共役は, 随伴の間の変換と見なせる。これにより, 随伴を対象, 共役を射とする圏ができる。さて, ここで例えば $F = F'$ の場合を考える。このような随伴の組 (F, G, ϵ, δ), $(F, G', \epsilon', \delta')$ が与えられたとき, これらの間の共役で $(1_F, \tau)$ $(\tau : G' \to G)$ なるものが存在する。実際, (7.7.2) の左の図式で $F = F'$, $\sigma = 1_F$ とすると,

$$\begin{array}{ccc} G' & \xrightarrow{\quad\tau\quad} & G \\ {\scriptstyle \epsilon G'}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle G\delta'} \\ GFG' & \xrightarrow{G1_F G'} & GFG' \end{array}$$

なる図式が得られるので, これが可換になる τ が一意的に存在すればよいわけだが, それには τ を他の 3 つの自然変換の合成とすればよいし, そうするしかない。このとき τ は自然同型になる。何故なら G と G' を入れ換えて考えれば, 共役 $(1_F, \tau')$ $(\tau' : G \to G')$ が存在して $\tau' \circ \tau = 1$, $\tau \circ \tau' = 1$ となるからである。この意味で, F に対し, G が一意的に決まる。同様の意味で, G に対し F が一意的に決まる。

(7.8) 例. Z を集合とする。$G = \mathrm{Hom}(Z, -) : (\mathsf{Set}) \to (\mathsf{Set})$; $X \mapsto \mathrm{Hom}(Z, X)$ の左随伴関手は, $F : (\mathsf{Set}) \to (\mathsf{Set})$; $X \mapsto X \times Z$. 実際, $f : X \to Y$ に対し, $F(f) = f \times \mathrm{id} : X \times Z \to Y \times Z$ とする。このとき X, Y に対し, 次のような全単射 $\eta_{X,Y}$ が定まる。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(X \times Z, Y) & \xrightarrow{\quad\eta_{X,Y}\quad} & \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Hom}(Z, Y)) \\ \varphi & \longmapsto & \big(x \mapsto (z \mapsto \varphi(x, z))\big) \\ \big((x, z) \mapsto \psi_x(z)\big) & \longleftarrow & \psi : x \mapsto (\psi_x : z \mapsto \psi_x(z)) \end{array}$$

これが X, Y について関手的であることは明らかなので, (F,G,η) は随伴である。この場合, 単位射 $\epsilon : 1 \to GF$ は

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\epsilon_X} & \mathrm{Hom}(Z, X \times Z) \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & \bigl(z \mapsto (x,z)\bigr). \end{array}$$

一方, 余単位射 δ_Y は

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(Z,Y) \times Z & \xrightarrow{\delta_Y} & Y \\ \cup & & \cup \\ (\psi, z) & \longmapsto & \psi(z). \end{array}$$

(7.9) 例. A を可換環とし, A 加群の圏を (A-Mod) とする。A 加群 L を一つ固定し, (A-Mod) から (A-Mod) への関手 F, G を $F(M) = M \otimes_A L$, $G(N) = \mathrm{Hom}_A(L,N)$ によって定める。このとき, A 加群 M, N についての次の自然同型がある。これは実際には A 加群の準同型である。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A L, N) & \xrightarrow{\eta_{M,N}} & \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(L,N)) \\ \varphi & \longmapsto & \bigl(x \mapsto (z \mapsto \varphi(x \otimes z))\bigr) \\ \bigl(x \otimes z \mapsto \psi_x(z)\bigr) & \longleftarrow & \psi : x \mapsto (\psi_x : z \mapsto \psi_x(z)) \end{array}$$

したがって, (F,G,η) は随伴である。単位射 $\epsilon : 1 \to GF$ は,

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\epsilon_M} & \mathrm{Hom}_A(L, M \otimes_A L) \\ x & \longmapsto & \bigl(z \mapsto x \otimes z\bigr). \end{array}$$

なる射である。一方, 余単位射 δ_N は

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(L,N) \otimes_A L & \xrightarrow{\delta_N} & N \\ \psi \otimes z & \longmapsto & \psi(z) \end{array}$$

で, これは評価写像 (evaluation map) である。

(7.10) 例. A を可換環とする。忘却関手 $G :$ (A-Mod) $\to$ (Set) の左随伴関手は集合 X に対し, $F(X) = \bigoplus_{x \in X} A$ を対応させ, $f : X \to Y$ に対し, $F(f)$ を $F(f)\bigl((a_x)_x\bigr) = \sum a_x f(x)$ なる写像として定まる関手 F である。実際このとき, M を A 加群, X を集合として,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & M \\ \bigoplus_{x \in X} A \arrow[ur, dashed, "\exists_1"'] & \end{tikzcd}$$

なる図式より, 次の関手的な全単射があることがわかる。

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-mod}}(F(X), M) \simeq \mathrm{Hom}_{(\mathsf{Set})}(X, M).$$

この場合, 単位射 $\epsilon : 1 \to GF$ は, $\epsilon_X : X \to \bigoplus_{x \in X} A$; $x \mapsto e_x$ (ただし e_x は x 成分が 1 で他は 0 である元), また余単位射 $\delta : FG \to 1$ は $\delta_M : \bigoplus_{x \in M} A \to M$; $(a_x)_x \mapsto \sum a_x x$. なお, この場合に集合の圏への忘却関手の左随伴関手によって自由加群が構成できたことに注目して, 集合の圏への忘却関手の左随伴関手から得られる対象を「自由対象」と定義することがある。

(7.11) 例. 忘却関手 G : (完備距離空間) $\to$ (距離空間) の左随伴関手は, 距離空間 X に対しその完備化 $\hat{X}$ を対応させる関手。実際, X を距離空間, Y を完備距離空間とするとき, $X \to \hat{X}$ を自然な埋め込みとして

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & Y \\
\hat{X} \arrow[ur, "\exists_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

なる図式を考えれば, 次の関手的な全単射ができる。ただし左は完備距離空間の射の集合, 右は距離空間の圏の射の集合.

$$\mathrm{Hom}(\hat{X}, Y) \simeq \mathrm{Hom}(X, Y).$$

この場合, 単位射 $\epsilon : 1 \to GF$ は, $\epsilon_X : X \to \hat{X}$ が完備化への埋め込みであるような射, また余単位射 $\delta : FG \to 1$ は, $\delta_Y : Y \to Y$ が恒等射であるような射 (Y が完備距離空間なら $\hat{Y} = Y$ であることに注意)。

8 表現可能関手

(8.1). この節でも, 前節に引き続き, 圏と言えば局所小, 即ち, $\mathrm{Hom}(X, Y)$ が集合であるような圏のみを考えることにする。この節で解説する表現可能関手の考え方は, トポスの概念につながる重要なものである。が, ここでは基本的な概念を説明するだけにしておく。

(8.2). $\mathscr{C}$ を圏とする。$X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ に対し, 反変関手 $h_X : \mathscr{C} \to (\mathsf{Set})$ を, $Y, Y' \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, $f : Y \to Y'$ に対して

$$
\begin{aligned}
&h_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X) \\
&h_X(f) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y', X) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X);\ g \mapsto g \circ f
\end{aligned}
$$

とすることで定めることができる。同様に共変関手 $h'_X : \mathscr{C} \to (\mathsf{Set})$ も次のように定まる。

$$
\begin{aligned}
&h'_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \\
&h'_X(f) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y');\ g \mapsto f \circ g
\end{aligned}
$$

(8.3) 定義. $\mathscr{C}$ から集合の圏への反変関手を, $\mathscr{C}$ 上の集合に値を取る前層ないしは集合の前層と呼ぶ。この文章では, 集合の前層を対象とし, 自然変換を射とする圏を $\widehat{\mathscr{C}}$ と書く。つまり, $\widehat{\mathscr{C}} = \mathrm{Hom}(\mathscr{C}^\circ, (\mathsf{Set}))$. (6.10) 参照。

(8.4). $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ に対し $h_X \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\mathscr{C}}$ を対応させ, また $\mathscr{C}$ の射 $f : X \to X'$ に対し, $h_X(Y) = \mathrm{Hom}(Y, X) \to h_{X'}(Y) = \mathrm{Hom}(Y, X'); g \mapsto f \circ g$ で定まる $\widehat{\mathscr{C}}$ の射 $h_f : h_X \to h_{X'}$ を対応させることで次の共変関手が定まる。

$$h : \mathscr{C} \to \widehat{\mathscr{C}}.$$

(8.5) 命題 (米田の補題). $\mathscr{C}$ を圏, $F : \mathscr{C} \to (\mathsf{Set})$ を反変関手とする。$X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ に対し, 次の全単射がある。

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(h_X, F) \simeq F(X).$$

(証明). $\varphi : h_X \to F$ を自然変換とすると, $\varphi_X : h_X(X) = \mathrm{Hom}(X,X) \to F(X)$ による 1_X の像として $\xi \in F(X)$ が定まる。逆に $\xi \in F(X)$ が与えられたとき, $\varphi_Y : h_X(Y) \to F(Y)$ を $f \in h_X(Y) = \mathrm{Hom}(Y,X)$ に対し $F(f)(\xi)$ を対応させる写像として定めると, $g : Z \to Y$ に対し,

(8.5.1)
$$\begin{array}{ccccccc}
h_X(Y) = \mathrm{Hom}(Y,X) & \xrightarrow{\varphi_Y} & F(Y) & \quad & f & \longmapsto & F(f)(\xi) \\
{\scriptstyle h_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(g)} & & \downarrow & & \downarrow \\
h_X(Z) = \mathrm{Hom}(Z,X) & \xrightarrow{\varphi_Z} & F(Z) & & f \circ g & \longmapsto & F(g)(F(f)(\xi)) \\
 & & & & & & = F(f \circ g)(\xi)
\end{array}$$

となることから φ は自然変換であり, 次の図式からこれらの $\varphi \mapsto \xi$ と $\xi \mapsto \varphi$ なる写像が互いの逆写像であることがわかる。

$$\begin{array}{ccccccc}
h_X(X) = \mathrm{Hom}(X,X) & \xrightarrow{\varphi_X} & F(X) & \quad & 1_X & \longmapsto & \xi \\
\downarrow{\scriptstyle h_X} & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} & & \downarrow & & \downarrow \\
h_X(Y) = \mathrm{Hom}(Y,X) & \xrightarrow{\varphi_Y} & F(Y) & & f & \longmapsto & F(f)(\xi)
\end{array}$$

よって全単射である。 $\square$

(8.6) 定理 (米田の埋め込み定理). $\mathscr{C}$ を圏とする。共変関手 $h : \mathscr{C} \to \widehat{\mathscr{C}}$ は充満忠実である。

(証明). 米田の補題 (8.5) において, $F = h_Y$ の場合を考えれば

$$\mathrm{Hom}(h_X, h_Y) \simeq h_Y(X) = \mathrm{Hom}(X,Y)$$

が得られる。(8.5) の証明における構成の仕方から, これは (8.4) で定まる射そのものであるから, h は充満忠実である。 $\square$

(8.7) 補足. これにより, $\mathscr{C}$ という圏を, $\mathscr{C}$ 上の前層の圏 $\widehat{\mathscr{C}}$ に充満忠実に埋め込むことができる。一般に $\mathscr{C}$ より $\widehat{\mathscr{C}}$ の方が良い性質を持つので, $\mathscr{C}$ における問題を $\widehat{\mathscr{C}}$ の中で考えることにより, 問題が解決できることがある。Grothendieck はこの考え方を強力に推し進めることで, コホモロジー理論を発展させた。

(8.8) 定義. 反変関手 $F : \mathscr{C} \to (\mathsf{Set})$ が表現可能 (**representable**) であるとは, 自然同型 $h_X \simeq F$ が存在するような $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ が存在すること。

(8.9). さて, 米田の補題 (8.5) より, $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(h_X, F) \simeq F(X)$ であるから, 自然同型 $\varphi : h_X \simeq F$ に対し $F(X)$ の元 ξ が決まる。(8.5) の証明にあるように, この ξ は

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,X) & \xrightarrow[\varphi_X]{\sim} & F(X) \\
\cup\!\!\!\!\mid & & \cup\!\!\!\!\mid \\
1_X & \longmapsto & \xi
\end{array}$$

で定まる元であり, このとき一般の Y については $\varphi_Y : h_X(Y) \to F(Y)$ が $f \in h_X(Y) = \mathrm{Hom}(Y,X)$ を $F(f)(\xi) \in F(Y)$ に写す写像として定まるのだった。

(8.10) 定義. 関手 $F : \mathscr{C} \to (\mathsf{Set})$ に対し, (X,ξ) を $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $\xi \in F(X)$ の組で $\mathrm{Hom}(Y,X) \to F(Y)$; $f \mapsto F(f)(\xi)$ が全単射を与えるものとする。このとき, (X,ξ) は F を表現 (**represent**) するという。ξ を省略して X が F を表現するということもある。

(8.11) 系. F が表現可能であれば, $F \simeq h_X$ となる X は同型を除いて一意的に定まる。

(証明). 実際, $h_X \simeq h_{X'}$ とすると, (8.6) より $h : \mathscr{C} \to \widehat{\mathscr{C}}$ が充満忠実であることから $X \simeq X'$ となる。 □

(8.12). h' の場合も同じようなことが言える。例えば, 米田の補題については, 次が成立する。

(8.13) 補題 (米田の補題 (2)). $\mathscr{C}$ を圏, $F : \mathscr{C} \to$ (Set) を共変関手とする。$X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ に対し, 次の全単射がある。

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}^\circ}}(h'_X, F) \simeq F(X).$$

(証明). 反変関手の場合の米田の補題 (8.5) の双対命題である。つまり $\mathscr{C}^\circ$ で考えれば直接 (8.5) から従うので証明は不要だが, 便宜上, 対応を記しておこう。$\varphi : h'_X \to F(X)$ を自然変換とすると, $\varphi_X : h'_X(X) = \mathrm{Hom}(X, X) \to F(X)$ による 1_X の像として $\xi \in F(X)$ が定まる。この対応が全単射となる。すると, 一般の Y については次の図式から φ_Y が復元できる。更に

(8.13.1)
$$\begin{array}{ccccccc} h'_X(X) = \mathrm{Hom}(X, X) & \xrightarrow{\varphi_X} & F(X) & \qquad & 1_X & \longmapsto & \xi \\ \big\downarrow{\scriptstyle h_X} & & \big\downarrow{\scriptstyle F(f)} & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ h'_X(Y) = \mathrm{Hom}(X, Y) & \xrightarrow{\varphi_Y} & F(Y) & & f & \longmapsto & F(f)(\xi) \end{array}$$

の可換性から $\varphi \mapsto \xi$ と $\xi \mapsto \varphi$ なる写像が互いの逆写像であることがわかる。 □

(8.14) 系. 反変関手

$$h' : \mathscr{C} \to \widehat{\mathscr{C}^\circ};\ X \mapsto h'_X$$

は充満忠実。

(証明). 米田の補題 (2) の状況で, $F = h'_Y$ の場合を考えると, $\mathrm{Hom}(h'_X, h'_Y) \simeq h'_Y(X) = \mathrm{Hom}(Y, X)$. □

(8.15) 定義. 共変関手 $F : \mathscr{C} \to$ (Set) が表現可能であるとは, 自然同型 $h'_X \simeq F$ が存在するような X が存在することである。

(8.14) より X は F に対し同型を除いて一意的に決まる。また, この場合の自然同型 $\varphi : h'_X \simeq F$ は $F(X)$ の元 ξ で, 任意の Y に対し $\varphi_Y : \mathrm{Hom}(X, Y) \to F(Y);\ f \mapsto F(f)(\xi)$ が全単射であるような元と 1 対 1 で対応している。そこで, この場合に (X, ξ) は F を表現するという。ξ を省略して, X が F を表現するということもある。

次に, 表現可能性と随伴関手の関係を述べよう。

(8.16) 定理. 共変関手 $F \in \mathrm{Hom}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ に対し,

F が右随伴関手を持つ $\Leftrightarrow$ 任意の $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$ に対し, $\mathrm{Hom}(F(-), Y) : \mathscr{C}^\circ \to$ (Set) が表現可能。

(証明). 随伴関手 G が存在すれば, G によって表現可能であることは自明。逆に任意の $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$ に対し, X についての反変関手 $T(X) = \mathrm{Hom}(F(X), Y)$ が表現可能だと仮定する。$\mathrm{Hom}(F(X), Y)$ が, $\mathscr{D}$ の対象 $G_0(Y)$ と $\delta_Y \in \mathrm{Hom}(FG_0(Y), Y)$ の組 $(G_0(Y), \delta_Y)$ によって表現されるとしよう (G_0 は関手ではなく対象の写像なので, 区別のためにこう書いている)。このとき, $G(Y) = G_0(Y)$ なる関手 G および次の射 $\theta_{X,Y}$ で, X, Y について関手的であるようなものが存在することを言えばよい。

$$\mathrm{Hom}(F(X), Y) \xleftarrow{\theta_{X,Y}} \mathrm{Hom}(X, G(Y))$$

仮定から G を G_0 に置き換えたとき, 各 X, Y に対し全単射 $\theta_{X,Y}$ が存在し, X について関手的である。(8.5.1) より, $\theta_{X,Y}$ は, $f : X \to G_0(Y)$ に対し

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(F(X),Y) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}(X,G_0(Y)) & \delta_Y \circ F(f) & f \arrow[l, mapsto] \\
\mathrm{Hom}(FG_0(Y),Y) \arrow[u, "-\circ F(f)"] \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}(G_0(Y),G_0(Y)) \arrow[u, "-\circ f"'] & \delta_Y \arrow[u, mapsto] & \mathrm{id}_{G_0(Y)} \arrow[l, mapsto] \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

が可換になるよう, $g = \theta_{X,Y}(f) = \delta_Y \circ F(f)$ として定義された。これが全単射であることから, 与えられた $g : F(X) \to Y$ に対し, $g = \delta_Y \circ F(f)$ なる $f : X \to G_0(Y)$ が一意的に決まる。

(8.16.1)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, dashed, "\exists_1 f"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, "g"] & \\
G_0(Y) & FG_0(Y) \arrow[r, "\delta_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

さて, 今度は $g : Y' \to Y$ が与えられたとする。上の図式で, $X = G_0(Y)$, g が $g \circ \delta_{Y'} : FG_0(Y') \to Y$ である場合を考えれば,

$$\begin{tikzcd}
G_0(Y') \arrow[d, dashed, "\exists_1 f"'] & FG_0(Y') \arrow[r, "\delta_{Y'}"] \arrow[d, dashed, "F(f)"'] & Y' \arrow[d, "g"] \\
G_0(Y) & FG_0(Y) \arrow[r, "\delta_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

が可換になるような $f : G_0(Y) \to G_0(Y')$ が一意的に定まる。よって, $G(Y) = G_0(Y)$, $G(g) = f$ として G を定めると, 一意性から $G(1_Y) = 1_{G(Y)}$, また $Y \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{g'} Y''$ に対して $G(g'g) = G(g')G(g)$ となることもわかる。よって G は関手になる。作り方からこれが最初の図式を可換にすることは明らか。 □

(8.17) 補足. 上の (8.16) の証明から, 関手 $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ と, 各 $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$ に対して, (8.16.1) のような普遍性を持つ $G_0(Y)$ と $\delta_Y : FG_0(Y) \to Y$ の組 (F, G_0, δ_Y) が与えられれば, それにより随伴が定まることを意味する。

(8.18) 定理. 共変関手 $G \in \mathrm{Hom}(\mathscr{D}, \mathscr{C})$ に対し,

G が左随伴関手を持つ $\Leftrightarrow$ 任意の $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ に対し, $\mathrm{Hom}(X, G(-)) : \mathscr{C} \to (\mathsf{Set})$ が表現可能。

(証明). (8.16) の双対命題なので本来証明は不要だが, 便宜的な意味で, $\mathrm{Hom}(X, G(-))$ を表現する $F_0(X) \in \mathscr{D}$ と $\epsilon_X : X \to GF_0(X)$ の組 (F_0, ϵ_X) が与えられたとき, $F(X) = F_0(X)$ なる関手 $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ と, X, Y についての関手の自然同型 $\eta_{X,Y} : \mathrm{Hom}(F(X), Y) \to \mathrm{Hom}(X, G(Y))$ をどう構成するかを書いておく。仮定から, $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$ について関手的な次の同型 $\eta_{X,Y}$ がある。

$$\mathrm{Hom}(F_0(X), Y) \xrightarrow{\eta_{X,Y}} \mathrm{Hom}(X, G(Y))$$

ここで, (8.13.1) より, 上の射 $\eta_{X,Y}$ は, $g : F_0(X) \to Y$ に対し

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(F_0(X),Y) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}(X,G(Y)) & g \arrow[r, mapsto] & G(g) \circ \epsilon_X \\
\mathrm{Hom}(F_0(X),F_0(X)) \arrow[u, "g\circ -"'] \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}(X,GF_0(X)) \arrow[u, "G(g)\circ -"'] & \mathrm{id}_{F_0(Y)} \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & \epsilon_X \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

が可換になるよう, $f = \eta_{X,Y}(g) = G(g) \circ \epsilon_X$ として定義された。これが全単射であることから, 与えられた $f : X \to G(Y)$ に対し, $f = G(g) \circ \epsilon_X$ なる $g : F_0(X) \to Y$ が一意的に決まる。

(8.18.1)
$$
\begin{tikzcd}
F_0(X) \arrow[d, dashed, "\exists_1 g"'] \\
Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\epsilon_X"] \arrow[dr, "f"'] & GF_0(X) \arrow[d, dashed, "G(g)"] \\
 & G(Y)
\end{tikzcd}
$$

さて, 今度は $f : X \to X'$ が与えられたとする。上の図式で, $Y = F_0(X)$, f が $\epsilon_{X'} \circ f : X \to GF_0(X')$ である場合を考えれば,

$$
\begin{tikzcd}
F_0(X) \arrow[d, dashed, "\exists_1 g"'] \\
F_0(X')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\epsilon_X"] \arrow[d, "f"'] & GF_0(X) \arrow[d, dashed, "G(g)"] \\
X' \arrow[r, "\epsilon_{X'}"'] & GF_0(X')
\end{tikzcd}
$$

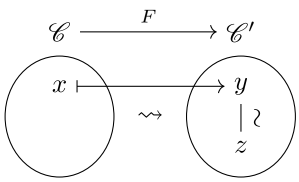
が可換になるような $g : F_0(X) \to F_0(X')$ が一意的に定まる。そこで, $F(X) = F_0(X)$, $F(f) = g$ として F を定めると, 一意性から $F(1_X) = 1_{F(X)}$, また $X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{f'} X''$ に対して $F(f'f) = F(f')F(f)$ となることもわかる。よって F は関手の構造を持つ。作り方からこれが最初の図式を可換にすることは明らか。 □

9 圏同値

(9.1). 共変関手 $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ が圏の同型であるとは, $F : \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathscr{C}')$ が全単射で, かつ $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ に対し $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(F(X), F(Y))$ も全単射であることである。しかし, 圏の比較という点で, この概念は強すぎる。例えば, 次の圏 $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ を考える。

- $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}) = \{x\}$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(x, x) = \{1_x\}$
- $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}') = \{x', y'\}$,
  $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(x', x') = \{1_{x'}\}$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(y', y') = \{1_{y'}\}$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(x', y') = \{f\}$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(x', y') = \{g\}$, $f \circ g = 1_{y'}$, $g \circ f = 1_{x'}$.

このとき, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ を $F(x) = x'$, $F(1_x) = 1_{x'}$ で定めると, $F : \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathscr{C}')$ は全射ではない。しかし, $\mathscr{C}'$ において x' と y' は同型なので, $\mathscr{C}'$ は本質的には一つの対象からなる圏とみなせる。このように, 同型なものは同じとみなす立場からは, $\mathscr{C}$ と $\mathscr{C}'$ は F によって同じ圏と考えるのが自然であろう。



これを定式化すると次のようになる。

(9.2) 定義. $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ を圏とし, $\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{C}'$ を関手とする。$G \circ F \simeq \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$, $F \circ G \simeq \mathrm{id}_{\mathscr{C}'}$ なる自然同型が存在するとき, つまり関手として $G \circ F$ や $F \circ G$ が恒等関手と同型であるとき, F や G は圏同値 (**equivalence of categories**) であるという。また, このような F や G が存在するとき, $\mathscr{C}$ と $\mathscr{C}'$ は圏同値 (**equivalent**) であるという。

(9.3) 定義. $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ が本質的全射 (**essentially surjective**) とは, 任意の $X' \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}'$ に対し, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ で $F(X) \simeq X'$ となるものが存在することである。

(9.4) 定理. $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ が圏同値 $\Leftrightarrow$ F は充満忠実かつ本質的全射。

(証明). ($\Rightarrow$) 仮定より任意の $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ に対し関手的な同型 $\rho_X : GF(X) \simeq X$ が存在する。したがって, 任意の $X' \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}'$ に対し $X = G(X')$ とすれば, $F(X) = FG(X') \simeq X'$ となるので, F は本質的全射。また, $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}'$ に対し,

$$\mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(F(X),F(Y)) \to \mathrm{Hom}(GF(X),GF(Y)) \simeq \mathrm{Hom}(X,Y)$$

という合成写像は恒等写像なので, $F : \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(F(X),F(Y))$ は単射。同様に $G : \mathrm{Hom}(X',Y') \to \mathrm{Hom}(G(X'),G(Y'))$ も単射。ここで任意の $g : F(X) \to F(Y)$ に対し, $G(g) : GF(X) \to GF(Y)$ を $GF \simeq \mathrm{id}$ を通して $X \to Y$ とみなしたものを $f : X \to Y$ とすれば $\rho(GF(f)) = f = \rho(G(g))$ より $GF(f) = G(g)$ で, よって $G : \mathrm{Hom}(F(X),F(Y)) \to GF(X) \to GF(Y)$ が単射であることから $F(f) = g$ が言える。よって $F : \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(F(X),F(Y))$ は全射。

($\Leftarrow$) $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ が充満忠実かつ本質的全射であるとき, (選択公理により) $X' \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}'$ に対し, $F(X) \simeq X'$ となる X を選び, $X = G(X')$ と定めることができる。このとき, この固定された $F(X) \simeq X$ を通じて

$$\mathrm{Hom}(G(X'),G(Y')) = \mathrm{Hom}(X,Y) \simeq \mathrm{Hom}(F(X),F(Y)) \simeq \mathrm{Hom}(X',Y')$$

という同型が存在する。この合成で $f : X' \to Y'$ に写る射 $G(X') \to G(Y')$ を $G(f)$ と書くことにすると, G は関手的であり, かつ $FGF \simeq F$ であることもわかる。すると F が充満忠実であることから $GF(X) \simeq X$ もわかる。これも関手的であるので, F や G は圏同値を定める。 $\square$

(9.5). $\mathscr{C}$ の双対圏と $\mathscr{C}'$ との間に圏の同値 $\mathscr{C}^\circ \simeq \mathscr{C}'$ があるとき, $\mathscr{C}$ と $\mathscr{C}'$ は反同値であるという言い方をする場合がある。この場合, 反変関手 $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ が同値であるといった言い方もする。

(9.6). 自明でない圏同値の例としてポントリャーギンの双対性がある。これは次のような定理である。

(9.7) 定理 (Pontryagin duality). $\mathscr{C}$ を対象が位相アーベル群の中で局所コンパクトなもので, 射が連続準同型である圏とする。$G \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ に対し, そのポントリャーギン双対 (Pontryagin dual) を G から $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ への連続準同型全体のなす群 $G^* = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ として定義する。ただし, $G^* = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ にはコンパクト開位相, つまり, G のコンパクト集合 K と $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の開集合 U に対し $V(K,U) \subset G^*$ を $f(K) \subset U$ なる準同型全体と書くとき, K, U が動くときの $V(K,U)$ を基底とする位相を入れる。このとき, 次の圏同値 (反同値) があり, 更に $G \to G^{**}$ なる自然な写像は同型になる。

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C} & \xrightarrow{F} & \mathscr{C} \\ G & \longmapsto & G^* \end{array}$$

参考文献

[Ka76] 河田敬義, ホモロジー代数 I, II, 岩波講座 基礎数学, 岩波書店 1976.

[Mac98] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Math., Springer, 1998.