第 0〜9 回 (1990〜1999 年) の日本数学オリンピックの問題を紹介します．第 10 回 (2000 年) 以降の問題は数学オリンピック財団のホームページに掲載されていますので，そちらをご覧下さい．
下記問題の解答は

数学オリンピック財団編「数学オリンピック辞典」朝倉書店

にすべて掲載されていますので，そちらを参照して下さい．また，絶版になっている過去の

数学オリンピック財団編「数学オリンピック 1900〜1994」日本評論社

数学オリンピック財団編「数学オリンピック 1995〜1999」日本評論社

を図書館などで捜して下さい．朝倉書店の本の解答は，私が目を通していますので，下の 2 冊より間違いが減っているはずです.
なお，問題の著作権は数学オリンピック財団にありますが，日本では，大学入試問題を含め，公開された数学の試験問題の教育的利用に関しては，公開や転載に関してあまりうるさく言わないのが慣例なので，その慣例に従って転載させていただきます.
なお，アメリカの SAT や ACT のように，問題の公表を厳しく制限されている試験問題ものもありますのでご注意下さい.
なお，疑義な点などありましたら，安藤までご連絡下さい.

1990 年 IMO 日本代表選抜 1 次試験

1990/1/15 1:00-4:00

1. N は 1990 桁の数で 9 の倍数である．N の各桁の数字を加えてできる数を N_1, N_1 の各桁の数字を加えてできる数を N_2, N_2 の各桁の数字を加えてできる数を N_3 とする．N_3 を求めよ．

2. 方程式 $x^2+25x+52=3\sqrt{x^2+25x+80}$ のすべての実数解の積を求めよ．

3. ある整数を 2 乗すると，下 3 桁が 0 でない同じ数字になる．そのような性質をもつ最小の正の整数を求めよ．

4. 大相撲で同じ勝星の力士が A, B, C の 3 人いたので，優勝決定戦のともえ戦を行うことになった．まず，A と B が対戦し，次には勝った方と C が対戦する．同じ力士が 2 番続けて勝てば優勝となるが，もしひとつ前に勝った力士が負ければ，そのときの勝者とひとつ前に負けた力士とが対戦し，これを繰り返す．ただし，合計 7 戦しても優勝者が決まらないときは，そこで打ち切り優勝者なしとする．A, B, C の 3 人とも実力が同じで，どの対戦でも一方が勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ ずつとするとき，第 1 回目に負けた力士が優勝する確率を求めよ．

5. 面積が 740 の平行四辺形 $ABCD$ がある．辺 AB, BC, CD, DA を $5:2$ に内分する点をそれぞれ，P, Q, R, S とする．直線 AQ と直線 BR の交点を W, 直線 BR と直線 CS の交点を X, 直線 CS と直線 DP の交点を Y, 直線 DP と直線 AQ の交点を Z とする．四角形 $WXYZ$ の面積を求めよ．

6. 3 辺の長さが 2, 3, 5 の直方体が沢山ある．1 辺の長さが 90 の立方体の中に，この直方体を同じ向きに，きちんと並べて，いっぱいになるまで積み重ねる．このとき，大きい立方体の 1 つの対角線が貫通する直方体の個数を求めよ．

7. $4^{27}+4^{500}+4^n$ が平方数 (整数の 2 乗) となるような最大の整数 n を求めよ．

8. 正の整数に対して定義された関数 f は次の性質をもっている．

$$f(n)=\begin{cases} n-3, & n \geqq 1000 \\ f(f(n+7)), & n<1000 \end{cases}$$

このとき，$f(90)$ を求めよ．

9. 正の整数 n に対して, $a_n = 50 + n^2$ と定める. 各 n に対して, a_n と a_{n+1} の最大公約数を d_n とおく. n がすべての正の整数をわたる (動く) とき, d_n の最大値を求めよ.

10. x, y, z が正の数で $x + y + z = 1$ をみたしている. このとき,

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}$$

のとりうる最小値を求めよ.

11. 直方体の (内部の) 対角線と, それと交わらない 3 つの稜 (辺) との距離が 12, $4\sqrt{5}$, $\dfrac{30}{\sqrt{13}}$ である. この直方体の体積を求めよ.

12. 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める.

$$a_1 = 1, \qquad n \geqq 1 \text{ のとき } a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$$

このとき, a_{100} の整数部分 $[a_{100}]$ を求めよ.

1990 年 IMO 日本代表選抜 2 次試験

1990/2/11

1. 3次元ユークリッド空間 (xyz空間) のすべての点の集合を E とする．A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 は E の空でない部分集合で, 次の条件 (1), (2) をみたすものとする．

(1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = E$

(2) $i \neq j$ ならば $A_i \cap A_j = \phi$

このとき, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 のうち少なくとも 4 つと共有点をもつ平面が存在することを示せ．

2. n は 3 より大きい整数とし, a_0, a_1,..., a_n は $1 \leqq a_0 < a_1 < \cdots < a_n \leqq 2n-3$ を満たす整数とする．このとき $a_i + a_j = a_k + a_l = a_m$ となるような相異なる整数 i, j, k, l, m が存在することを示せ．

3. X は空でない正整数の集合で, 次の条件 (1), (2) をみたしている．

(1) $x \in X$ ならば $4x \in X$

(2) $x \in X$ ならば $[\sqrt{x}] \in X$

ただし, $[a]$ は a を超えない最大の整数を表わす．このとき, X は正整数全体の集合となることを示せ．

4. 2 より大きい整数 n を固定する．n 個の任意の正の数 a_1, a_2,..., a_n に対して不等式

$$K < \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_n + a_1} < G$$

が成り立つような定数 K の最大値と定数 G の最小値を求めよ．

5. 2 つの文字 A, B をそれぞれ n 個ずつ使って作られる長さ $2n$ の順列全体の集合を $P(n)$ とする．$P(n)$ に属する順列のうち, 条件

「$2n$ 以下の任意の整数 k に対して, 先頭から k 番目までに現れる A の個数が, 先頭から k 番目までに現れる B の個数以下である」

をみたす順列の集合を $Q(n)$ とする．

(ア) $Q(8)$ に属する順列の個数を求めよ．

(イ) $Q(n)$ に属する順列の個数を求めよ．

1991 年 第 1 回 日本数学オリンピック予選

1991/1/15 1:00-4:00

1. $A = 999\cdots99$ (81 桁すべて 9) とする. A^2 の各桁の数字の和を求めよ.

2. 方程式 $x^{199} + 10x - 5 = 0$ のすべての解 (199 個) の 199 乗の和を求めよ.

3. 3 角形 ABC の重心を G とする. $GA = 2\sqrt{3}$, $GB = 2\sqrt{2}$, $GC = 2$ のとき 3 角形 ABC の面積を求めよ.

4. 方程式

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} + \frac{1}{(x+1)y} = \frac{1}{1991}$$

を満たす正整数解 (x, y) は何組あるか.

5. 8 個の点 (x, y, z) (x, y, z は 0 または 6) を頂点とする立方体の中に $P(e, \pi, \sqrt{5})$ をとる. 立方体の各面に関する P の対称点 (6 個) を頂点とする多面体と元の立方体との共通部分の体積を求めよ.

6. 非負整数 n に対して, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(n) = f(\left[\frac{n}{2}\right]) + n - 2\left[\frac{n}{2}\right]$ によって $f(n)$ を定める. $0 \leqq n \leqq 1991$ における $f(n)$ の最大値を求めよ. ここに $[x]$ は, x を超えない最大整数を表わす.

7. 次の式を満たす正整数 n の存在が知られている.

$$133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 = n^5$$

この n の値を決定せよ.

8. $n = 2^i 3^j 5^k$ (i, j, k は非負整数) の形の整数のうち, $10^4 < n \leqq 3 \times 10^4$ を満たすものは何個あるか.

9. $0 \leqq r \leqq n \leqq 63$ を満たすすべての (n, r) の組のうち, 二項係数

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

が偶数となるものは何組みあるか. ただし ${}_0C_0 = 1$ とする.

10. 立方体の少なくとも 3 辺の中点を通る平面は何個あるか.

11. 2 つの文字 A, B を使って作られる長さ 15 の順列のうち次の条件を満たすものは何個あるか.

条件: 「連続する 2 文字の (順序) 対として AA が 5 回, AB, BA, BB が各 3 回現れる.」

例えば順列 $AABBAAAABAABBBB$ は, AA が 5 回, AB が 3 回, BA が 2 回, BB が 4 回現れるので, 上の条件を満たしていない.

12. 半径 1 の球に内接する正 12 面体がある. この正 12 面体のすべての頂点間の距離の 2 乗の和を求めよ. (正 12 面体は球の中心に関して対称である.)

1991 年 第 1 回 日本数学オリンピック本選

1991/2/11

1. 3 角形 ABC の辺 BC, CA, AB をそれぞれ $t:(1-t)$ に内分する点を P, Q, R とする．線分 AP, BQ, CR の長さを 3 辺にもつ 3 角形の面積を K，3 角形 ABC の面積を L とする．$\dfrac{K}{L}$ を求めよ (t を用いて表わせ).

2. $\mathbb{N}$ を正の整数全体の集合とする．$\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像 p, q を次のように定義する．
$p(1)=2$, $p(2)=3$, $p(3)=4$, $p(4)=1$, $n \geqq 5$ のときは $p(n)=n$.
$q(1)=3$, $q(2)=4$, $q(3)=2$, $q(4)=1$, $n \geqq 5$ のときは $q(n)=n$.
このとき次の問に答えよ．

(1) $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像 f をうまく作ると, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(f(n)) = p(n)+2$ が成り立つ．そのような f の一例を挙げよ．

(2) $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像 f をどのように定義しても, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(f(n)) = q(n)+2$ が成り立つようにするのは不可能であることを証明せよ．

3. A を 16 桁の正整数とする．A から連続する何桁かの数字をうまく取り出すと, それらの数字の積を平方数にできることを証明せよ．
例えば A のある桁が 4 ならば, この桁だけを取り出せばよい．

4. 縦 10, 横 14 の長方形を縦, 横 1 の小正方形 140 個に分け, 市松模様に塗る．各小正方形に, 次の条件を満たすように 0 または 1 を入れる．

条件: 各行, 各列には 1 が奇数個ある．

このとき黒く塗られた小正方形に入っている 1 の個数は偶数であることを証明せよ．

5. A を平面上の n 個 ($n \geqq 2$) の点の集合とする．このとき A のある 2 点を直径の両端とする円 (周も含む) で, A の点を少なくとも $\left[\dfrac{n}{3}\right]$ 個含むものが存在する．これを証明せよ．ただし, $[x]$ は x を超えない最大整数とする．

1992 年 第 2 回 日本数学オリンピック予選

1992/1/15 1:00-4:00

1. 数列 $\{a_n\}$ を, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = a_n + (a_{n+1})^2$ で定める. a_{1991} を 7 で割った余りを求めよ.

2. 方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ の解のひとつを ω とする. $\omega^{2k} + 1 + (\omega + 1)^{2k} = 0$ をみたす 100 以下の正整数 k はいくつあるか.

3. 座標平面上で方程式 $y^2 = x^3 + 2691x - 8019$ の定める曲線を E とする. この曲線上の 2 点 $(3, 9)$, $(4, 53)$ を結ぶ直線は, もうひとつの点で曲線 E と交わる. この点の x 座標を求めよ.

4. A を次の条件 1), 2) を満たす正整数の集合とする.

1) 2, 3, 5, 7, 11, 13 以外の素因数をもたない.
2) 2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2 のいずれでも割り切れない.

ただし, $1 \in A$ とする. A の要素 n の逆数 $\dfrac{1}{n}$ の総和

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}$$

を求めよ.

5. トランプのダイヤのカード 13 枚をよく切った後, 一枚ずつめくって机の上に左から右へ一列に並べてゆく. ただし, めくったカードが, そのときの右端にあるカードより小さいときは, めくったカードは捨てる. 並べ終わったとき, 7 が机の上の列に残っている確率を求めよ.

6. 正三角形 ABC において, 辺 BC, CA, AB を $3 : (n - 3)$ に内分する点をそれぞれ D, E, F とする (ただし, $n > 6$). 線分 AD, BE, CF の交点のつくる三角形の面積が, もとの正三角形の面積の $\dfrac{4}{49}$ のとき, n を求めよ.

7. x, y は正整数で, $x^4 + y^4$ を $x + y$ で割った商は 97 である. 余りを求めよ.

8. 不等式 $0 < m^{1/3} - n < 10^{-3}$ を満たす正整数 m, n のうち, n が最小になるものを選ぶ. n を求めよ.

9. 座標平面上の格子点の集合 A, B を次のように定める.

$$A = \{\ (x,\, y) \mid x,\, y \text{ は正整数で } 1 \leqq x \leqq 20,\ 1 \leqq y \leqq 20\ \}$$
$$B = \{\ (x,\, y) \mid x,\, y \text{ は正整数で } 2 \leqq x \leqq 19,\ 2 \leqq y \leqq 19\ \}$$

A の点は赤, 青のどちらかで塗られている. 赤い点は 219 個で, そのうち 180 個は B に含まれる. また, 四隅の点 (1, 1), (1, 20), (20, 1), (20, 20) はすべて青とする. ここで水平または垂直方向に隣合う 2 点を次のように赤, 青, 黒の線分で結ぶ:

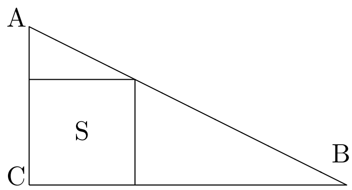
> 2 点とも赤のときは赤の線分, 2 点とも青のときは青の線分, 2 点が赤と青のときは黒の線分.

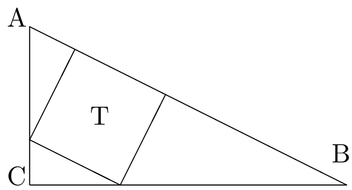
(長さ 1 の) 黒い線分が 237 個あるとき, (長さ 1 の) 青い線分の個数を求めよ.

10. 次の条件を満たす最小の正整数 n を求めよ.

> 「連続する n 個の正整数の中には, 各桁の数字の和が 11 の倍数となる数が必ず存在する」

11. 直角三角形 ABC に下図のように正方形 S と T を入れたとき, S の面積は 441, T の面積は 440 であった. このとき, $AC + CB$ を求めよ.





12. $A = \{\ 1,\, 2, \ldots,\, 10\ \}$ とする. A から A への写像 f で, 次の条件を満たすものはいくつあるか.

1) 任意の $x \in A$ に対して, $f^{30}(x) = x$.
2) 各整数 k, $1 \leqq k \leqq 29$ に対しては, $f^k(a) \neq a$ となる $a \in A$ が少なくとも 1 つ存在する.

ただし, $x \in A$ に対して, $f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) = f(f^1(x)), \ldots,$ $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)), \ldots$ とする.

1992 年 第 2 回 日本数学オリンピック本選

1992/2/11

1. x と y は互いに素な正整数で, $xy \neq 1$ とし, n は正の偶数とする. このとき, $x+y$ は x^n+y^n の約数でないことを証明せよ.

2. 面積 1 の $\triangle ABC$ の辺 AB, AC 上の点をそれぞれ D, E とし, 線分 BE, CD の交点を P とする. 四角形 $BCED$ の面積が $\triangle PBC$ の面積の 2 倍に等しいという条件を満たしながら点 D, E が辺 AB, AC 上を動くとき, $\triangle PDE$ の面積の最大値を求めよ.

3. n が 2 以上の整数のとき, 不等式

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{n-k} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} < 4$$

が成り立つことを証明せよ.

4. A は次の条件を満たす (m, n) 行列とする.

1) $m \leqq n$.
2) 各成分は 0 または 1.
3) f が $\{\ 1,\ldots, m\ \}$ から $\{\ 1,\ldots, n\ \}$ への 1 対 1 写像ならば, $(i,f(i))$ 成分が 0 であるような $1 \leqq i \leqq m$ が存在する.

このとき, $S \subseteq \{\ 1,\ldots, m\ \}$ と $T \subseteq \{\ 1,\ldots, n\ \}$ で次の条件を満たすものが存在することを示せ.

(1) $i \in S$, $j \in T$ ならば (i, j) 成分は 0.
(2) (S の要素の個数) + (T の要素の個数) $> n$.

ここで, 写像 f が 1 対 1 とは $1 \leqq i_1 \neq i_2 \leqq m$ ならば $f(i_1) \neq f(i_2)$ が成り立つことである.

5. n は 2 以上の整数とし, a_1, a_2, a_3, a_4 は次の 2 つの条件を満たす正整数とする:

i) 各 $i = 1, 2, 3, 4$ に対して, n と a_i は互いに素である.
ii) すべての $k = 1,\ldots, n-1$ について

$$(ka_1)_n + (ka_2)_n + (ka_3)_n + (ka_4)_n = 2n$$

が成り立つ.

このとき, $(a_1)_n$, $(a_2)_n$, $(a_3)_n$, $(a_4)_n$ を, 和が n になる 2 組の対に分けることができる, すなわち, $(a_1)_n + (a_j)_n = n$ を満たす j, $2 \leqq j \leqq 4$ が存在することを証明せよ.
ただし, 正整数 a に対して $(a)_n$ は, a を n で割った余りを表わす.

1993 年 第 3 回 日本数学オリンピック予選

1993/1/15 1:00-4:00

1. n^2 を 120 で割ると 1 余るような, 120 以下の正整数 n はいくつあるか.

2. 一列に 12 区画に区切られた駐車場があり, 乗用車は 1 区画, トラックは連続した 2 区画を必要とする. 6 台の乗用車と 2 台のトラックが駐車していて, さらにトラック 1 台が駐車できる空き区画がある. このように乗用車とトラックを駐車区画に駐車するパターンは何通りあるか. ただし各乗用車, 各トラックは区別しない.

3. 体積 1 の正 4 面体において, 各面と, 各辺の垂直二等分平面で囲まれる最も小さい部分の体積を求めよ.

4. 座標平面上の 3 点 (0, 0), (276, 153), $(a,\ b)$ を頂点とする三角形の面積が 2 以下になるように, 正整数 $a,\ b$ を選ぶ. このような点 $(a,\ b)$ のうち, 原点に最も近いものを求めよ.

5. 一辺の長さが 1 の正方形 $ABCD$ 内の任意の点を P, Q とするとき, $AP + BP + PQ + CQ + DQ$ の最小値を求めよ.

6. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ から A への写像 f で, 次の条件 (1),(2) をみたすものは, いくつあるか.

(1) 各 $j \in A$ に対して, $j = f(k)$ となる $k \in A$ が唯一つあり, しかも $k \neq j$ である.

(2) A から A への写像 gがあり, 各 $j \in A$ に対して, $f(j) = g(g(j))$ となる.

7. 一方が 3 ゲーム勝越したとき優勝者が決まるというルールで, A,B の 2 人が競技を行なった. ちょうど 9 ゲーム目で A が 6 勝 3 敗となり, 3 ゲーム勝越して優勝した. このとき考えられる 9 ゲームの勝敗パターンは何通りあるか.

8. 座標空間において, 空間図形 A を

$$A = \{\ (x, y, z)\ \mid\ 2xy \geqq z^2,\ x + y \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\ \}$$

により定める. また, 空間図形 B を

$$B = \{\ (u, v, w)\ \mid\ A \text{ のすべての点 } (x, y, z) \text{ に対して, } 0 \leqq ux+vy+wz \leqq 1\ \}$$

により定める. このとき, 空間図形 B の体積を求めよ. 座標空間において, 空間図形 A を

9. $S = \{1, 11, 31, 51, 71\}$ として, $\{a_n\}$ は次の条件 (1),(2),(3) をみたす数列とする.

(1) $a_1 \in S$,

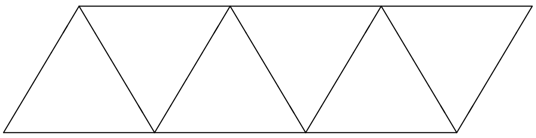
(2) $\dfrac{a_{n+1}-1}{a_n+1} \in S$,

(3) 10 以下のある正整数 n に対して $a_n = 1993$.

このようなすべての数列 $\{a_n\}$ について, a_4 の値を列挙せよ.

10. $\dfrac{1}{1+\sqrt[5]{64}-\sqrt[5]{4}}$ を有理化したときの分母の最小値を求めよ.
ここで有理化とは, 分母を正の整数で, 分子を整数と整数の累乗根いくつかの和, 差および積で表すことである.

11. 次の図形を一筆書きで書くとき, 書き方は何通りあるか.



12. 4 つの相異なる 3 桁の正整数があり, 百の位はすべて等しい. このうち 3 つの数は, 4 数の和の約数になっている. このような 4 つの数の組をすべて求めよ.

1993 年 第 3 回 日本数学オリンピック本選

1993/2/11

1. アルファベットの小文字 a, b, c,. . ., x, y, z をいくつか並べたものを単語と呼び, ある単語を 2 回以上繰り返し並べてできる単語を周期的な単語と呼ぶことにする. 例えば, kyonkyon は 8 文字の周期的な単語である.
2 文字以上の, 同じ文字数の 2 つの単語 W_1と W_2があって, 両者の最初の 1 文字は異なり, この 1 文字を取り除くと同じ単語になる. このとき, W_1と W_2のどちらかは周期的でないことを示せ.

2. 正整数 n に対して, n を割り切る最大の奇数を $d(n)$ で表し, 関数 $D(n)$ と $T(n)$ を次のように定める:

$$D(n) = d(1) + d(2) + \cdots + d(n)$$
$$T(n) = 1 + 2 + \cdots + n$$

このとき, $3D(n) = 2T(n)$ をみたす正整数 n が無限に存在することを証明せよ.

3. x 人の生徒が, y問からなる試験を受けた. どの生徒もちょうど半数の問題を正解し, 各問題について正解者数は等しく, どの 2 人の生徒についても 2 人とも正解した問題はちょうど 3 問であった. このとき, x, yの組をすべて求め, その x, yの組について実際にそのような場合が起りうることを示すため, その一例を, 生徒を縦, 問題を横に並べた○×表で示せ.
ただし, どの問題も正解 (○) か不正解 (×) しかないとする.

4. 球面 Sの 5 本の直径 $\ell_1,\ldots,\ell_5$が与えられていて, これらの直径はどの 3 本も同一平面上にないものとする. 直径 $\ell_1,\ldots,\ell_5$ の各々からどちらかの端点を選ぶ. 5 個の端点の選び方 32 通りのうち, 5 点を含む半球面が存在するものは何通りあるか.

5. 次の条件を満たす (n や $a_1, ..., a_n$によらない) 正の実数 Cが存在することを示せ.

条件: 任意の正整数 n と任意の実数 $a_1,\ldots,a_n$ に対して, 不等式

$$\max_{0 \leqq x \leqq 2} \prod_{j=1}^{n} |x - a_j| \leqq C^n \max_{0 \leqq x \leqq 1} \prod_{j=1}^{n} |x - a_j|$$

が成り立つ.

ここで, $\displaystyle\max_{\alpha \leqq x \leqq \beta} f(x)$ は区間$\alpha \leqq x \leqq \beta$における $f(x)$ の最大値を表し, $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} b_j$ は $b_1,\ldots, b_n$ の積 $b_1 \times \cdots \times b_n$ を表す.

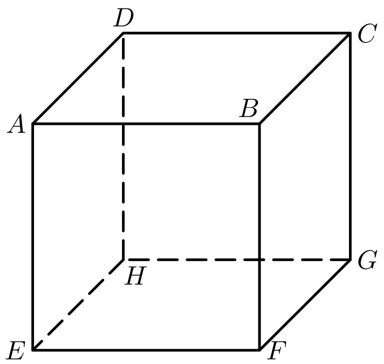
1994 年 第 4 回 日本数学オリンピック予選

1994/1/15 1:00-4:00

1. 座標平面上の点 $(x,\ y)$ で, $x,\ y$ がともに整数であるものを格子点という. 直線 $y = \dfrac{3}{7}x + \dfrac{3}{10}$ と格子点との距離の最小値を求めよ.

2. $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ とするとき, $\sqrt{2}$ をできるだけ次数の低い a の有理数係数多項式であらわせ.

3. 図のような立方体 $ABCD$-$EFGH$ について面 AFH と面 BDE の交わる角度をθ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$ とするとき $\cos\theta$ を求めよ.



4. 座標平面上の格子点を動く点 P がある. P の座標が $(a,\ b)$ で $a+b$ を 4 で割った余りが 0, 1, 2, 3 のとき, P は各々右, 上, 左, 下にちょうど 1 移動する. ある格子点 P_0 を出発してこの操作を 10 回繰り返したら点 (0, 10) に到着した. P_0 として可能な点の座標をすべて求めよ.

5. $\triangle ABC$ の辺 AB, AC 上の点を D, Eとし, BE, CD の交点を P とする. $\triangle ADE$, $\triangle BPD$, $\triangle CEP$の面積がそれぞれ 5, 8, 3 のとき, $\triangle ABC$の面積を求めよ.

6. 正 8 面体の 8 つの面に 1 から 8 までの数を 1 回ずつ書いてサイコロを作る. このようなサイコロは何種類できるか. ただし, 回転して番号の配置が同じになるものは同じサイコロとみなす.

7. 赤い椅子 5 個と白い椅子 5 個を円状に並べる並べ方は何通りあるか．ただし, 同色の椅子は区別せず, 回転して同じ順序になる配置は同じ並べ方とみなす.

8. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ とするとき, 次の条件 (1), (2) を満たす A から A への写像 f はいくつあるか.

(1) $i, j \in A, i \neq j$ ならば $f(i) \neq f(j)$.

(2) $i, j \in A, i + j = 7$ ならば $f(i) + f(j) = 7$.

9. $a > b$ である正の整数 a, b について $x_n = a^2n^2 + 2bn$ とおく．実数 x に対して, 記号 $\{x\}$ は x の小数部分 $(0 \leqq \{x\} < 1)$ とする．このとき,

$$\lim_{n\to\infty} \{\sqrt{x_n}\}$$

を求めよ．ただし, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ は n が無限に大きくなるとき a_n が近づく値である.

10. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ とするとき, 次の条件 (1), (2) を満たす A の部分集合 S は何個あるか.

(1) S の要素は 5 個.

(2) S から相異なるふたつの要素を取り出して和を作り, その 1 の位を考えると, 0 から 9 までの数がすべて現れる.

11. 次の条件を満たす x, y に関する 1 次以上の多項式 $f(x, y)$ で次数が最小のものをひとつ見つけよ.

$$\begin{cases} f(x,y) + f(y,x) = 0 \\ f(x,x+y) + f(y,x+y) = 0 \end{cases}$$

12. 縦横ともに 10km の正方形をした都市があり, 碁盤の目状の道路が 1km 間隔で東西に 11 本, 南北に 11 本走っている．東西に走る道路は直線 $y = m$ $(m = -5, -4, \ldots, 4, 5)$, 南北に走る道路は直線 $x = n$ $(n = -5, -4, \ldots, 4, 5)$ で記述される．ある会社のこの都市での 5 つの支店 A_k $(k = 1, 2, \ldots, 5)$ は, この碁盤の目状の道路沿いにあり, その座標 (x_k, y_k) はそれぞれ $(-5, 1.3)$, $(2, 4.5)$, $(4.4, 3)$, $(4, -1)$, $(-2.7, -2)$ で与えられる．支店から 1 名ずつの社員が, この道路沿いのどこかの地点で落ち合って会合したい．社員が移動に要する距離の総和 $S(x, y)$ が最小となるような道路沿いの地点 (x, y) を求めよ．ただし社員は道路上だけを移動するものとする.

1994 年 第 4 回 日本数学オリンピック本選

1994/2/11

1. 正の整数 n に対して, $\sqrt{n}$ にもっとも近い正の整数を a_n とする. $b_n = n+a_n$ とし, 正の整数全体から b_n $(n = 1, 2,\ldots)$ をすべて取り除く. 残りの正の整数を小さい順に並べ, この数列を $\{c_n\}$ とする. c_n を n を用いて表せ.

2. どの 3 つも同一直線上にない平面上の 5 点がある. この 5 点を互いに結んで得られる 10 本の線分のうち 9 本の長さの 2 乗は有理数であるという. このとき, 残りの 1 本の線分の長さの 2 乗も有理数であることを証明せよ.

3. 平面上に $\triangle A_0A_1A_2$ と点 $P_0, P_1,\ldots, P_6$ があり,
条件: 各 $i = 0, 1,\ldots, 5$ について, i を 3 で割った余りを k とするとき, P_i と P_{i+1} は A_k について点対称.
を満たすとする. このとき,
(1) $P_0 = P_6$ であることを示せ.
(2) さらに
条件: すべての $i = 0, 1,\ldots, 5$ について, 線分 P_iP_{i+1} は $\triangle A_0A_1A_2$ の内部と交わらない.
を満たす点 P_0 の可能な位置を図示せよ.

4. $\triangle ABC$ の辺 BC の中点を M とする. $\angle MAC = 15°$ であるときの $\angle B$ の最大値を求めよ.

5. Nを正の整数とする. 1 から Nまでの数字を一つずつ書いたくじがあり, N人でこのくじを引けば 1 位から N位までの順位をつけることができる. N人でこのくじ引きを 2 回行ない, 次のようにして景品を与える人を決めることにする.

ある人 A に対して, 1 回目と 2 回目の順位の双方がともに A より上位である人 B がいる場合には A には景品を与えない. そのような B がいない場合に限り A に景品を与える. 例えば, 1 回目で 1 位を引いた人は 2 回目が何位であっても景品をもらえる.

このとき, 景品をもらえる人数の期待値を求めよ. ただしくじはあらかじめよくかきまぜてあり, 2 回目のくじ引きの前にもう一度よくかきまぜるものとする. また「景品をもらえる人数の期待値」とは, それぞれの場合が起こる確率とその場合に景品をもらえる人数を掛けた値を, 全部の場合について足し合わせたものである.

1995 年 第 5 回 日本数学オリンピック予選

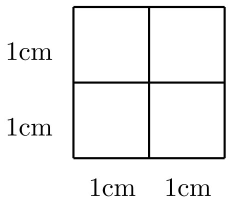
1995/1/15 1:00-4:00

1. 次の等式を満たす数 a を求めよ.

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$$

ただし, $\sqrt[3]{x}$ は 3 乗すれば x になるような実数を表すものとする.

2. 縦, 横, 斜め, どの方向でも秒速 1cm で動けるペンを備えた作図装置がある. ペンが紙についていれば動きに従って線が描かれ, ペンが紙から離れていれば何も描かれない. この装置で次の図形を描くのに最短で何秒かかるか. ただし, 図に現れる角はすべて直角とし, ペンを紙につけたり離したりする動作には時間はかからないものとする.



3. 鋭角三角形 ABC の外接円の中心を O とし, 線分 OA, BC の中点をそれぞれ M, N とする. $\angle B=4\angle OMN$, $\angle C=6\angle OMN$ とするとき $\angle OMN$ を求めよ.

4. 方程式 $x^2-3x+3=0$ の根を $x=\alpha$ とし、この α と正整数 n, 及び実数 k が $\alpha^{1995}=k\alpha^n$ を満たしているとする. このような n の最小値とそのときの k の値を求めよ.

5. 次のような規則 (1), (2) によって, 2 点 p, q の間を移動する粒子 x がある:

(1) x が q にあれば, 1 秒後に必ず p にある.

(2) x が p にあれば, 1 秒後にそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で p または q にある.

今 x が p にあるとする. 10 秒後に x が p にある確率を求めよ.

6. 4 組の夫婦が映画を見に行く. 横 1 列にこの 8 人が座るときの並び方は何通りあるか. ただし, 女性の隣にはその人の夫かあるいは女性だけが座ることができるものとする.

7. 平面上に 5 つの点 A, B, C, D, E があり, どの 3 点も一直線上にはないとする. 4 本の線分によってこれらの点を結ぶことを考える. どの点も少なくとも 1 つの線分の端点となっているような結び方は何通りあるか.

8. $2x^2y^2 + y^2 = 26x^2 + 1201$ を満たす正の整数の組 (x, y) をすべて求めよ.

9. m は正の整数とする. 長さ m の数列 $a_1, a_2, \ldots, a_m$は, 各項 a_i が 1 以上 4 以下の整数であり, 次の条件を満たすとする:

条件 $a_i = a_j$ かつ $a_{i+1} = a_{j+1}$ ならば $i = j$

このような数列 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ の長さ m の最大値を求めよ.

10. 座標空間において, 空間図形 S を

$$S = \{(x, y, z) | x^2 - 4y^2 + z^2 - 12xy = 20\}$$

によって定める. 平面 $2x + 3y + z = 3$ の上で, S とこの平面との交わりによって囲まれる部分の面積を求めよ.

11. 正十二面体のすべての面を 4 色を使って塗り分ける方法は何通りあるか. ただし辺を隔てて隣り合う面は異なる色で塗るものとし, 回転により一致する塗り方は同じものとみなす.

12. $f(x, y, z)$ は x, y, z に関する多項式で, x について 4 次式であり, 次の二つの条件を満たす. このような多項式 $f(x, y, z)$ を一つ求めよ.

$$\begin{cases} f(x, z^2, y) + f(x, y^2, z) = 0, \\ f(z^3, y, x) + f(x^3, y, z) = 0. \end{cases}$$

1995 年 第 5 回 日本数学オリンピック本選

1995/2/11

1. n は 2 以上の整数, r は正の整数で n の倍数ではないとする. g を n と r の最大公約数とするとき

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left\langle \frac{ri}{n}\right\rangle = \frac{1}{2}(n-g),$$

を証明せよ. ただし $\langle x\rangle$ は x の小数部分, すなわち x を越えない最大の整数を x から引いた値を表すものとする.

2. x の定数でない有理式 $f(x)$ と数 a は $\{f(x)\}^2 - a = f(x^2)$ を満たしている. このような a と $f(x)$ をすべて求めよ. ただし x の有理式とは, x の二つの多項式の比で表される式のことである.

3. 凸 5 角形 $ABCDE$ において, AC, AD と BE との交点をおのおの S, R とし, CA, CE と BD との交点をおのおの T, Pとする. また CE, AD の交点を Q とする. $\triangle ASR$, $\triangle BTS$, $\triangle CPT$, $\triangle DQP$, $\triangle ERQ$ の面積がすべて 1 のとき,

(1) 5 角形 $PQRST$ の面積はいくらか.

(2) 5 角形 $ABCDE$ の面積はいくらか.

4. 数列 $\{a_1, a_2, \dots\}$ は $a_{2n} = a_n$, $a_{2n+1} = (-1)^n$ で定められていて, 点 P は座標平面上を次のように移動する.

(1) 原点を P_0 とし, P は P_0 から x 軸の正の方向へ 1 だけ進む. この点を P_1 とする.

(2) P_i まで来た P は, a_i が 1 なら左へ 90° 方向を変えて距離 1 だけ進み, -1 なら右へ 90° 方向を変えて距離 1 だけ進む. この点を P_{i+1} とする. ただし, $i = 1, 2, \dots$ とする.

このとき P は同じ線分を 2 度以上通らないことを示せ.

5. k と n は整数で $1 \leqq k \leqq n$ とし, $a_1, a_2, \dots, a_k$ は次の式を満たす数とする.

$$\begin{aligned}
&a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n,\\
&a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 = n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_1^k + a_2^k + \cdots + a_k^k = n.
\end{aligned}$$

このとき

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k) = x^k + {}_nC_1 x^{k-1} + {}_nC_2 x^{k-2} + \cdots + {}_nC_k$$

を証明せよ. ただし, ${}_iC_j$ は 2 項係数, すなわち $\dfrac{i\cdot(i-1)\cdots(i-j+1)}{j\cdot(j-1)\cdots 2\cdot 1}$ を表すものとする.

1996 年 第 6 回 日本数学オリンピック予選

1996/1/15 1:00-4:00

1. xyz-空間内の 4 点 (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) を頂点とする四面体に内接する球の半径を求めよ.

2. 白石 5 個と黒石 10 個を横一列に並べる. どの白石の右隣にも必ず黒石が並んでいるような並べ方は全部で何通りあるか.

3. 正整数 n に対して $a_n = 10^{2n} - 10^n + 1$ とおくとき $2\sqrt{a_n}$ の整数部分を求めよ.

4. a が $x^3 - x - 1 = 0$ の解であるとき, a^2 を解とする整数係数の 3 次方程式をひとつ求めよ.

5. $A = \{\ 1, 2, 3, 4, 5, 6\ \}$ とする. 写像 $f\colon A \to A$ のうちで, f を 3 回合成した写像 $f \circ f \circ f$ が恒等写像になるような f は何個あるか.

6. $\mathbb{N}$ は正整数全体の集合とし $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ は以下の条件 (1), (2) , (3) をみたす関数とする.

   (1) $f(xy) = f(x) + f(y) - 1$ が任意の正整数 x, y について成り立つ.
   (2) $f(x) = 1$ をみたす x は有限個しか存在しない.
   (3) $f(30) = 4$ である.

   このとき $f(14400)$ の値を求めよ.

7. 次の方程式の正の整数解 (a, b) をすべて求めよ.

   $$LCM(a,b) + GCD(a,b) + a + b = ab$$

   ただし $a \geqq b$ とする. また $LCM(a,b)$, $GCD(a,b)$ は各々 a と b の最小公倍数, 最大公約数をあらわす.

8. 0 以上の整数に対して定義された関数 f は, 次をみたすとする.

   $$f(0) = 0$$

   $$f(x) = f(\left[\frac{x}{10}\right]) + \left[\log_{10} \frac{10}{x - 10\left[\frac{x-1}{10}\right]}\right]$$

   $0 \leqq x \leqq 1996$ のとき $f(x)$ が最大になるのは x がいくつのときか.

ただし, 実数 x に対し $[x]$ は x を超えない最大の整数をあらわす.

9. xyz-空間内の 2 点 $(-2,\ 0,\ 1)$ と $(2,\ 0,\ 1)$ を結ぶ長さ 4 の線分を T, 原点を中心とし xy平面上にある半径 2 の円板を B とする. T と B を含む最小の凸集合を, 平面 $z=\dfrac{1}{2}$ で切った切り口の面積を求めよ.

   ただし, xyz-空間内の集合 A が凸集合であるとは, A に属する任意の 2 点 P, Q に対し, 線分 PQ が A に含まれることをいう.

10. n を正整数, $S=\{\ 1,\ 2,\ldots,\ n\ \}$ とする. S の (空でもよい) 部分集合 A, B, C, D で $A\cup B\cup C\cup D=S$ かつ $A\cap B\cap C=\phi$ をみたす集合の組 (A, B, C, D) は何通りあるか.

11. 1996 個の電球があり, 順に 1, 2, …, 1996 と番号がついている. 最初, これらの電球はすべて OFF である. 正整数 k に対し, 操作 P_k は, 番号が kの倍数であるすべての電球の ON/OFF を反転させる操作とする. この操作 P_k を, $k=1,\ 2,\ldots,\ 1996$ について 1 回ずつ行ったとき, 最終的に ON になっている電球の個数を求めよ.

12. n を 2 以上の整数とし, 座標平面上の $4n$ 個の点 $(i,\ j)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ の集合を L_n とする. L_n の点 $(1,\ 1)$ から出発して, 以下の 3 つの条件をすべてみたしながら $(1,\ 1)$ に戻る経路の数を a_n とする.

    条件 1 : 最初に $(2,1)$ へ行く.
    条件 2 : $(1,1)$ 以外の L_n のすべての点をちょうど 1 回ずつ通る.
    条件 3 : 進む方向は x 軸または y軸に平行.

    例えば $a_2=1$, $a_3=2$ である. a_{12} の値を求めよ.

1996 年 第 6 回 日本数学オリンピック本選

1996/2/11

1. 2 つの三角形 $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ が与えられたとき, 共通部分の面積が正である場合に「$\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ は交わる」, 共通部分の面積が 0 である場合に「交わらない」と呼ぶことにしよう.

平面が, 互いに交わらない三角形の集合 T で覆いつくされていて, しかも, T に属する相異なるふたつの三角形が共通部分を持つのはふたつの三角形が共通の 1 辺と 2 頂点を共有する場合か, ふたつの三角形の共通の頂点ただ一点を共有する場合に限ると仮定する. 新しい三角形 $\triangle ABC$ を, T に属する三角形群の任意の 3 つの頂点 A, B, C を結んで得られるものとし, $\triangle ABC$ の内角 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ の最小値を θ とする. $\triangle ABC$ の外接円の内部に T のどの三角形の頂点も含まれないなら, T に属し, $\triangle ABC$ と交わる三角形の中に, その最小内角が θ を越えないものがあることを証明せよ.

2. $\mathrm{GCD}(m,n) = 1$ なる自然数 m,n に対して $\mathrm{GCD}(5^m + 7^m, 5^n + 7^n)$ を求めよ. ただし $\mathrm{GCD}(m,n)$ は m と n の最大公約数をあらわす.

3. x は整数でない実数で $x > 1$ であるとする. $a_n = [x^{n+1}] - x[x^n]$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ は周期的でないことを示せ. すなわち, 任意の整数 n に対し $a_{p+n} = a_n$ が成り立つような正整数 p は存在しないことを示せ.
ただし $[x]$ は x を超えない最大の整数をあらわす.

4. 空間内にある正四面体 Γ の 6 本の辺が水平面となす角の中で最大の角を θ とする. Γ を空間内で回転させたときの θ の最小値を求めよ.

5. q は $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} < q < 2$ をみたす実数とする. 自然数 n を 2 進法で

$$n = 2^k + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 2 + a_0$$

(ただし $a_i = 0$ または 1) とあらわす. これに対し p_n を

$$p_n = q^k + a_{k-1} q^{k-1} + \cdots + a_1 q + a_0$$

と定める. このとき, 次の条件を満たす自然数 k が無数に存在することを証明せよ.

(条件): $p_{2k} < p_l < p_{2k+1}$ となる自然数 l は存在しない.

1997 年 第 7 回 日本数学オリンピック予選

1997/1/15 1:00-4:00

1. 1997! を十進法で展開したとき, 末尾に何個の 0 が並ぶか?

2. 平面上に異なる 30 本の線分を描くとき, これらの線分の端点として得られる点の中で, 異なる点は最小限何個できるか.

3. xyz-空間のある平面上に多角形がある．この多角形を xy-平面に正射影したものの面積が 13, yz-平面に正射影したものの面積が 6, zx-平面に正射影したものの面積が 18 のとき, この多角形の面積を求めよ.

4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とする．写像 $f\colon A \to A$ で以下の条件をみたすものは何個あるか.
(条件) $f(f(f(x))) = x$ が任意の $x \in A$ にたいして成り立つ.

5. 三角形 ABC において $BC = 6$, $CA = 5$, $AB = 4$ である．辺 AB, AC 上にそれぞれ点 D, E を, 三角形 ADE の外接円が BC に接するようにとる．この条件をみたしながら D, E が AB, AC 上を動くとき, 線分 DE の長さの最小値を求めよ.

6. $a^3 - a - 1 = 0$ のとき, $a + \sqrt{2}$ をひとつの解にもつ整数係数多項式で, その最高次の係数が 1 であるものをひとつ求めよ.

7. 十進法で 10 桁の整数 n は, 最上位の数が n の中に現れる 0 の個数に等しく, 次の位の数が n の中に現れる 1 の個数に等しく, 以下同様に, 上から $k+1$ 桁目の数が n の中に現れる k の個数に等しいという $(0 \leqq k \leqq 9)$. このような n をすべて求めよ.

8. $f(x)$ は 5 次多項式で, 5 次方程式 $f(x) + 1 = 0$ は $x = -1$ を 3 重根にもち, $f(x) - 1 = 0$ は $x = 1$ を 3 重根にもつ. $f(x)$ を求めよ.

9. 関数 $f(x)$ は任意の整数 x に対し定義され, 整数の値をとる関数で, 次の (1)〜(4) を満たすものとする.

(1) $0 \leqq f(x) \leqq 1996$　　(x は任意整数)
(2) $f(x + 1997) = f(x)$　　(x は任意整数)
(3) $f(xy) \equiv f(x)f(y) \bmod 1997$　　(x, y は任意整数)

(4) $f(2) = 999$
このような $f(x)$ はただひとつだけ存在することがわかっているが, このことを利用して, $f(x) \equiv 1000 \bmod 1997$ を満たす最小の正の整数 x を求めよ.
ただし $a \equiv b \bmod n$ とは, a, b を n で割った余りが等しいことをあらわす.

10. 1 から n までの整数が並んでいるとき, 2 から消し初めてひとつ毎に数字を消してゆき, 端についたら折り返して, 逆向きに残っている数字をひとつ毎に消す. そして端についたら折り返し, 以下同様なことを繰り返す. そして最後に 1 つだけ残る数が何であるかを考えよう. 例えば $n = 5$ なら 2, 4, 3, 5 と順に数字が消え最後に 1 が残る. また, 例えば $n = 7$ なら消える数字は順に 2, 4, 6, 5, 1, 7 で最後に残るのは 3 である.
さて $n = 1997$ のとき最後に残る数は何か.

11. 四面体 $ABCD$ の対辺どうしの長さが等しく, $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $AD = BC = c$ のとき, この四面体の外接球の直径はいくらか.

12. 以下の性質をみたす最大の整数 n を求めよ.
(性質) $1 \leqq i, j \leqq 19$ をみたす碁盤の各格子点 (i, j) に, 1, 2,..., n の数字をどのように書いても, これらの格子点を頂点とする面積が正の平行四辺形 $ABCD$ で, A と C に書かれた数の和が, B と D の数の和に等しく, かつ, 2 本の対角線の交点が天元 (10, 10) に一致するようなものが存在する (ただし, 1,..., n の数字は 2 回以上何回使ってもよいし, 1 回も使わなくてもよい).

1997 年 第 7 回 日本数学オリンピック本選

1997 年 2 月 11 日 13:00 – 17:00 各問 8 点

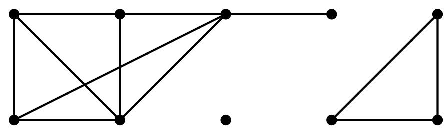
1. 直径 5 の円のなかに, 10 個の点をどのようにとっても, 必ず互いの距離が 2 より小さい 2 個の点があることを証明せよ.

2. a, b, c は正の実数とする. このとき, 不等式

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geqq \frac{3}{5}$$

が成り立つことを証明せよ. また等号が成立するのはいつか.

3. 何個かの頂点 $P_1, \ldots, P_n$ と, それらの 2 点を結ぶ辺 (線分) 何本かの集まりをグラフという. 例えば下図は 10 個の頂点と 12 本の辺からなる連結成分が 3 個のグラフである.



さて, G は頂点の数が 9 個のグラフで, 次の条件を満たすとする.

　条件: G の頂点からどの 5 点を選んでも, 両端点がそれら 5 点の集合に含まれるような辺が 2 本以上存在する.

このような G は最低何本の辺を有するか.

4. A, B, C, D は空間内の 4 点で, 同一平面上になく, また, その中のどの 3 点も一直線上にないとする. 線分の長さの和 $AX+BX+CX+DX$ が A, B, C, D と異なる点 $X=X_0$ で最小となるとすれば, $\angle AX_0B=\angle CX_0D$ が成り立つことを証明せよ.

5. 円周を 2^n等分した点にそれぞれ A または B の文字を割り当てる. このとき、どの点から時計回りに連続した n 文字を選んでも、それぞれの文字列が互いに異なっているような割り当て方が存在することを証明せよ. ここで n は任意の正の整数とする.

1998 年 第 8 回 日本数学オリンピック予選

1998/1/15 1:00-4:00

1. A, B の 2 人は, 運動場のトラックを 10 周した. A, B は各々一定のスピードでトラックを同じ方向に回った. A は 3 分でトラックを 1 周したが, B はそれより遅かった. A, B が同時にスタートし, 次に 2 人が並ぶまで 8 分かかった. B は何分でトラックを 1 周したか.

2. 1998 以下の正の整数 n で $n^{1998}-1$ が 10 の整数倍になるものは何個あるか.

3. 辺 AB と CD が平行な等脚台形 $ABCD$ があり, $AB=BC=DA=1$, $CD=1+\sqrt{2}$ である. 辺 AD 上に動点 E を以下の条件を満たすようにとる.

条件: E を通るある直線を折り目としてこの等脚台形を折り曲げたとき, 頂点 A が辺 DC 上にくるようにできる.

DE の長さの最大値を求めよ.

4. 黒石と白石が十分沢山あり, これらの中から合計 10 個の石を取り出して 1 列に並べる. ただし, 黒石は 2 個以上連続して並べてはいけない. このような, 石の並べ方は何通りあるか. ただし, 同色の石は区別しないものとする.

5. xy-平面上の 4 点 $A:(3,\,0)$, $B:(3,\,2)$, $C:(0,\,2)$, $D:(0,\,0)$ を頂点とする長方形 $ABCD$ を考える. uv-平面上の点 $(u,\,v)$ で, 長方形 $ABCD$ 内の任意の点 $(x,\,y)$ にたいし $0 \leqq ux+vy \leqq 1$ を満たす $(u,\,v)$ 全体の集合を S とする. S の面積を求めよ.

6. 8 本のヒモが平行に上下に並んでいる. 無作為に, ヒモの上端を 2 本づつ 4 組結び, 下端を 2 本づつ 4 組結ぶ. このとき, 8 本のヒモ全部がつながって 1 本の大きな輪になる確率を求めよ.

7. $a_n = 1998 \times 2^{n-1}$ $(1 \leqq n \leqq 100)$ とする. $a_1, \ldots, a_{100}$ のうちで, 十進法で表わすとき最高位の数字が 1 であるものは何個あるか.

8. n は正の整数で, 十進法で表わすと, 例えば 222 や 555555 のように各桁の数がすべて等しい数であり, さらに 1998 の倍数であるという. このような最小の n を求めよ.

9. 三角形 ABC の $\angle B$, $\angle C$ の二等分線がそれぞれ AC, AB と交わる点を各々 D, E とするとき, $\angle ABC : \angle BDE : \angle CED = 2 : 3 : 4$ であるという. $\angle A$ は何度か.

10. x, y, z が正の実数を動くとき $\dfrac{x^3y^2z}{x^6+y^6+z^6}$ の最大値を求めよ.

11. a_1, a_2,..., a_n は正の整数とする. $m=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ 枚のカードがあり, 各々のカードには 1 から n までのどれかの数が書いてある. 数 i が書かれたカードは a_i 枚ある. さて, カードをよくきって裏側にし n 個の山に分けカードを積み, 山を左から右にならべる. ただし, 左から i 番目の山には a_i 枚のカードを積み重ねる. この状態から開始して以下のようなゲーム (1 人遊び) をする.

1) 一番左の山の一番上のカードを開く.
2) 開かれたカードの数が k だったら, 左から k 番目の山の一番上のカードを開く. その前に開いたカードは捨てる.
3) 以下, 可能な限り 2) を繰り返す. カードを開けなくなったときゲームは終了する.

このゲームが終了した時点で, すべてのカードが開かれている確率を, m, a_1,..., a_n を用いたできるだけ簡単な式 (分母, 分子の次数ができるだけ小さい分数式) で表わせ.

12. $a_n = n^3-5n^2+6n$, $b_n = n^2+5$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ とし, a_n と b_n の最大公約数を d_n とする. ただし $a_n=0$ のときは $d_n=b_n$ とする. また d_1, d_2, d_3,... の最大値を d とする. $d_n=d$ を満たす最小の正の整数 n を求めよ.

1998 年 第 8 回 日本数学オリンピック本選

1998 年 2 月 11 日 13:00 – 17:00 各問 8 点

1. p は 3 以上の素数とする. 円周上に p 個の点を置き, ある点に 1 を記入し, そこから時計回りに 1 つすすんだ点に 2 を記入する. さらに, 2 を書いた点から時計回りに 2 つすすんだ点に 3 を記入し, 以下同様なことを繰返し, 最後に $p-1$ を書いた点から $p-1$ 個すすんだ点に p を記入する. 2 つ以上の数が記入された点があってもよく, 1 つも数が記入されない点があってもよい. さて, 数の記入された点は全部で何個か.

2. ある国には 1998 個の空港があり, 以下のように航空機の路線が定められている.

任意の 3 空港 A, B, C について, AB 間, BC 間, CA 間のうち少なくとも 1 つの区間には直行便の路線がない.

このとき, その国の航空機の直行便の路線の最大数を求めよ.

3. 平面上に相異なる点 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ を頂点とする閉じた折れ線 $P_1P_2\cdots P_nP_1$ がある. この折れ線は, 自分自身と交わってもよいが, 交点は頂点以外の場所であり, かつ 3 本以上の線分が 1 点で交わることはないものとする. この折れ線を $P_1, P_2, \ldots, P_n, P_1$ の順に回るとき, 頂点 P_i で左に折れ曲がるとき, P_i の外角は $180^\circ - \angle P_{i-1}P_iP_{i+1}$ であると, また頂点 P_i で右に折れ曲がるとき, P_i の外角は $-(180^\circ - \angle P_{i-1}P_iP_{i+1})$ (ただしこのとき $-(180^\circ - \angle P_{i-1}P_iP_{i+1}) < 0$) であるとする. ここで $P_0 = P_n$, $P_{n+1} = P_1$ と考える.
この閉じた折れ線の外角の和が 720° の整数倍に等しいならば, 交点の個数は奇数であることを示せ.

4. $(1, 2, \ldots, n)$ を並べかえたもの $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ を n 次の置換と呼ぶ. また, n 本の縦線と何本かの横線からなるアミダくじで, 縦棒の上端と下端に左から順に $1, 2, \ldots, n$ と番号を振ったとき, 各 $1 \leqq k \leqq n$ に対し, 上端の k 番のところからアミダくじをたどっていくと下端の a_k 番に着くとき, このアミダくじは置換 $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ を表現するという. ただし, アミダくじの 1 本の横棒は, 隣り合う 2 本の縦棒の間を結ぶ水平の線分で, 横棒どうしが直接つながることはないものとする. n 次の置換 A に対し, A を表現するアミダくじの中で, 横棒の本数が最小なものを最簡アミダくじと呼び, その横棒の本数を $f(A)$ とおく. また 0 以上の整数 m に対し, $f(A) = m$ を満たす n 次の

置換 A の個数を $c_{n,m}$ としよう. そして,

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} c_{n,m} t^m \\ Q_n(t) &= 1(1+t)(1+t+t^2) \\ &\qquad \cdots (1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}) \end{aligned}$$

とする. $P_n(t) = Q_n(t)$ であることを証明せよ.

5. 時計の文字盤の数字 1 から 12 の上に, 表が白, 裏が黒のオセロの駒を 1 つづつ置く. 黒の駒が 1 つ以上あるとき, 次の操作を考える.

$(*)$:「黒の駒を 1 つ指定し, それに隣り合った 2 つの駒の白黒を逆にする.」

上の操作を 0 回, または 1 回以上続けることにより, 12 の文字のところだけが黒で, 他の 11 ケ所はすべて白にできるのは, 最初の駒の配置がどのようなときか. また, それは何通りあるか.

1999 年日本数学オリンピック予選

1999 年 1 月 15 日 実施

1. 10 円玉, 50 円玉, 100 円玉がそれぞれ十分多くある. これらのうちから何個か (0 個のものがあってもよい) 取り出して, その合計金額を 1000 円とする方法は何通りあるか.

2. (X, Y) を直線 $-3x + 5y = 7$ 上の格子点とするとき, $|X + Y|$ の最小値を求めよ. ただし格子点とは x 座標, y座標がともに整数である点のことをいう.

3. $1991 \leqq n \leqq 1999$ である自然数 n で, 次の性質を満たすものをすべて求めよ.

「n の 3 乗 n^3 を一の位から 3 桁ずつに区切ってできる数の和は n に等しい」

(例) $n = 1990$ としてみると,

$$1990^3 = 7,880,599,000.$$

よって 和 $= 7 + 880 + 599 + 000 = 1486 \neq 1990$ で上の性質を満たさない.

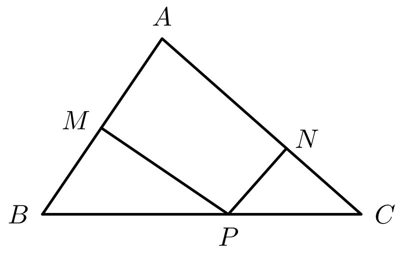
4. 一辺の長さが 1 の立方体 $ABCD$-$EFGH$ を, 対角線 AG を含む平面で切断するとき, 切り口の面積の最小値を求めよ.

5. 次の規則に従って得点するゲームを考える.

「サイコロを 1 回振って, 1, 2, 3, のいずれかが出れば 2 点, 4, 5 のいずれかが出れば 1 点, 6 の目が出れば 0 点を得る.」

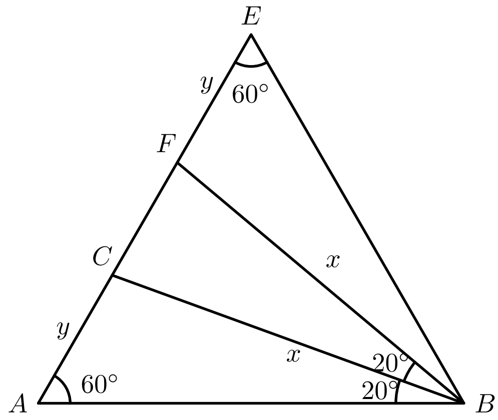
サイコロを n 回振って, 得点の合計が kになる確率を $p_n(k)$ と表す. $\dfrac{p_n(n+k)}{p_n(n-k)}$ $(0 \leqq k \leqq n)$ をできるだけ簡単な式で表せ.

6. 3 辺の長さがそれぞれ $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 5$ の三角形 ABC の辺 BC 上に点 P をとり, P より 2 辺 AB, AC へ下ろした垂線の足をそれぞれ M, N とする. M, N 間の距離を最小にするような P の位置を P_0 としたとき BP_0 の長さを求めよ.



7. $\dfrac{1999!}{10^n}$ が整数となるような自然数 n の最大値, 及びこのときの $\dfrac{1999!}{10^n}$ の一の位の数字を答えよ.

8. 三角形 ABC で, $\angle A = 60°$, $\angle B = 20°$, $AB = 1$ のとき, $\dfrac{1}{AC} - BC$ の値を求めよ.



9. $n = \dfrac{abc + abd + acd + bcd - 1}{abcd}$ が整数となるような自然数 $a \geqq b \geqq c \geqq d > 1$ の組 (a, b, c, d) をすべて求め, その a の値をすべて答えよ.

10. 一辺の長さ 1 の正二十面体の最も長い対角線の長さを求めよ.

11. n を自然数とし, $i = \sqrt{-1}$, $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とする. m を自然数で

$1 \leqq m \leqq n$ とする. このとき, 次の和を計算して 1 つの分数式で表せ.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^{mk}}{x - \alpha^k}$$

12. n ($\geqq 3$) 個の空港の間に以下の (1), (2), (3) の条件をみたすように直行便を開設するとき, 開設の仕方は何通りあるか.

(1) どの相異なる二つの空港 A, B の間にも A より B への, あるいは B より A への直行便のどちらか一方を必ず開設する.

(2) A より B への直行便と, B より A への直行便が両方開設されるような二つの空港 A, B は存在しない.

(3) ある空港 C より出発し, 直行便を乗り継いで, 又 C に戻って来られる空港 C が少なくとも一つ存在する.

1999 年 第 9 回 日本数学オリンピック本選

1999 年 2 月 11 日 13:00 – 17:00 各問 8 点

1. 1999×1999 の正方形の桝目が在り, 碁石が以下の規則を満たすようにおいてある. 碁石の数は最小でいくつ必要か.

> 任意の碁石の置いていない桝目について, その行と列に置いてある碁石の数は 1999 個以上である.

2. $f(x) = x^3 + 17$ とする. 2 以上の任意の自然数 n に対して, $f(x)$ が 3^n で割り切れ, 3^{n+1} で割り切れないような自然数 x がそれぞれ存在することを示せ.

3. 重さが自然数のおもりが $2n+1$ 個ある. どのおもりに対しても, それを除いた $2n$ 個をうまく分けて天秤に乗せれば釣り合うという. このとき常に全てのおもりの重さが等しい事を示せ.

4. $f(x) = (x^2+1^2)(x^2+2^2)(x^2+3^2)\cdots(x^2+n^2)+1$ を二つの整数係数多項式の積として表すと必ずどちらか一方は 1 か -1 である事を示せ.

5. 全ての辺の長さが 1 である凸六角形 $ABCDEF$ に対し,

$$\max\{|AD|, |BE|, |CF|\}, \quad \min\{|AD|, |BE|, |CF|\}$$

の取り得る範囲を求めよ.