

IMO に派遣する選手を選抜するのに、多くの国では、何段階かの試験でコンテストを 20~100 人程度に絞り、彼らを春に行われる強化合宿に招待し、そこで行われる何回かの試験の成績によって 6 人を選抜します。この試験を、通常「選手選抜試験 (Selection Test)」と呼びます。日本では、以前は、春の合宿の試験の成績以外に、本選・予選などの成績も考慮して選手を選抜していたので、単に「春の合宿テスト」などと呼んできました。しかし、現在では、合宿期間中の試験だけで選手を選抜するので、「春の合宿テスト」は「選手選抜試験」と呼ぶほうが適当だと思います。

なお、中国や台湾のように、春の合宿で行われる試験を「数学オリンピック」と呼んでいる国もあります。

さて、以下に、日本の「春の合宿テスト」を照会します。ただし、その中に、日本自身で作成した問題は多くなく、問題のかなり部分は IMO Short List や他国の過去問を流用して構成されています。IMO に出題される問題は、事前に参加国が提出した問題から、Problem Selection Comitee が適切な問題を何問か選んで、それを団長会議に提示し、その中から 6 問を選んで最終的な IMO の問題を作成します。この団長会議に提示される問題を IMO Short List と呼んでいます。IMO に出題されなかった Short List の問題は、各国が選抜試験やトレーニング問題に使えるように、1 年間公開禁止になっています。過去の IMO Short List の問題と解答は、Springer から出版されている「The IMO Compendium」という本に掲載されていますので、その本を探してもらくと、以下の問題の解答のかなりの部分が見つかると思います。また、2000 年までの問題の解答は、「数学オリンピック事典」朝倉書店、に収録されています。

疑義な点などに関しては、安藤までご連絡下さい。

申し訳ありませんが、2001 年の問 10~問 12 と、2003 年の問題は行方不明になってしまっています。また、2008 年以降は公開を中止しているようです。

1990年 春の合宿テスト

1. いくつある整数 $n > 1$ に対しても, 方程式

$$\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} + 1 = 0$$

は, 有理数の解を持たないことを示せ.

2. テニスのシングルスで 20 名で 14 試合行なうことにした. ただし, 各人少なくとも 1 試合に出場するものとする. このとき, 14 試合のうちある 6 試合における対戦者は, 相異なる 12 名でなければならないことを示せ.

3. u, v は

$$(u + u^2 + u^3 + \cdots + u^8) + 10u^9 = (v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{10}) + 10v^{11} = 8$$

を満たす実数とする. u, v の大小を決定し, 証明を与えよ.

1991年 春の合宿テスト

1. n ヶ国のおのおのから3人ずつの代表が選ばれている. m 個の委員会 $A(1), A(2), \dots, A(m)$ が次の(1)~(4)をすべてみたすとき, この m 個の委員会の全体を一つのサイクルと呼ぶことにする.

- (1) 各委員会は各国からの代表1人ずつの合計 n 人で構成されている.
- (2) どの2つの委員会も, 構成する委員たちが全く同一ということはない.
- (3) $i = 1, 2, \dots, m$ のおのおのに対し, 委員会 $A(i)$ と委員会 $A(i+1)$ には同一人物が所属しない. ここで $A(m+1)$ は $A(1)$ を意味するものとする.
- (4) $1 < |i-j| < m-1$ なる i, j に対し, 委員会 $A(i)$ と委員会 $A(j)$ には少なくとも一人が共通して所属している.

11ヶ国からなる1990個の委員会のサイクルを作ることができるか.

2. 正の整数 k に対し, k を十進法で表わしたときの各位の数の和を二乗したものを $f_1(k)$ で表わし, さらに $f_{n+1}(k) = f_1(f_n(k))$ と定める. このとき $f_{1991}(2^{1991})$ の値を求めよ.

3. 一つの平面によって直円錐が2つの部分に分けられている. この平面は直円錐の底面の円周に接しており, さらに直円錐の頂点から底面へおろした垂線の中点を通っている. このとき, 平面によって分けられた2つの部分のうち体積の小さな方が, 直円錐全体に対して占める体積の比を求めよ.

4. a, b を $1 \leq a \leq b$ をみたす自然数とし, $M = \left[\frac{a+b}{2} \right]$ とする (ただし, 実数 x に対し, $[x]$ は, x を超えない最大整数とする). また $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ (ここで \mathbb{Z} は整数全体を表わす) なる関数 f を

$$f(n) = \begin{cases} n+a & (n < M \text{ のとき}) \\ n-b & (n \geq M \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定め, $f^1(n) = f(n)$, $f^{i+1}(n) = f(f^i(n))$ ($n = 1, 2, \dots$) とする. このとき $f^k(0) = 0$ をみたす最小の自然数 k を求めよ.

1992年 春の合宿テスト

1992/3/28 問 1. 次の条件をみたすような n 桁の数が, いずれも素数であるような n を決定せよ.
条件: ある桁の数字が 7 で, 残りの $(n-1)$ 個の桁の数字がすべて 1 である.

1992/3/28 問 2. 空間に 8 個の点を与えられている. どの 4 個も同一平面上にはない. これらの点を結ぶ線分のうち 17 本を青に塗, 残りは赤に塗る. このとき, すくなくとも 4 つの「青い三角形」ができることを証明せよ.

さらに上の命題で「4 つ」を「5 つ」に換えた命題は成り立たないことを示せ (反例を挙げよ).
ここに「青い三角形」とはその 3 辺がすべて青に塗られた三角形のことである.

1992/3/29 問 3. 自然数 $n \geq 2$ を固定する. $x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$, かつ $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ のとき

$\sum_{i < j} x_i x_j (x_i + x_j)$ の最大値を求めよ.

1992/3/29 問 4. $P(x)$ は有理数を係数とする 3 次の多項式である. r_1, r_2, r_3, \dots は $r_n = P(r_{n+1})$ ($n \geq 1$) をみたす有理数の数列である. このときある $k \geq 1$ が存在して, すべての $n \geq 1$ に対して $r_{n+k} = r_k$ が成り立つことを示せ.

1992/3/31 問 5. S は平面上の n 個の点からなる集合である. S のどの 3 点も同一直線上にない. このとき $(2n-5)$ 個の点からなる集合 P で, 次の条件をみたすものが存在することを証明せよ.

条件: S のどの 3 点を頂点とする三角形も, その内部に P のある点を含む.

1992/3/31 問 6. 次の方程式 $4^x + 4^y + 4^z = u^2$ をみたす整数解 (x, y, z, u) をすべて求めよ.

1992/3/31 問 7. 次のように定まる数列 $\{a_n\}$ がある. $a_0 = 0, a_n = P(a_{n-1})$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). ここに $P(x)$ は自然数を係数にもつ多項式である.

自然数 k と l の最大公約数が d のとき, a_k と a_l の最大公約数は a_d であることを示せ.

1993年 春の合宿テスト

1993/3/27 問 1. n を正整数とするとき,

$$1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \leq n^n$$

が成り立つことを証明せよ. (上式の左辺は 1 から $(2n-1)$ までの奇数の積である.)

1993/3/27 問 2. 正整数 n を 2 進法であらわしたとき, その中ででてくる 1 の個数を $f(n)$ と書くことにする. 例えば十進法の 100 は 2 進法で $1100100_{(2)}$ であるので $f(100) = 3$ である. (十進数は通常の記数法で, 2 進数は添え字に '(2)' をつけて区別しておく.) このとき, 以下の問に答えよ.

(a) 不等式 $f(n^2) \leq \frac{1}{2}f(n)(f(n)+1)$ が成り立つことを証明せよ.

(b) $f(n^2) = \frac{1}{2}f(n)(f(n)+1)$ が成立するような n が無限個存在することを示せ.

(c) 正整数の無限数列 a_1, a_2, \dots で

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{f(a_i^2)}{f(a_i)} = 0$$

をみたすようなものが存在することを示せ.

1993/3/29 問 3. 実数を係数とする多項式 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ で任意の実数 x に対し $f(x^2) = (f(x))^2$ を満たすようなものを全て求めよ.

1993/3/29 問 4. $n^m = 4m^n$ を満たすような正整数 m, n の組を全て求めよ.

1993/3/29 問 5. 平面上に相異なる n 個の点がある. ($n \geq 3$ でどの 3 点も同一直線上にないとする.) この n 点に以下の性質 (*) を満たすようにうまく番号を付けられることを証明せよ.

(*) n 点に適当に 1 から n までの番号を付け P_1, \dots, P_n とし, さらに便宜上 $P_0 = P_n$ としておく. このとき, 異なる任意の 2 つの線分 $P_{i-1}P_i$ と $P_{j-1}P_j$ は端点以外で交わることはない. (i, j はいずれも 1 以上 n 以下の任意整数で $i \neq j$.)

(要するに, n 個の点を途中で交わらない閉じた折れ線で結べることを証明せよ, ということ.)

1993/3/31 問 6. a, b, c は整数, p は 3 以上の素数とする. また $f(x) = ax^2 + bx + c$ とする. 今, 連続する $(2p-1)$ 個の連続する整数 $x = n, \dots, (n+2p-2)$ に対し $f(x)$ が完全平方数 (ある整数の 2 乗) になっているものとする. すると $(b^2 - 4ac)$ は p の倍数であることを証明せよ.

1993/3/31 問 7. 鋭角三角形 ABC がある. M は BC の中点, P は線分 AM 上の点で $PM = BM$ を満たしているものとする. (このような作図が可能な三角形 ABC を考える.) また H は P から BC へ下ろした垂線の足とする. さらに Q は直線 AB と, H を通り PB に垂直な直線の交点とする. 最後に R は直線 AC と, H を通り PC に垂直な直線の交点とする. このとき三角形 QHR の外接円は直線 BC に接することを証明せよ.

1993/3/31 問 8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で x, y はともに有理数であるとする. すると $(A^n \vec{a} - \vec{a})$ の成分が両方とも整数になるようなある正整数 n が存在することを証明せよ.

1994年 春の合宿テスト

1994/3/27 問1. a, b, n は正の整数で, $b > 1$ かつ $b^n - 1$ は a の約数であるとする. a を b 進法で表わした場合, 0 でない数字 (文字) が少なくとも n 個あることを証明せよ.

1994/3/27 問2. 平面上の三角形 ABC について, その外接円を C_1 , 外心を O , 外接円の半径を R , 内接円を C_2 , 内心を I , 内接円の半径を r とする. また円 C_3 は辺 CA と CB に接し外接円 C_1 に内接する円とする. 円 C_3 と辺 CA の接点を D , 円 C_3 と辺 CB の接点を E とする. このとき内心 I は線分 DE の中点であることを証明せよ.

1994/3/30 問3. 正の整数 a_n からなる無限数列 a_1, a_2, \dots を次のように定める.

$$a_1 = 2$$

a_{n+1} は a_n (を十進法で書いたとき) の各桁の数字の 10 乗の和

とする. 例えばもし仮に $a_n = 21$ なら $a_{n+1} = 2^{10} + 1^{10} = 1025$ である. このとき数列 $\{a_n\}$ の中に同じ数が 2 度現れることがあるか否か判定せよ.

1994/3/30 問4. 正の整数 n にたいし $n^?$ を以下のように定義する.

$$n^? = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ の場合}) \\ \frac{n}{(n-1)^?} & (n \geq 2 \text{ の場合}) \end{cases}$$

このとき $\sqrt{1994} < 1994^? < \frac{4}{3}\sqrt{1994}$ であることを証明せよ.

1994/3/30 問5. 1993 イスタンブール候補 IRE3 S は, 互いに素な正の整数の組 (m, n) で n が偶数かつ $m < n$ であるようなものすべての集合とする. $s = (m, n) \in S$ について $n = 2^k n_0$ (ただし n_0 は奇数) と書くとき $f(s) = (n_0, m + n - n_0)$ として f を定義する. このとき f の値域は S であること, 及び任意の $s \in S$ にたいしある正の整数 $t \leq (m + n + 1)/4$ で $f^t(s) = s$ を満たすようなものが存在することを証明せよ. ただし f^t は f を t 回合成した写像である.

また $m + n$ が素数で $2^k - 1$ ($k = 1, 2, \dots, m + n - 2$) の約数になっていなければ, 上の条件を満たす t の最小値は $[(m + n + 1)/4]$ であることを示せ. ここに $[x]$ は x を超えない最大の整数を表わす.

1994/3/31 問6. 三角形 ABC において, 点 D と点 E は辺 BC 上の点で, $\angle BAD = \angle CAE$ であるとする. 三角形 ABD の内接円と辺 BC の接点を M , 三角形 ACE の内接円と辺 BC の接点を N とする. このとき

$$\frac{1}{MB} + \frac{1}{MD} = \frac{1}{NC} + \frac{1}{NE}$$

が成り立つことを証明せよ.

1994/3/31 問7. 整数全体の集合 \mathbb{Z} から \mathbb{Z} への写像 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ で 2 つの条件

$$f(-1) = f(1)$$

$$f(x) + f(y) = f(x + 2xy) + f(y - 2xy) \quad (x, y \text{ は任意の整数})$$

を満たすものを全て決定せよ.

1994/3/31 問8. n は正の整数, m は 9 以下の正の整数とする. 十進法で書いた時 mn 桁の整数で, 1 が丁度 n 個, 2 が丁度 n 個, 3 が丁度 n 個, \dots , m が丁度 n 個現れる数全体の集合を $Z(m, n)$ と書くことにする. $Z(m, n)$ の元 N にたいし, それを十進法で書いて上の桁数字と下の桁の数字の差の絶対値の和を $d(N)$ と書くことにする. 例えば $N = 122313 \in Z(3, 2)$ にたいし $d(N) = |1-2| + |2-2| + |2-3| + |3-1| + |1-3| = 6$ である. さてこのとき $Z(m, n)$ のすべての元 N を母集団とする $d(N)$ の平均値を m, n で表わせ.

1995年 春の合宿テスト

1995/3/28 問1. $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ を整数係数の多項式とし, p, q は互いに素な整数で $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ とする。このとき, すべての整数 k について $p - kq$ は $f(k)$ の約数であることを示せ。

1995/3/28 問2. 円 P の周上にある点 A を中心とする円 Q が 2 点 B, C で円 P と交わっている。点 B とは異なる円 Q 上の点 D に対し, 直線 DB と円 P が B の他にもう一点 G で交わり, 直線 DA は円 Q と D の他にもう一点 E で交わっていて, E と C は異なる点とする。さらに直線 CE と円 P は C の他にもう一点 F で交わっている。このとき, 四角形 $EFGA$ は平行四辺形であることを示せ。

1995/3/28 問3. 正方形を, 面積が等しい 100 個の部分に分けるやり方が 2 通り与えられている。このとき, 正方形の中から 100 個の点を選んで, どちらの分け方でみても, 各部分にちょうど 1 点ずつ入っているようにできることを証明せよ。

1995/3/29 問4.

$$x^{2y} + (x+1)^{2y} = (x+2)^{2y}$$

を満たす正の整数の組 (x, y) をすべて求めよ。

1995/3/29 問5. 1 グラムから 26 グラムまで, 1 グラムきざみで 26 個の分銅がある。この中から 6 個を選んで持ってでかける。持っていった 6 個の分銅を使って可能な 63 通りの分銅の組み合わせが全部異なる重量にできるか? また 7 個の分銅で同じことを考えるとどうなるか?

1995/3/29 問6. 円 O とその中心を通る直線 l , 及び l 上の点 C がある。 A , 及び A' は円 O 上の異なる点で, l の同じ側にあり, AC が l となす角と $A'C$ が l となす角は等しいとする。 AA' と l の交点を B とするとき, B の位置は A, A' の位置には無関係であることを証明せよ。

1995/3/31 問7. n を正の奇数とする。 n^2 個のマスが縦 n 列, 横 n 行の正方形に並んでいる。それぞれのマスには 1 から n の数が入っていて, 各行, 各列には 1 から n の数が一回ずつ現われる。さらに数の配置は正方形のある対角線に関して対称である。このときその対角線上には 1 から n の数が一回ずつ現われることを証明せよ。

1995/3/31 問8. $f(x)$ は実数全体で定義された実数値をとる関数で,

(1) $f(1) = 1$

(2) すべての実数 a, b について $f(a+b) = f(a) + f(b)$

(3) $x \neq 0$ ならば $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

を満たす。このとき, すべての実数 x に対して $f(x) = x$ であることを証明せよ。

1995/3/31 問9. n は 2 以上の整数, r_1, r_2 は正の整数でともに n と互いに素とする。このとき

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\left\langle \frac{r_1 i}{n} \right\rangle - \left\langle \frac{r_2 i}{n} \right\rangle \right)^2 \leq \frac{(n-1)(n-2)}{3n}$$

を証明せよ。ただし $\langle x \rangle$ は x の小数部分, すなわち x を越えない最大の整数を x から引いた値を表すものとする。

註: 実は r_1, r_2 が n と互いに素でなくても成り立つが, 多分難し過ぎるので, 互いに素の場合のみを問題とする。

1996/3/27 問1. $P(x), Q(x), R(x)$ は非負整数を係数とする多項式で

$$P(x) = (x^2 - 3x + 3)Q(x) = \left(\frac{x^2}{20} - \frac{x}{15} + \frac{1}{12} \right) R(x)$$

を満たすという。このような $P(x), Q(x), R(x)$ は存在するか?

1996/3/27 問2. 一点 P で交わる3つの半径の等しい円がある。この3つの円のうちふたつが交わる P 以外の点を A, B, C とする。また三角形 DEF は3つの円を含み、3辺がいずれも2つの円に接するような三角形とする。このとき、三角形 DEF の面積は三角形 ABC の面積の9倍以上であることを示せ。

1996/3/27 問3. n は5以上の整数とし、 n 人の政治家 P_1, \dots, P_n がいて、どのふたり P_i, P_j を選んでも互いに仲良しであるか互いに仲が悪いかのいずれかである。さらに、もし P_i と P_j が仲良しなら、 P_i, P_j 両方と仲が良い人はいない。また、 P_i と P_j の仲が悪いとき、 P_i, P_j 両方と仲が良い人が丁度2人いる。
このようなことが起こりうる最小の n を求めよ。

1996/3/29 問4. 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ ($n \geq 1$) として定める。 $n \geq 2$ のとき次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$1 - \frac{1}{2^{2^{n-1}}} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 1 - \frac{1}{2^{2^n}}$$

1996/3/29 問5. 合同な正三角形からなる(無限に広がった)三角格子がある。この格子を構成する正三角形の辺全体の合併集合を T とし、 T 上だけを通る任意の閉曲線(閉じた折れ線) C を描く。いま C の任意の屈折点(折れ曲がったところ) P にたいし、 P をひとつの頂点とし C 上の格子点(三角形格子を構成するある正三角形の頂点)のみを頂点とする正三角形(これは必ずしも T 上になくてもよい)が存在することを証明せよ。

1996/3/29 問6. 数列 $\{a_n\}$ ($n \geq 1$) は、 $a_1 = 1$ で a_2 以降は以下の漸化式で定まる数列とする。

$$a_{2k} = \begin{cases} 2a_k & (k \text{ が偶数の場合}) \\ 2a_k + 1 & (k \text{ が奇数の場合}) \end{cases}$$

$$a_{2k+1} = \begin{cases} 2a_k + 1 & (k \text{ が偶数の場合}) \\ 2a_k & (k \text{ が奇数の場合}) \end{cases}$$

このとき、任意の自然数 m について $a_n = m$ となるような n が丁度ひとつだけ存在することを証明せよ。

1996/3/31 問7. $f(x)$ と $g(x)$ は実数係数多項式で、無限個の有理数 q_i ($i = 1, 2, \dots$) にたいし $f(q_i)/g(q_i)$ は有理数になるという。このとき $f(x)/g(x)$ はあるふたつの整数係数多項式の比として表わせることを示せ。

1996/3/31 問8. a_1, a_2, \dots, a_n は任意の実数とする。このとき次の不等式が成立することを証明せよ。

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j-1} \geq 0$$

1996/3/31 問9. 以下のように、 x -軸上の格子点で駒を動かす、一人で行うゲームを考える。最初 $(2n+1)$ 個の駒が原点に置かれている。ゲームの途中、もしある格子点 i に駒が2個以上あったら、そこにある一つの駒を $(i-1)$ に移動し、もう一つの駒を $(i+1)$ に移動することができる。これを1手と数える。そしてこの規則で動かせる駒がなくなったらゲームを終了する。
さて、このゲームはどのような手順で駒を動かしても、 $n(n+1)(2n+1)/6$ 手で終了し、そのとき、 $(-n)$ から n までの格子点に1個ずつ駒が並んだ状態になることを証明せよ。

1997年 春の合宿テスト

1997/3/28 問 1. (1) $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$ は複素数係数の多項式とする. このとき $|z| = 1$ であるようなある複素数 z が存在して $|f(z)| \geq 1$ となることを証明せよ.

(2) a が 0 でない整数ならば $x^n + ax^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + ax - 1$ は, ふたつの整数係数多項式の積に因数分解できないことを証明せよ.

1997/3/28 問 2. n チームが参加するリーグ戦を考える. どの 2 チームも必ず 1 度だけ対戦し, 必ず勝敗が決し引き分けはないものとする. このとき, あるチーム X が存在し, 他のどのチーム Y を選んでも, X は Y に勝つか, あるいは, あるチーム Z_Y が存在して, X は Z_Y に勝ち, Z_Y は Y に勝つことを証明せよ.

1997/3/28 問 3. 6 以上の任意の整数 n に対し, ある凸 6 角形で, 丁度 n 個の合同な三角形に分割できるものが存在することを証明せよ.

1997/3/29 問 4. 体積 1 の正四面体 T と, T の内部の点 P を考える. 点 P を通り, T の 4 つの面に平行な 4 枚の平面によって, T を 14 個の小片に分割する. これらの小片のうち四面体でも平行 6 面体でもない小片すべての体積の和を $f(P)$ とおく. 点 P が T の内部を動くとき, $f(P)$ のとる値の範囲を求めよ. ただし, 平行 6 面体とは, 3 組の向い合う面が平行な 6 面体である.

1997/3/29 問 5. n は 3 以上の整数, X は $2n$ 個の相異なる実数からなる集合とする. また, K は $X \times X$ の部分集合で以下の条件 (1), (2) を満たすものとする.

- (1) $(x, y) \in K$ ならば $(y, x) \notin K$. 特に $(x, x) \notin K$.
- (2) どの $x \in X$ に対しても, $(x, y) \in K$ または $(y, x) \in K$ となるような $y \in X$ の個数は 19 個以下である.

すると X の 5 個の空でない部分集合 X_1, \dots, X_5 で, 以下の条件 (a), (b), (c) を満たすものが存在することを証明せよ.

- (a) $X = X_1 \cup \cdots \cup X_5$.
- (b) $i \neq j$ ならば $X_i \cap X_j = \phi$.
- (c) $K \cap (X_i \times X_i) = \{ (x, y) \in K \mid x, y \in X_i \}$ の元の個数を a_i とするとき, $a_1 + \cdots + a_5 \leq 3n$.

1997/3/29 問 6. 古代中国の架空の都, 西京は, 1 里間隔で, 縦横に各々 100 本の道路が碁盤の目のように整然と走っている美しい都市である. 1 万個の交差点には, 1 から 10,000 までの番号がでたらめに付けられている. 西域からの訪問者は, 1 番の交差点を出発して最短経路で 2 番の交差点に歩いて行き, 再び 2 番の交差点を出発して 3 番の交差点に最短経路で歩いて行く. 以下同様に, 番号順に, 10,000 番の交差点まで歩いて行く. ただし, 各 k 番の交差点から, $k+1$ 番への交差点へは最短経路を歩く. さて, この訪問者が, 最も長い距離を歩かなければならないように, 交差点に番号を付けたとしたら, 訪問者が歩く距離は何里であるか?

1997/3/30 問 7. $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ は正の実数で, $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k$ を満たしているとする. このとき不等式

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{a_k + b_k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k$$

が成り立つことを証明せよ. また, 等号が成立するのはいつか.

1997/3/30 問 8. n が 3 以上の奇数のとき, 座標平面上の n 角形で, すべての辺の長さが 1 で, すべての頂点の x 座標も y 座標も有理数であるようなものは存在しないことを証明せよ.

1997/3/30 問 9. にわとりは, つつきあいによって強弱の序列ができるが, ある小人の部落では複雑なつつきあいが観察される. このつつきあいでは, X が Y をつつき, Y が Z をつつきからと言って, X が Z とつつきとは限らない. しかし, つつきあいは以下の単純な規則を満たしている.

- (a) どの2人の小人 X, Y についても, X が Y をつつか, Y が X をつつかのいずれかである.
 - (b) どの2人の小人 X, Y についても, X と Y 両方をつつく小人 Z が丁度1人いる.
 - (c) どの2人の小人 X, Y についても, X と Y につつかれる小人 W が丁度1人いる.
- この部落には何人の小人がいるか?

1998/3/27 問1. $P(x)$ は実係数多項式で $x \geq 0$ のとき $P(x) > 0$ である. このとき, ある正の整数 n で $(1+x)^n P(x)$ が非負係数多項式になるようなものが存在することを証明せよ.

1998/3/27 問2. 正四面体 $ABCD$ において M, N は各々平面 ABC, ADC 上の相異なる2点とする. このとき, 辺 MN, BN, MD はある三角形の3辺であることを証明せよ. (つまり, この3辺と等しい長さの3辺を持つ三角形が存在することを示せ.)

1998/3/27 問3. \mathbb{N} は1以上の整数全体の集合, \mathbb{Z} は整数全体の集合とし, 関数 $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ に対し, $M_g = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \mid \text{任意の } x \in \mathbb{N} \text{ に対し } f(x) > f(g(x)) \text{ が成り立つ.}\}$ とする. $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ に対しても同様とする.

(1) $M_g = M_h \neq \phi$ ならば $g = h$ であることを示せ.

(2) $N_g = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \text{任意の } x \in \mathbb{N} \text{ にたいし } f(x) > f(g(x)) \text{ が成り立つ.}\}$ とするとき, 命題: 「 $N_g = N_h \neq \phi$ ならば $g = h$ 」は成立するか.

1998/3/29 問4. 平面上の点の集合 M が鈍であるとは, M から任意の3点を選んだとき, その3点を頂点とする三角形が鈍角三角形であることと定義する.

a) M は鈍である有限集合とする. そのとき, M に属さない, ある平面上の点 P が存在して, $M \cup \{P\}$ も鈍であるようにできることを証明せよ.

b) 上の命題 a) において, M が有限集合ではなく, 無限集合であるとしたら, その主張は正しいか否か, 理由を記して判定せよ.

1998/3/29 問5. (1) $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ は $n < p \leq 2n$ なる任意の素数 p で割り切れる整数であり,

$\binom{2n}{n} < 2^{2n}$ であることを示せ.

(2) 正の実数 x に対し $\pi(x)$ は x 以下の素数の個数とする. また n は3以上の整数とする.

(a) $\pi(2n) < \pi(n) + \frac{2n}{\log_2(n)}$ を示せ.

(b) $\pi(2^n) < \frac{2^{n+1} \log_2(n-1)}{n}$ を示せ.

(c) $x \geq 8$ のとき $\pi(x) < \frac{4x \log_2(\log_2(x))}{\log_2(x)}$ であることを示せ.

1998/3/29 問6. A は十分多くの元を持つ集合, k は任意の自然数で, $I = \{1, 2, \dots, 2k\}$ とする. このとき, ある集合 $S \subset I \times I$ で以下の条件を満たすものが存在することを証明せよ.

(1) $i \in I$ のとき $(i, i) \notin S$.

(2) $(i, j) \in S$ ならば $(j, i) \in S$.

(3) M_1, M_2, \dots, M_{2k} が集合 A の部分集合で, “ $M_i \cap M_j = \phi \iff (i, j) \in S$ ” を満足するとすれば, $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_{2k}$ は k^2 個以上の要素を持つ.

1998/3/31 問7. 長方形 R は, 有限個の長方形 R_i ($0 \leq i \leq n$) を (辺または頂点以外で交わらないように) 敷き詰めて得られ, 以下の性質を満たすとする.

(1) R_i 達の各辺は R のいずれかの辺に平行である. ($0 \leq i \leq n$)

(2) R_i 達の面積はすべて異なる. ($0 \leq i \leq n$)

(3) 各 R_i の辺の少なくとも1辺の長さは整数である. ($0 \leq i \leq n$)

このとき R の辺の少なくともひとつの長さは整数であることを示せ.

1998/3/31 問8. n は2以上の任意の整数とし, $2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \dots$ を n で割った余りを各々 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ として, 無限数列 $\{a_n\}$ を定める. (つまり $b_1 = 2, b_{k+1} = 2^{b_k}$ とするとき, a_k は b_k を n で整数除した余りである.) このとき数列 $\{a_n\}$ のある項より先は定数となることを証明せよ.

1998/3/31 問9. \mathbb{R} は実数全体の集合とする.

- (a) 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で, $f(g(x)) = x^2, g(f(x)) = x^3 (\forall x \in \mathbb{R})$ を満たすものは存在するか?
- (b) 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で, $f(g(x)) = x^2, g(f(x)) = x^4 (\forall x \in \mathbb{R})$ を満たすものは存在するか?

1999年春の合宿テスト

1. O_1, O_2 を中心とする円 S_1, S_2 があり, 点 A, B で交わっているものとする. 直線 O_1B と S_2 との交点を F , 直線 O_2B と S_1 との交点を E とする. また, B を通り EF に平行な直線と S_1, S_2 との交点を各々 M, N とするとき, $MN = AE + AF$ となることを示せ.

2. $3^n = x^k + y^k$ をみたす互いに素な整数 x, y および整数 $k > 1$ が存在するような自然数 n をすべて求めよ.

3. 次の条件をみたす関数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ が存在する整数 k をすべて求めよ.

i) $f(1998) = 1999$,

ii) 任意の $x, y \in \mathbb{N}$ に対して $f(xy) = f(x) + f(y) + kf(\text{GCD}(x, y))$.

ただし, $\text{GCD}(x, y)$ は x と y の最大公約数を表す.

4. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{n}{a_n}, \quad (n \geq 1)$$

で定める. $n \geq 4$ に対して $[a_n^2] = n$ を示せ.

ただし, $[x]$ は x を越さない最大の整数とする.

5. X を有限集合とし, 各々3元からなる6つの X の部分集合が与えられている. X の元を二色に塗り分けて, これらの部分集合がどれも単色でないようにできることを示せ.

6. $n \geq 3$ を整数, $p \geq 2n - 3$ を素数とする. M を平面上の, どの三点も同一直線上にないような n 点からなる集合とし, $f: M \rightarrow \{0, 1, \dots, p-1\}$ を次の条件をみたす関数とする.

i) f によって0にうつる M の点が1点だけ存在する.

ii) A, B, C を M の異なる3点とし, k を3点 A, B, C を通る円とすると, $\sum_{P \in M \cap k} f(P) \equiv 0 \pmod{p}$

が成立する.

このとき, M のすべての点が同一円上にあることを示せ.

7. 正の整数 n に対して $S(n)$ は n を十進表記したときの各桁の数字の和を表す.

(a) $S(2n) \leq 2S(n) \leq 10S(2n)$ を示せ.

(b) $S(n) = 1999S(3n)$ を満たす n が存在することを示せ.

8. 凸四角形 $ABCD$ の辺 AB, BC, CD, DA 上にそれぞれ点 M, N, P, Q をとる. 今, $AQ = DP = CN = BM$ が成り立っている. このとき, 四角形 $MNPQ$ が正方形ならば, 四角形 $ABCD$ も正方形であることを示せ.

9. a, b, c, d は非負実数で, 条件

$$2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + abc + abd + acd + bcd = 16$$

をみたす. 次の不等式を示し, 等号の成立条件も求めよ.

$$a + b + c + d \geq \frac{2}{3}(ab + ac + ad + bc + bd + cd).$$

10. ABC を $\angle ACB = 2\angle ABC$ をみたす三角形とする. 点 D を辺 BC 上に $CD = 2BD$ をみたすように取る. また, 線分 AD の延長線上に点 E を $AD = DE$ をみたすように取る. このとき $\angle ECB + 180^\circ = 2\angle EBC$ であることを示せ.

11. ある整数 m が存在して $2^n - 1$ が $m^2 + 9$ の約数になるような, 正の整数 n をすべて決定せよ.

12. $m \times n$ の柵目の長方形の盤の上で次のような一人遊びを行う. mn 個の片面が白, 片面が黒の駒を用意し, 最初は盤の上に左上隅だけ黒を上, 残りの柵目には白を上にして駒を置く. 一回の動作につき, 盤上の黒が上になっている駒を取り除くことができる. このとき, 取り除いた駒の上下左右に隣接する柵にある駒はすべて裏返す. この動作を繰り返してすべての駒を取り除くことができるような正整数の組 (m, n) をすべて決定せよ.

2000年 春の合宿テスト

1. 各項が実数からなる数列 $\{x_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, 2000$) があり, $x_{k+1} - x_k = y_k$ とおく. x_1 と x_{2000} をともに $x_1 = x_{2000} = 0$ で固定し, 他の項を変化させたとき

$$\sum_{k=1}^{1999} (y_k^2 + 4x_k)$$

の最小値を求めよ.

2. 点 M は凸四角形 $ABCD$ の内部の点で, 以下を満たすものとする.

$$\begin{aligned} MA &= MC, \\ \angle AMB &= \angle MAD + \angle MCD, \\ \angle CMD &= \angle MCB + \angle MAB. \end{aligned}$$

このとき,

$$AB \cdot CM = BC \cdot MD, \quad BM \cdot AD = MA \cdot CD$$

であることを示せ.

3. すべての整数に対して, 各々赤・青・緑・黄のうちの一つの色が与えられているとする. x と y を $|x| \neq |y|$ をみたす奇数とする. このとき, 同じ色が与えられた二つの整数で, その差が $|x|, |y|, |x+y|, |x-y|$ のいずれかであるものが存在することを示せ.

4. $n \times n$ のチェス盤の柵目 (ますめ) に 1 から n^2 までの整数がひとつずつ置かれている. 同じ行, あるいは同じ列に置かれている任意のふたつの数の組について, その大きい方の数を分子, 小さい方の数を分母とする分数を考える.

ここで, このような $n^2(n-1)$ 個の分数 (勿論同じ値も出現し得る) の中で最小のものを, この並べ方の特性数という. 特性数の取り得る値のうち, 最大のものを求めよ.

5. $(1 + 2^a + 3^a)^n = 1 + 2^b + 3^b$ をみたす正整数 a, b, n をすべて求めよ.

6. 三角形 ABC について, 点 X を辺 AB 上に $\frac{AX}{XB} = \frac{4}{5}$ となるように取り, 点 Y を線分 CX 上に $\frac{CY}{YX} = 2$ となるように取る. そして, もし可能ならば, 点 Z を半直線 CA 上に $\angle CXZ = 180^\circ - \angle ABC$ となるように取る. このような点 Z が取れ, しかも $\angle XYZ = 45^\circ$ となっているようなある平面上の三角形 ABC 全体の集合を S で表す.

このとき, S に含まれる全ての三角形は相似であることを示せ. また, S に含まれる三角形の最小の内角の値を求めよ.

7. 三角形 ABC , 及びその内部の点 M がある. このとき, 以下の不等式を示せ.

$$\begin{aligned} \min\{MA, MB, MC\} + MA + MB + MC \\ < AB + AC + BC \end{aligned}$$

ただし, $\min\{MA, MB, MC\}$ は線分 MA, MB, MC の長さの最小値を表す.

8. n, k は正整数で, n は 3 の倍数でなく, $k \geq n$ である. このとき, 次の条件をみたす正整数 m が存在することを示せ.

条件: m は n の倍数であり, m の十進表記の各桁の和は k である.

9. 正整数の集合は, 以下の性質を満たすように 3 つの空でない集合に分割することができないことを示せ.

「相異なる 2 つの集合からおのの任意に取り出してきた正整数 x, y について, $x^2 - xy + y^2$ は残りのひとつの集合に含まれる。」

ただし、正整数の集合 N を 3 つに分割するとは、互いに共通部分を持たず、その和集合が N になるような 3 つの部分集合に分けるということである。

10. $0 < \alpha < 1$ なる無理数 α に対して、

$$\left[\frac{m}{\alpha} \right] = \left[\frac{n}{1-\alpha} \right]$$

をみたす正整数の組 m, n は存在しないことを示せ。

ただし、 $[x]$ は x を越えない最大の整数を表す。

11. n, s はともに整数で、 $n \geq s \geq 1$ をみたす。 xy 平面上の点 $(0, 0)$ から点 (n, n) まで、以下の規則に従って自動車が走行する。

- (1) 自動車は x 軸の正の向き、または y 軸の正の向きにのみ進むことができる。
- (2) 右折・左折は格子点でのみ許される。
- (3) 自動車は $x \geq y$ の範囲のみを走行する。

このとき、ちょうど s 回左折するような走行経路の個数は

$$\frac{1}{s} {}_{n-1}C_{s-1} {}_n C_{s-1}$$

であることを示せ。

注 1: 進む向きを x 軸の正の向きから y 軸の正の向きに変更することを左折と呼び、 y 軸の正の向きから x 軸の正の向きに変更することを右折と呼ぶ。

注 2: x 座標、および y 座標がともに整数であるような点を格子点と呼ぶ。

12. $\frac{1}{p}$ の十進小数表記の循環の周期が 3 の倍数になる素数 p の集合を S で表す。 $p \in S$ に対して、 p の関数 $r(p)$ を、 $\frac{1}{p}$ の十進小数表記の循環の周期が $3r(p)$ になるように定める。十進小数表記

$$\frac{1}{p} = 0.a_1 a_2 \cdots a_{3r(p)} a_1 a_2 \cdots a_{3r(p)} \cdots$$

を考え、 $p \in S$ と $k \geq 1$ に対して $f(p, k)$ を

$$f(k, p) = a_k + a_{k+r(p)} + a_{k+2r(p)}$$

で定める。以下の設問に答えよ。

a) S が無限集合であることを示せ。

b) $k \geq 1, p \in S$ を自由に取るとき、 $f(k, p)$ の最大値を求めよ。

ただし、十進小数表記 $0.b_1 b_2 \cdots b_n \cdots$ の循環の周期とは、 $b_i = b_{i+c}$ ($i = 1, 2, \dots$) が成立するような正整数 c のうち、最小のものである。たとえば、 $\frac{1}{11} = 0.090909 \cdots$ の循環の周期は、(6 ではなく) 2 である。

2001年 春の合宿テスト

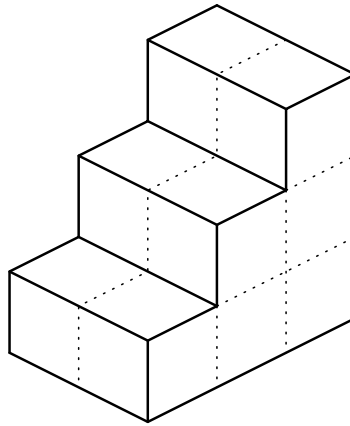
お断り。2001年の問題は12問ありますが、第4日目の3問が行方不明で見つかりません。また、第3日目の3問は日本語問題が行方不明のため、英文から再訳出しました。従って、試験で配布された問題文と異なります。

1. 以下の性質をみたす2以上の整数 n を全て求めよ:

「 n と互いに素な任意の整数 a, b に対して,

$$a \equiv b \pmod{n} \iff ab \equiv 1 \pmod{n}.$$

2. 一辺が1の立方体12個から構成され、幅が2である3段の階段状のブロックがある。このブロックを幾つか用い、組み合わせることによって作ることのできる立方体の一辺の長さ n を全て求めよ。



3. 凸四角形 $ABCD$ があり、直線 AB, CD は平行ではないとする。四角形 $ABCD$ の内部に、 $\angle ADX = \angle BCX < 90^\circ$ かつ $\angle DAX = \angle CBX < 90^\circ$ となる点 X をとる。線分 AB, CD の垂直二等分線の交点を Y とするとき、 $\angle AYB = 2\angle ADX$ を示せ。

第2日 (2001年3月28日)

4. 平面上に10人のガンマンがおり、どの2人の距離も異なっている。教会の鐘を合図に10人はめいめい、自分を除く9人のうち自分から最も近くにいる1人を、同時に撃つ。倒れる人数の最小値を求めよ。

5. f は非負整数全体の集合から非負整数全体の集合への関数であり、任意の非負整数 n に対して、

(1) $f(4n) = f(2n) + f(n),$

(2) $f(4n+2) = f(4n) + 1,$

(3) $f(2n+1) = f(2n) + 1$

をみたす。このとき、任意の正の整数 m に対して、以下が成り立つことを証明せよ:

$$0 \leq n < 2^m, f(4n) = f(3n) \text{ をみたす整数 } n \text{ の個数は } f(2^{m+1}) \text{ に等しい.}$$

6. 平面上に n 個の長方形がある。2つの長方形は必ず平行な辺をもつが異なる辺は同一直線上にない。これらの長方形の境界によって平面はいくつかの領域に分割される。ある領域の境界上に長方形の頂点が1つ以上あるとき、それは「良い」領域であるという。領域の境界が k 本の線分からなるとき、その領域の辺数が k であるという。良い領域の辺数をすべて足してもその和が $40n$ より小さいことを示せ。(凸でない領域や、境界がひとつながりではない領域もある。無限にひろがる外側の部分も領域である。)

第3日 (March 29, 2001)

7. p と q は互いに素な正の整数とする . 集合 $\{0, 1, 2, \dots\}$ の部分集合 S は , $0 \in S$ であってかつ「 $n \in S$ ならば $n+p \in S$ かつ $n+q \in S$ 」が成り立つときイデアルであると呼ばれる . さて , 集合 $\{0, 1, 2, \dots\}$ のイデアルは全部で何個あるか決定せよ .
8. a, b, c は正の整数で , $b > 2a, c > 2b$ を満たしている . このとき , $\lambda a, \lambda b, \lambda c$ の小数部分がすべて区間 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ に属するような実数 λ が存在することを証明せよ .
9. 相異なる何個かの整数の 2 乗の和として表すことのできない正の整数全体の集合は , 有限集合であることを証明せよ .

2002年春の合宿テスト

解答時間: 4時間30分
配点: 各問10点

第1日(2002年3月9日)

1. p を素数とする. 非負整数 j に対して, j を p で割ったときの余りを $\langle j \rangle$ で表す. また, 0 以上 $p-1$ 以下の整数 i に対して, f_i を

$$f_i = 2pi + \langle i^2 \rangle$$

で定める. 整数 m, n, k, l が

- (1) $0 \leq m \leq n \leq p-1$
- (2) $0 \leq k \leq l \leq p-1$
- (3) $f_m + f_n = f_k + f_l$

をみたすならば, $m = k$ かつ $n = l$ が成り立つことを示せ.

2. 鋭角三角形 ABC に対して, 一辺が辺 BC 上にあり, 残りの2頂点がそれぞれ辺 AB, AC 上にある正方形の中心を点 A_1 とする. B_1, C_1 も同様に定める. このとき, 3直線 AA_1, BB_1, CC_1 は一点で交わることを示せ.

3. 自然数 n に対し, n -均等な数字列とは, 0 と 1 を n 個ずつ含む長さ $2n$ の数字列のことをいう. 二つの n -均等な数字列 a, b が隣接するとは, a の $2n$ 個の数字のうち一つを他の場所に動かすと b になるようにできることをいう.

(例) 4-均等な数字列 01101001 の左から六番目の位置にある 0 を一番左に動かすと, 数字列 00110101 が得られる. よってこれらの数字列は互いに隣接している.

(例) 4-均等な数字列 01101001 の左から六番目の位置にある 0 を, 左から二番目と三番目の間の位置に挿入すると, 数字列 01010101 が得られる. よってこれらの数字列は互いに隣接している.

次をみたす n -均等な数字列の集合 S であって, 元の個数が $\frac{2n C_n}{n+1}$ 以下であるものが存在することを示せ. 任意の n -均等な数字列 a に対して, S のある元 s が存在して, a と s は等しいか, さもなくば隣接している.

第2日(2002年3月10日)

4. 点 P は $\triangle ABC$ の外側にあり, 直線 BC 上, CA 上, AB 上のいずれにもないとする. 直線 AP, BP, CP は直線 BC, CA, AB とそれぞれ1点 D, E, F で交わるとする. $\triangle PBD, \triangle PCE, \triangle PAF$ の面積がすべて等しいとき, これらの面積は $\triangle ABC$ の面積にも等しいことを証明せよ.

5. n は2以上の整数とし, a_1, a_2, \dots, a_n は正の整数とする. $a_0 = 1$ としたとき,

$$\frac{99}{100} = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

となり, $1 \leq k \leq n-1$ をみたす任意の整数 k に対して

$$(a_{k+1} - 1)a_{k-1} \geq a_k^2(a_k - 1)$$

となるという. このような n, a_1, a_2, \dots, a_n をすべて求めよ.

6. p は5以上の素数とする. $1 \leq a \leq p-2$ をみたす整数 a であって, $a^{p-1} - 1$ も $(a+1)^{p-1} - 1$ も p^2 の倍数でないようなものが存在することを証明せよ.

第3日(2002年3月11日)

7. 任意の自然数 n に対し, 互いに素な2つの自然数 x, y をうまくとれば, 平方和 $x^2 + y^2$ がある自然数の n 乗に等しくなることを示せ.

ここで自然数とは, 1以上の整数のことをいう.

8. 0 以上の整数 p, q, r を順に 3 つ並べた組 (p, q, r) 全体の集合を T で表す. T から \mathbb{R} への関数 f で次をみたすものをすべて求めよ.

- (1) $pqr = 0$ のとき, $f(p, q, r) = 0$.
 (2) $pqr \neq 0$ のとき,

$$f(p, q, r) = 1 + \frac{1}{6} \left\{ f(p+1, q-1, r) + f(p-1, q+1, r) + f(p-1, q, r+1) \right. \\ \left. + f(p+1, q, r-1) + f(p, q+1, r-1) + f(p, q-1, r+1) \right\}$$

9. n を 2 以上の整数とする. 平面上の n 個の点からなる集合 S がある. S の任意の相異なる 2 点 A, B について, S の点を両端点とする線分で, 長さが線分 AB に等しいものが, AB を含めてちょうど n 本ある. S の点の配置を決定せよ.

第 4 日 (2002 年 3 月 12 日)

10. 任意の実数 x_1, x_2, \dots, x_n について, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_1^2+\dots+x_n^2} < \sqrt{n}$$

11. $a_1, a_2, \dots, a_{2002}$ は 2002 個の正の整数である. 次の条件をすべてみたすような 3 つの整数の組 (i, j, k) の個数を m とする.

- (1) $1 \leq i < j < k \leq 2002$
 (2) $a_j = a_i + 1$
 (3) $a_k = a_j + 1$

$a_1, a_2, \dots, a_{2002}$ のとり方をすべて考えるとき, m の最大値を求めよ.

12. 次の条件をみたすような実数 m のうち, 最大のものを求めよ.

(条件) 3 つの式

$$\begin{cases} 1 \leq \frac{x}{y} < m \\ x + y = z + u \\ 2xy = zu \end{cases}$$

をすべてみたすような正の整数 x, y, z, u は存在しない.

2003年 春の合宿テスト

この年の問題は行方不明で見つかりません。どなたか、ご存知の方は是非安藤までご連絡下さい。

2004年 春の合宿テスト

1. n を正整数とする. $2n$ 個の実数 $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ が与えられている. また, n 行 n 列のマスキに区切られた 2 枚の表 A, B がある. n 以下の各正整数 i, j に対し, 表 A の上から i 番目, 左から j 番目のマスには, $x_i + y_j \geq 0$ ならば 1 を, さもなくば 0 を, 記入した. 一方, 表 B の各マスには 1 または 0 をでたために記入した. すると, 表 A と表 B の対応する行どうし, および対応する列どうしは, 記入された数の和が等しくなった. 表 B に記入された数の並びは, 表 A と全く同じであることを示せ.

2. 3 点 A, B, C が一直線上にこの順に並んでいる. 直線 AC 上にない点を中心とし, A と C を通る円周 Γ をかく. 点 A, C における Γ の接線の交点を P とし, 線分 PB と Γ の交点を Q とする. $\angle AQC$ の二等分線と AC との交点は, Γ のとり方によらないことを示せ.

3. b を 6 以上の整数とする. 各正整数 n に対し, b 進法で

$$\underbrace{11 \cdots 1}_{n-1 \text{ 個}} \underbrace{22 \cdots 2}_n 5$$

と書かれる数を x_n とおいたところ, ある正整数 M が存在して $x_M, x_{M+1}, x_{M+2}, \dots$ はみな平方数になった. b として考えられる数をすべて求めよ.

第 2 日 (2004 年 3 月 28 日)

4. xy 平面上の点で, その x 座標, y 座標がともに整数である点を格子点とよぶ. 各格子点を中心として, 半径 0.001 の円が描かれている. 本問では, 「円」とは, これらの円を指すものとする.

(1) xy 平面上の正三角形であって, その 3 つの頂点が, 相異なる円の内部に含まれているものが存在することを示せ.

(2) (1) の条件をみたす正三角形の一辺の長さは 96 より大きいことを示せ.

5. 平面上に相異なる 4 円 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ があり, Γ_1 と Γ_3 は点 P で外接していて, Γ_2 と Γ_4 も同じ点 P で外接している. Γ_1 と Γ_2 の交点, Γ_2 と Γ_3 の交点, Γ_3 と Γ_4 の交点, Γ_4 と Γ_1 の交点のうち, P でないものをそれぞれ A, B, C, D とする. 次の等式を示せ.

$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2}$$

6. 整数 n が「よい」整数であるとは, $|n| = k^2$ となる整数 k が存在しないこととする. 次の性質をもつ整数 m をすべて求めよ.

積が奇数の 2 乗であるような相異なる 3 つの「よい」整数の和として m を表す方法が無数に存在する.

第 3 日 (2004 年 3 月 29 日)

7. 2 以上の整数 m を固定し, 数列 x_0, x_1, x_2, \dots を

$$x_i = \begin{cases} 2^i & (0 \leq i \leq m-1) \\ \sum_{j=1}^m x_{i-j} & (i \geq m) \end{cases}$$

で定義する. 次の条件をみたす整数 k の最大値を, m を用いて表せ.

この数列の中に, m の倍数が連続して k 項並ぶ部分がある.

8. ABC を $AC = BC$ なる二等辺三角形とし, その内心を I とおく. 三角形 AIB の外接円上にあり, 三角形 ABC の内部にある点 P をとる. P を通り CA, CB に平行な直線と AB との交点をそれぞれ D, E とする. P を通り AB に平行な直線と CA, CB との交点をそれぞれ F, G とする. このとき, 2 直線 DF, EG の交点は三角形 ABC の外接円上にあることを証明せよ.

9. n を正の整数とする. $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, z_2, z_3, \dots, z_{2n}$ は正の実数で, n 以下の任意の正の整数 i, j に対して

が成立するとする. z_2, z_3, \dots, z_{2n} の最大値を M としたとき,

$$\left(\frac{M + z_2 + z_3 + \dots + z_{2n}}{2n} \right)^2 \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

が成立することを証明せよ.

第 4 日 (2004 年 3 月 30 日)

10. n を与えられた 6 以上の整数とする. k 個の直角な内角を持つ n 角形が存在するような最大の整数 k を求めよ. ただし, n 角形は必ずしも凸でなくてもよいが, 境界が自分自身と交差してはいけないものとする.

11. \mathbb{R}^+ を正の実数全体からなる集合とする. \mathbb{R}^+ から \mathbb{R}^+ への関数 f で以下の条件をみたすものをすべて求めよ.

(1) 任意の \mathbb{R}^+ の元 x, y, z に対して,

$$f(xyz) + f(x) + f(y) + f(z) = f(\sqrt{xy})f(\sqrt{yz})f(\sqrt{zx}),$$

(2) $1 \leq x < y$ ならば, $f(x) < f(y)$.

12. 正の整数 k に対し, 以下の条件をみたす整数 n の個数を $f(k)$ で表すとする.

(1) $0 \leq n < 10^k$.

(2) n の各桁の数を (必要ならば) 並び替えることによって, 11 の倍数を作ることができる. ただし, 数の表示はすべて十進法であるとし, 10^{k-1} より小さい数については先頭にいくつか 0 を補ってちょうど k 桁で表すものとする.

任意の正の整数 m に対して, $f(2m) = 10f(2m-1)$ が成り立つことを示せ.

2005年春の合宿テスト

第1日(2005年3月26日)

1. 正の整数全体の集合 \mathbb{N} からそれ自身への関数 ψ が次で定義されている.

$$\psi(n) = \sum_{k=1}^n \text{GCD}(k, n)$$

ただし $\text{GCD}(k, n)$ は k と n の最大公約数を表す.

- (1) 互いに素な正整数 m, n に対し, $\psi(m)\psi(n) = \psi(mn)$ が成り立つことを示せ.
- (2) 任意の正整数 a に対し, x に関する方程式 $\psi(x) = ax$ が正整数解を持つことを示せ.
- (3) 方程式 $\psi(x) = ax$ が正整数解をただ一つ持つような正整数 a は無限に存在することを示せ.

2. 正 n 角形 $A_1A_1 \cdots A_n$ があり, 点 B_1, B_2, \dots, B_{n-1} を次のように定める.

- (1) $i = 1, n-1$ のとき, B_i は辺 A_iA_{i+1} の中点,
- (2) $i \neq 1, i \neq n-1$ のとき, S を A_1A_{i+1} と A_nA_i の交点として, B_i は $\angle A_iSA_{i+1}$ の二等分線と, 線分 A_iA_{i+1} の交点.

このとき, 次の等式を証明せよ.

$$\angle A_1B_1A_n + \angle A_1B_2A_n + \cdots + \angle A_1B_{n-1}A_n = 180^\circ$$

3. 有限人のメンバーからなる会を考える. メンバーの中の任意の2人は, 互いに知り合いであるか, 知り合いでないかのどちらかである. a を, どの2人も互いに知り合いである3人組の個数とし, b を, どの2人も互いに知り合いである4人組の個数とする. どんな会においても, このように a, b を定めたとき, 次の不等式が成り立つような正定数 c の最小値を求めよ.

$$b^3 \leq ca^4$$

第2日(2005年3月27日)

4. 有理数全体から $\{-1, 1\}$ への関数 s であって, 次の条件を満たすものは存在するか. 存在するならばそのような s を1つ構成し, 存在しないならばそのことを証明せよ.

(条件) 相異なる有理数 x, y が, $xy = 1$ または $x + y \in \{0, 1\}$ を満たすならば, $s(x)s(y) = -1$.

5. 2005行2005列のマス目に区切られた表 A がある. k を正整数として, 各マスに1以上 k 以下の整数を1つずつ書き込む. 2005以下の各正整数 i, j に対し, 表 A の, 上から i 番目, 左から j 番目のマスに書き込まれた整数を A_{ij} とする. 各整数 i ($1 \leq i \leq 2005$) について, 1以上2005以下の整数 j によって, $a = A_{ij}$ と表すことのできる整数 a 全体の集合を X_i とし, 各整数 j ($1 \leq j \leq 2005$) について, 1以上2005以下の整数 i によって, $a = A_{ij}$ と表すことのできる整数 a 全体の集合を Y_j とする. このとき, $X_1, X_2, \dots, X_{2005}, Y_1, Y_2, \dots, Y_{2005}$ がどの2つも集合として異なっていた. このようなことが起こりうる正整数 k の最小値を求めよ.

6. 三角形 ABC が与えられている. 点 X を, 3点 B, C, X がこの順に一直線上にあり, かつ三角形 ABX の内接円と三角形 ACX の内接円が異なる2点 P, Q で交わるようにとる. このとき, 直線 PQ は X の位置によらない定点を通ることを示せ.

第3日(2005年3月28日)

7. $\angle B < \angle C$ である鋭角三角形 ABC があり, 外心を O とする. 直線 AO と辺 BC の交点を D とする. 三角形 ABD の外心と三角形 ACD の外心をそれぞれ E, F とする. 辺 BA, CA の A の側への延長上にそれぞれ点 G, H を $AG = AC, AH = AB$ となるようにとる. このとき, 四角形 $EFGH$ が長方形であることと, $\angle ACB - \angle ABC = 60^\circ$ であることは同値であることを示せ.

8. 実数全体から実数全体への関数 f であって, 任意の2実数 x, y に対して

$$f(x^2 + y^2 + 2f(xy)) = (f(x + y))^2$$

が成り立つようなものをすべて決定せよ .

9. xy 平面上に直径 p^n の円がある . ここで p は奇素数 , n は正の整数である . この円周上に相異なる 8 個の点があり , この 8 点はどれも x 座標 , y 座標がともに整数である . このとき , この 8 点のうち 3 つを頂点とする三角形であって , どの辺の長さの 2 乗も p^{n+1} で割り切れる整数であるものが存在することを示せ .

第 4 日 (2005 年 3 月 29 日)

10. n を与えられた偶数とする . n 行 n 列のマス目それぞれに次の条件を満たすように実数を 1 つずつ書き込む .

- 各マスには絶対値が 1 以下の実数を書き込む .
- 書き込まれた n^2 個の実数の和は 0 である .

これらの条件を満たすようないかなる実数の書き込み方に対しても次の命題が成り立つような正実数 c の最小値を求めよ .

(命題) ある行または列が存在して , そこに書き込まれた n 個の実数の和の絶対値は c 以下となる .

11. 正整数 n に対し , n の正の約数の個数を $\tau(n)$ で表す . 方程式

$$\tau(an) = n$$

を満たす正整数 n が存在しないような正整数 a が無限に存在することを示せ .

12. n を正整数とする . 正実数 a_1, a_2, \dots, a_n に対して ,

$$A_k = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$g_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$G_n = \sqrt[n]{A_1 A_2 \dots A_n}$$

により $A_1, A_2, \dots, A_n, g_n, G_n$ を定める . このとき , 不等式

$$n \sqrt[n]{\frac{G_n}{A_n}} + \frac{g_n}{G_n} \leq n + 1$$

が成り立つことを示せ . また , 等号が成立する条件を求めよ .

2006年春の合宿テスト

第1日(2006年3月26日)

1. 2次の項の係数が1である整数係数2次多項式 $p(x)$ のうち, ある0でない整数係数多項式 $q(x)$ が存在して $p(x)q(x)$ の各係数の絶対値が1となるものをすべて求めよ. ただし, 係数は0も含めて考え, 例えば, $p(x)q(x)$ として $x^2 + x - 1$ は適するが, $x^2 + 1$ は適さない.

2. n を3以上の整数とする. 正 n 角形 $P_1P_2 \cdots P_n$ の辺および対角線それぞれに r 以下の正の整数1つを以下の条件 (i), (ii) を両方ともみたすように割り当てたい.

(i) 1以上 r 以下のすべての整数が少なくとも1箇所に割り当てられる.

(ii) 各三角形 $P_iP_jP_k$ にこおいて, 2辺には同じ整数が割り当てられ, それは残った辺に割り当てられた整数より大きい.

以下の問いに答えよ.

(a) このようなことが可能な整数 r の最大値を求めよ.

(b) r を (a) のように定めたとき, このような割り当て方は何通りあるか.

3. 鋭角三角形 ABC において, A, b, C , からそれぞれ BC, CA, AB に下ろした垂線の足を D, E, F とする. さらに, A, B, C からそれぞれ EF, FD, DE に下ろした垂線の足を p, Q, R とする. 三角形 T の周の長さを $p(T)$ と書くとき,

$$p(ABC) \cdot p(PQR) \geq p(DEF)^2$$

を示せ.

第2日(2006年3月27日)

4. 平行四辺形 $ABCD$ が与えられている. A を通る直線 l を, 平行四辺形 $ABCD$ の内部を通るように描く. l と直線 BC, DC の交点をそれぞれ X, Y とする. 三角形 ABX の傍接円のうち, 線分 BX に接するものの中心を K とする. また, 三角形 ADY の傍接円のうち, 線分 DY に接するものの中心を L とする. $\angle KCL$ の大きさは直線 l のとり方によらず一定であることを示せ. ただし, 三角形 T の傍接円とは, T を構成する3本の直線すべてに接し, かつ T の内部にない3つの円をいうものとする.

5. 実数 p, q, r, s が $p + q + r + s = 9$ かつ $p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 21$ をみたしているとき, (p, q, r, s) をうまく並び替えた (a, b, c, d) が $ad - bc \geq 2$ をみたすことを示せ.

6. a, b は正の整数で, 任意の正の整数 n について $b^n + n$ が $a^n + n$ で割りきれれるとする. $a = b$ を示せ.

第3日(2006年3月28日)

7. a, b, c, d, e, f を正の整数とし, その和を S とおく. $abc + def$ を $ab + bc + ca - de - ef - fd$ がともに S で割りきれるとき, S は正の約数を3つ以上もつことを示せ.

8. 正の実数に対して定義され, 正の実数を値とする関数 $f(x)$ であって, 任意の正の実数 x, y について

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x))$$

をみたすものをすべて求めよ.

9. n は2以上の整数, a_1, a_2, \dots, a_n は整数であり, $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ は n で割りきれれるとする. $(1, 2, \dots, n)$ を並び替えた2つの順列 $(p_1, p_2, \dots, p_n), (q_1, q_2, \dots, q_n)$ であって, 各 $i = 1, 2, \dots, n$ について $p_i + q_i \equiv a_i \pmod{n}$ をみたすようなものが存在することを示せ.

第3日(2006年3月29日)

10. ある家は有限個の部屋からなる. どの部屋にも3つ以上のランプがあり, 家全体では偶数個のランプがある. どのランプも他のちょうど1つのランプとスイッチを共有していて, スイッチを共有する2

つのランプは同じ部屋にあるかもしれないし、違う部屋にあるかもしれない。各スイッチを押すことにより、スイッチを共有している2つのランプの状態が同時に変わる。つまり、消えていたものはつき、ついていたものは消える。なお、1つのスイッチを共有する2つのランプの状態は同じとは限らない。最初いかなる状態であっても、スイッチの操作を有限回行うことによって、すべての部屋において、ついているランプと消えているランプがともに存在するようにできることを示せ。

11. $AB + BC = 3AC$ をみたす三角形 ABC において、内心を I とし、内接円と AB, BC の接点をそれぞれ D, E とする。 I に関して D, E と対称な点をそれぞれ K, L とする。4点 A, C, K, L は同一円周上にあることを示せ。

12. 以下の条件をみたす正の整数 n をすべて求めよ。

(条件) $n!$ 以下の正の整数 a であって、 $a^n + 1$ が $n!$ で割りきれられるようなものがただ1つ存在する。
ただし、 $n! = n(n-1)\cdots 1$ である。

2007年 春の合宿テスト

第1日 (2007年3月26日)

1. 実数 x に対し, x を超えない最大の整数を $[x]$ とし, $\langle x \rangle = x - [x]$ とする. 数列 a_0, a_1, a_2, \dots を, a_0 を任意の実数として次の漸化式により定義する.

$$a_{i+1} = [a_i] \langle a_i \rangle \quad (i \geq 0)$$

このとき, ある正の整数 N が存在して, $i > N$ ならば $a_i = a_{i+2}$ となることを示せ.

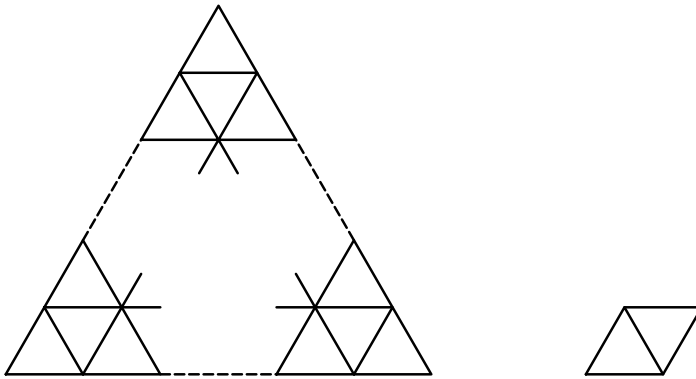
2. 次の方程式をみたす整数の組 (x, y) をすべて求めよ. ただし $x \neq 1$ とする.

$$\frac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1$$

3. 一辺1の正三角形 (以下では小三角形とよぶ) を隙間も重なりもなく左図のように並べて一辺 n の上向き正三角形 (以下では大三角形とよぶ) を作る. それらのうち, n 個の上向き小三角形を黒く塗る. 右図のような小三角形2つからなるひし形が十分たくさんあり, これは大三角形を構成している小三角形の境目にそって (自由に回転させて) 置くことができる. ただし黒く塗られている小三角形の上に置くことはできない. このとき, このひし形によって大三角形の黒く塗られていない部分を隙間も重なりもなく敷き詰められることと, 次は同値であることを示せ.

1以上 n 以下の任意の整数 k に対し, 以下の条件が成り立つ.

条件: (大三角形を構成する) 小三角形いくつかからなる一辺 k の上向きの正三角形には, 黒く塗られた小三角形は高々 k 個しか含まれない.



第2日 (2007年3月27日)

4. 正の整数に対して定義される関数 f を次のように定める.

$$f(n) = \frac{1}{n} \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} \right)$$

このとき, 次を示せ.

(a) $f(n+1) > f(n)$ をみたす正の整数 n は無限に存在する.

(b) $f(n+1) < f(n)$ をみたす正の整数 n は無限に存在する.

ただし, 実数 x に対し, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表すものとする.

5. (n, k) トーナメントとは, n 人の参加者と k 回のラウンドからなる大会で次の条件をみたすものをいう.

(i) 各ラウンドにおいて, どの参加者も自分以外の参加者ただ1人と対戦する.

(ii) 任意の2人の参加者は高々1度しか対戦しない.

(ii) 1以上 k 以下の整数 i, j に対し, もし第 i ラウンドで参加者 A と B の対戦と参加者 C と D の対戦が行われ, かつ第 j ラウンドで A と C が対戦するならば, 第 j ラウンドで B と D が対戦する.

(n, k) トーナメントが存在するような正の整数の組 (n, k) をすべて求めよ。

6. 三角形 ABC の辺 BC, CA, AB 上にそれぞれ点 A_1, B_1, C_1 をとる。三角形 ABC の外接円を ω とおく。三角形 AB_1C_1 の外接円と ω が 2 点で交わる時、 A でない方の交点を A_2 とし、この 2 円が接する場合は、 $A_2 = A$ とする。同様に、三角形 BC_1A_1 の外接円と ω の交点の 1 つを B_2 とし、 CA_1B_1 の外接円と ω の交点の 1 つを C_2 とする (どの交点をとるかは A_2 の場合と同様)。 A_1, B_1, C_1 の BC, CA, AB の中点に関する対称点をそれぞれ A_3, B_3, C_3 とおく。三角形 $A_2B_2C_2$ と $A_3B_3C_3$ は相似であることを示せ。

第 3 日 (2007 年 3 月 28 日)

7. 凸四角形 $ABCD$ の辺 AB, CD は平行で、 $AB > CD$ をみたす。 K, L はそれぞれ辺 AB, CD 上の点で、 $AK : KB = DL : LC$ をみたす。また、 P, Q は線分 KL 上の点で、

$$\angle APB = \angle BCD, \quad \angle CQD = \angle ABC$$

をみたす。このとき、 P, Q, B, C が同一円周上にあることを示せ。

8. 正の実数 a_1, a_2, \dots, a_n に対して、

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \leq \frac{n}{2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$$

が成り立つことを証明せよ。

9. n を任意の正の整数とする。 $2^m + m$ が n の倍数となるような整数 m が存在することを示せ。

第 4 日 (2007 年 3 月 29 日)

10. n を 2 以上の整数とする。 n 個のランプ L_1, L_2, \dots, L_n がこの順に一列に並んでいて、ランプは ON, OFF の 2 通りの状態をとる。時刻 0 では端のランプ L_1 のみが ON になっていて、次の規則に従って各ランプの状態は自動的に変化していく。

規則: 非負整数 t および各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対し、

- 時刻 t において、ランプ L_i とその隣 (L_1, L_n については 1 個、それ以外では 2 個) のランプがすべて同じ状態にあるとき、時刻 $(t+1)$ ではランプ L_i は OFF になる。
- そうでないとき、時刻 $(t+1)$ ではランプ L_i は ON になる。

このとき、次を示せ。

- (a) いくつかはすべてのランプが OFF になるような n が無限に存在する。
- (b) (a) の条件をみたさない n が無限に存在する。

11. $\angle C < \angle A < 90^\circ$ をみたす三角形 ABC の辺 AC 上に、点 D を $BD = BA$ となるようにとる。三角形 ABC の内接円と AB, AC の接点をそれぞれ K, L とおき、三角形 BCD の内心を J とする。直線 KL は線分 AJ の中点を通ることを示せ。

12. a, b, c を三角形の 3 辺の長さとするとき、

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \leq 3$$

が成り立つことを証明せよ。