第 1 〜 16 回 (1989 〜 2004 年) のアジア太平洋数学オリンピック (Asian Pacific Mathematical Olympiads) の問題を紹介します．第 17 回 (2005 年) 以降の問題は数学オリンピック財団のホームページに掲載されていますので，そちらをご覧下さい．下記問題の解答も作ってあるのですが，一部公式解答を参照していて，著作権上公開してよいのか定かでないので，申し訳有りませんがやめておきます.

誤訳の報告，疑問点の照会は安藤までご連絡下さい．ただし，解答を教えて下さい，という個別の要望には応じません．WEB をあちこち捜してもらえば，英語の解答は見つけられます.

Version 2022.12.5

第１回 アジア太平洋数学オリンピック

March, 1989

1. x_1, x_2,. . ., x_n は正の実数とし，$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ とする．このとき

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \leq 1 + S + \frac{S^2}{2!} + \frac{S^3}{3!} + \cdots + \frac{S^n}{n!}$$

であることを証明せよ．

2. 方程式 $6(6a^2 + 3b^2 + c^2) = 5n^2$ は $a = b = c = n = 0$ 以外の整数解を持たないことを証明せよ．

3. A_1, A_2, A_3 は平面上の同一直線上にない 3 点とし，形式的に $A_4 = A_1$, $A_5 = A_2$ とする．各 $n = 1, 2, 3$ に対し B_n は 線分 A_nA_{n+1} の中点，C_n は線分 A_nB_n の中点とする．また，直線 A_nC_{n+1} と B_nA_{n+2} の交点を D_n，直線 A_nB_{n+1} と C_nA_{n+2} の交点を E_n とする．このとき，三角形 $D_1D_2D_3$ と $E_1E_2E_3$ の面積の比を求めよ．

4. 集合 S は $1 \leqq a \leqq b \leqq n$ を満たす整数の組 (a, b), m 個から成る集合とする．このとき，少なくとも $4m \cdot \dfrac{m - \frac{n^2}{4}}{3n}$ 組の 3 つ組 (a, b, c) が存在して (a, b), (a, c), $(b, c) \in S$ となることを証明せよ．

5. 以下の 2 条件を満たす関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ をすべて求めよ．

(1) $f(x)$ は狭義単調増加である．

(2) $f(x) + g(x) = 2x$ が任意の実数 x に対し成立つ．ただし，g は，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ を満たす関数である．

第２回 アジア太平洋数学オリンピック

March, 1990

1. 三角形 ABC について, 点 D, E, F は各々線分 BC, AC, AB の中点であり, また G は三角形 ABC の重心とする. $\angle BAC$ の各値について, 四角形 $AEGF$ が円に内接するような相似でない三角形 ABC は何通りあるか?

2. a_1, a_2,…, a_n は正の実数とし, S_k は a_1, a_2,…, a_n の k 次基本対称式とする. このとき, 各 $k = 1, 2, \ldots, n-1$ に対し

$$S_k S_{n-k} \geqq \binom{n}{k}^2 a_1 a_2 \cdots a_n$$

が成り立つことを証明せよ.

3. 辺 AB を固定された底辺とし, 頂点 C が高さ h のところを動く三角形 ABC すべてを考える. 頂点 A, B, C から対辺への垂線の長さの積が最大になるのは, 三角形 ABC がどのようなときか.

4. 1990 人の人からなる集合を以下の条件を満たすように互いに交わらない何個かの空でない部分集合に分割する.

(a) 各部分集合に含まれる人で, その部分集合に含まれる他のすべての人と知り合いである人はいない.

(b) 各部分集合に含まれる任意の 3 人を選べば, その中の少なくとも 2 人はお互いに知り合いでない.

(c) 各部分集合に含まれる任意の互いに知り合いでない 2 人を選べば, その 2 人両方と知り合いである人がその部分集合の中に丁度 1 人だけいる.

(1) このとき, 各部分集合について, その部分集合に属する任意の人について (その部分集合の中に含まれる) 知人の数は同じであることを証明せよ.

(2) また, 上記の条件を満たすように分割した場合, 部分集合の個数の可能な最大値を求めよ.

ただし, 人 A が B を知っていれば, 必ず B も A を知っているものと仮定する. また, どの人も, 自分自身と知り合いであるとする. (各部分集合は, 少なくとも 3 人以上を含むものとする.)

5. 6 以上の任意の整数 n に対し, ある凸 6 角形で, 丁度 n 個の合同な三角形に分割できるものが存在することを証明せよ.

第3回 アジア太平洋数学オリンピック

March, 1991

1. 三角形 ABC について, G はその重心, M は線分 BC の中点とする. また, X は線分 AB 上の, Y は AC 上の点で, 3 点 X, G, Y は同一直線上にあり, さらにこの直線と BC は平行であるとする. さらに, 直線 XC と GB の交点を Q, 直線 YB と GC の交点を P とする. このとき, 三角形 MPQ と三角形 ABC は相似であることを証明せよ.

2. 平面上に 997 次の点がある. それらの 2 点の中点をすべて赤で塗る. このとき, 平面上に赤点は 1991 個以上存在することを証明せよ. また, 赤点が丁度 1991 個になる例を構成せよ.

3. $a_1,\ldots, a_n$, $b_1,\ldots, b_n$ は正の実数で, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$ を満たしているとする. このとき不等式

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k+b_k} \geqq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

が成り立つことを証明せよ. また, 等号が成立するのはいつか.

問 3 解答.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k+b_k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k+b_k)(a_k-b_k)}{a_k+b_k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{a_k+b_k} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k) + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{a_k+b_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{a_k+b_k}\end{aligned}$$

である. これと, $2(a_k^2+b_k^2) \geqq (a_k+b_k)^2$ を用いて,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k+b_k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2+b_k^2}{a_k+b_k} \geqq \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

が得られる. 等号成立は, $0 = 2(a_k^2 + b_k^2) - (a_k + b_k)^2 = (a_k - b_k)^2$ が成立するときだから, すべての k に対し $a_k = b_k$ のときである.

4. 学校の休み時間に n 人の生徒がゲームをするために先生の回りに輪になって (円周上に) 並んでいる. 先生は時計回りに生徒の間を回り, キャンディーを以下のルールで配っている. 最初, 先生はひとりの生徒を選びキャンディーを 1 個あげる. 次に, 先生は次の生徒をひとり抜いて, その次の生徒にキャンディーを 1 個あげる. その次に, 先生は次の生徒を 2 人とばして, その次の生徒にキャンディーを 1 個あげる. そのまた次は 3 人とばし, 以下同様である. 先生が何個目のキャンディーを配ったとき, 生徒全員が少なくとも 1 個のキャンディーをもらったことになるか.

5. ふたつの円 C_1, C_2 が外接している. その接点を通り, C_1 と C_2 の中心を通る直線と垂直な共接線上に点 P がある. C_1 と C_2 に接し, 点 P を通る円を定規とコンパスを用いて作図せよ. その作図方法の正当性も示すこと.

第4回 アジア太平洋数学オリンピック

March, 1992

1. 3 辺の長さが a, b, c の三角形があるとき, $s = (a+b+c)/2$ とし, 3 辺の長さが $s-a, s-b, s-c$ の三角形を作る. (作れないこともある.) この操作を, これ以上三角形が作れなくなるまで繰り返す. この操作が無限に続けられるために, 最初の三角形が満たすべき必要十分条件を求めよ.

2. 点 O を中心とする半径 r の円 C の中に, 各々 O_1, O_2 を中心とする半径 r_1, r_2 の円 C_1, C_2 があり, C_i は点 A_i で C に内接し $(i = 1, 2)$, C_1 と C_2 は点 A で外接しているとする. このとき 3 直線 OA, O_1A_1, O_2A_2 は 1 点で交わるか一致することを証明せよ.

3. n は $n > 3$ なる整数とする. 集合 $\{2, 3, \ldots, n\}$ から相異なる 3 個の元を取り出す. これらの 3 個の数を各々1 回づつと, $+$, $\times$ 及びカッコを用いた数式の答として得られるすべての数を考える.

(1) 選んだ 3 個の数がすべて $n/2$ より大きいならば, 得られる答はすべて異なる数であることを示せ.

(2) p は $p \leqq \sqrt{n}$ なる素数とする. 最初の 3 つの整数のうち最小なものは p で, 得られる答の中に同じ数も含まれているような, 最初の 3 つの整数の選び方の場合の数は, $p-1$ の正の約数の個数に等しいことを証明せよ.

4. 平面上に h 本の水平な直線を描き, さらに, 別の s 本の直線を以下の条件を満たすように描く.

s 本の直線は水平でない.

s 本の直線のうちどの 2 本も平行でない.

$h+s$ 本の直線のうちどの 3 本も 1 点で交わらない.

このとき $h+s$ 本の直線により, 平面は 1992 個の領域に分割されるという. このような性質を満たす正の整数の組 (h, s) をすべて求めよ.

5. (1977IMO 問 2 と本質的に同じ.) 0 でない整数の有限数列において, どの連続する 7 個の項の和も正であり, どの連続する 11 個の項の和も負である. このような数列の項数の最大値を決定せよ.

参考. 1977IMO 問 2. 実数の有限数列において, どの連続する 7 個の項の和も負であり, どの連続する 11 個の項の和も正である. このような数列の項数の最大値を決定せよ.

第5回 アジア太平洋数学オリンピック

March, 1993

1. ひしがた $ABCD$ において $\angle ABC = 60^\circ$ である. l は点 D を通る直線で D 以外の点でひしがた $ABCD$ と交わらないものとする. 点 E, F は各々直線 l 直線 AB, BC の交点とする. また M は直線 CE と AF の交点とする. このとき $CA^2 = CM \times CE$ であることを示せ.

2. $0 \leqq x \leqq 100$ のとき関数 $f(x) = [x] + [2x] + [5x/3] + [3x] + [4x]$ は何通りの整数の値を取るか.

3. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ と $g(x) = c_{n+1}x^{n+1} + c_n x^n + \cdots + c_0$ は 0 でない実数係数多項式である実数 r に対し $g(x) = (x+r)f(x)$ を満たすとする. さて $a = \max\{|a_n|,\ldots, |a_0|\}$, $c = \max\{|c_{n+1}|,\ldots, |c_0|\}$ とするとき $a/c \leqq n+1$ であることを証明せよ.

4. 方程式 $x^n + (2+x)^n + (2-x)^n = 0$ が少なくともひとつの整数解を持つような正の整数 n をすべて求めよ.

5. 5. $P_1, P_2, \ldots, P_{1993} = P_0$ は xy-平面上の相異なる点で, 以下の条件を満たすとする.

(i) 各 $i = 1, 2, \ldots, 1993$ について P_i は格子点 (両方の座標が整数) である.
(ii) 各 $i = 0, 1, \ldots, 1992$ について, 線分 P_iP_{i+1} 上の格子点は P_i と P_{i+1} 以外に存在しない.

このとき $0 \leqq i \leqq 1992$ を満たすある i と, 線分 P_iP_{i+1} 上のある点 Q が存在して, Q の座標を (q_x, q_y) とするとき, $2q_x$ と $2q_y$ はいずれも奇数の整数となることを証明せよ.

第 6 回 アジア太平洋数学オリンピック

March, 1994

1. 関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は以下の条件を満たすとする.
 (i) 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対し $f(x)+f(y)+1 \geqq f(x+y) \geqq f(x)+f(y)$ を満たす.
 (ii) 任意の $x \in [0, 1)$ に対し $f(0) \geq f(x)$ である.
 (iii) $-f(-1) = f(1) = 1$.
このような f をすべて決定せよ.

2. 非退化 (つぶれていない) 三角形 ABC の外心を O, 垂心を H, 外接円の半径を R とする. このとき $|OH| < 3R$ であることを証明せよ.

3. n は a^2+b^2 という形の整数で, a, b は互いに素で, $p \leqq \sqrt{n}$ なる任意の素数 p に対し p は ab の約数出あるという. そのような n をすべて求めよ.

4. 平面上の, 無限個の点からなる集合で, どの 3 点も 1 直線上になく, どの任意の 2 点間の距離も有理数であるような集合はそんざいするか.

5. 以下の様な表はあり, 3 つの欄 A, B, C がある. A 欄には十進法で 10^k (k は 1 以上のすべての数) という形の数が順に書かれている. B 欄と C 欄には, A 欄の数を各々, 二進法と五進法で書いたものが書かれている.

A	B	C
10	1010	20
100	1100100	400
1000	1111101000	13000
⋮	⋮	⋮

このとき任意の整数 $n > 1$ に対し, B 欄または C 欄の中に, 丁度 n 桁の数が丁度ひとつだけ存在することを証明せよ.

第７回 アジア太平洋数学オリンピック

March, 1995

1. 次の性質を満たす実数列 a_1, a_2,..., a_{1995} をすべて求めよ.

各 $n = 1, 2, \ldots, 1994$ に対し $2\sqrt{a_n - (n-1)} \geqq a_{n+1} - (n-1)$ が成り立つ.

$2\sqrt{a_{1995} - 1994} \geqq a_1 + 1$.

2. a_1, a_2,..., a_n は 2 以上 1995 以下の整数のみを項とする数列で, 以下の条件を満たすものとする.

(i) どのふたつの a_i も互いに素である.

(ii) 各 a_i は素数か, あるいは何個かの素数の積である.

以上の性質を満たす任意の数列が必ず少なくとも 1 個の素数を含むような最小の n の値を求めよ.

3. 四角形 $PQRS$ は円に内接し, 辺 PQ と RS は平行でない. 2 点 P, Q を通る円全体の集合, 及び, 2 点 R, S を通る円全体の集合を考える. ふたつの集合からひとつづつ円を選び, それらが接するときの接点全体の集合 (円をいろいろ変える) A を求めよ.

4. C は O を中心とし半径 R の円, S は C 内の固定点とする. AA' と BB' は点 S と通る 2 つの弦で, 互いに垂直であるとする. また $SAMB$, $SBN'A'$, $SA'M'B'$, $SB'NA$ は長方形とする. A が全円周上を動くとき, M, N', M', N の軌跡の和集合をもとめよ.

5. 関数 $f\colon \mathbb{Z} \to \{1, 2, \ldots, k\}$ で, $|x - y| \in \{5, 7, 12\}$ ならば $f(x) \neq f(y)$ を満たすようなものが存在する最小の正の整数 k を求めよ.

第 8 回 アジア太平洋数学オリンピック

March, 1996

1. $ABCD$ は $AB = BC = CD = DA$ を満たす四角形とする．また, M は辺 AD 上の点, N は辺 DC 上の点, P は辺 AB 上, Q は辺 BC 上の点であり, 辺 MN, PQ は対角線 BD に垂直で MN と PQ の間の距離 d は $d > BD/2$ を満たすとする．このとき, 六角形 $AMNCQP$ の周の長さは d が一定である限り MN および PQ の位置に依存しないことを証明せよ．

2. m, n は $n \leqq m$ なる正の整数とする．このとき

$$2^n n! \leqq \frac{(m+n)!}{(m-n)!} \leqq (m^2+m)^n$$

が成り立つことを証明せよ．

3. P_1, P_2, P_3, P_4 は同一円周上の 4 点とし, I_1 は三角形 $P_2P_3P_4$ の内心, I_2 は三角形 $P_1P_3P_4$ の内心, I_3 は三角形 $P_1P_2P_4$ の内心, I_4 は三角形 $P_1P_2P_3$ の内心とする．このとき I_1, I_2, I_3, I_4 はある長方形の頂点になっていることを証明せよ．

4. 国立結婚評議会は n 組の夫婦を招待して 17 の分科会を, 以下の条件を満たすように作りたいと思っている．

(a) どの分科会も, 同性の人から成る．つまり, 各分科会のメンバーは全員男か全員女である．

(b) どの 2 つの分科会を選んでも, その人数の差は 1 人以内である．

(c) どの分科会にも 1 人以上のメンバーがいる．

(d) どの招待者も, 丁度 1 つの分科会に所属する．

以上のことが可能な 1996 以下のすべての n を求めよ．

5. a, b, c はある三角形の 3 辺の長さとする．このとき,

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leqq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

であることを証明せよ．また等号が成立するのはいつか．

第９回 アジア太平洋数学オリンピック

March 13, 1997

1.
$$S = 1 + \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2}} + \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3}} + \cdots + \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+4+\cdots+1995+1996}}$$
とする．このとき $S > 1001$ であることを証明せよ．

2. $100 \leqq n \leqq 1997$ なる整数 n で $2^n + 2$ が n の倍数になっているようなものを見つけよ．

3. 三角形 ABC は円 Γ に内接している．m_a, m_b, m_c は各々頂角 A, B, C の二等分線の，それらの対辺までの長さとし，また，M_a, M_b, M_c は，各々，これらの二等分線の延長と Γ の交点までの長さとする．さらに，$l_a = \dfrac{M_a}{m_a}$, $l_b = \dfrac{M_b}{m_b}$, $l_c = \dfrac{M_c}{m_c}$ とする．このとき
$$\frac{l_a}{\sin^2 A} + \frac{l_b}{\sin^2 B} + \frac{l_c}{\sin^2 C} \geqq 3$$
であることを証明せよ．また，等号成立は ABC が正三角形の場合であることを示せ．

4. 三角形 $A_1A_2A_3$ は $A_3 = 90°$ の直角三角形である．各 $n \geqq 3$ に対し，帰納的に，A_n $(n \geqq 3)$ から線分 $A_{n-2}A_{n-1}$ に下ろした垂線の足を A_{n+1} とする．このとき，任意の三角形 $A_{n-2}A_{n-1}A_n$ $(n \geqq 3)$ の内部に含まれる点 P がただひとつ存在する．2 点 A_1, A_2 を固定し，A_1A_2 を直径とする半円周上を点 A_3 を動かすとき，点 P の軌跡を求めよ．

5. n 人の人 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geqq 3)$ が円の回りに座っていて, A_i は a_i 個の品物を持っている. また N をある正の整数とし, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = nN$ を満たす. すべての人が同じ個数の品物を持つために, 各 A_i は両隣の A_{i-1} と A_{i+1} に何個かの品物を渡したり受け取ったりする. ただし, $A_{n+1} = A_1$, $A_0 = A_n$ と約束する. 受け渡される品物の個数の合計を最小にするためには, どのようにすればよいか.

第１０回 アジア太平洋数学オリンピック

March 13, 1998

1. $\{1,\ 2,\ldots,\ 1998\}$ の n 個の部分集合 $A_1,\ A_2,\ldots,\ A_n$ の順列 $(A_1,\ A_2,\ldots,\ A_n)$ 全体の集合を F とする. (順列の成分に同じ集合が含まれていてもよい.) このとき,

$$\sum_{(A_1,\ldots,A_n)\in F} \left|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right|$$

を求めよ. ただし, $|A|$ は集合 A の要素の個数を表す.

2. $(36a+b)(a+36b)$ が 2 の累乗になるような正の整数 a, b は存在しないことを証明せよ.

3. a, b, c が正の実数のとき, 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geqq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

4. 三角形 ABC の頂点 A から辺 BC へ下ろした垂線の足を D とする. 点 E, F は D を通る直線上の 2 点で, $AE \perp BE$, $AF \perp CF$, $D \neq E$, $D \neq F$ を満たすとする. 線分 BC, EF の中点を各々 M, N とするとき, $AN \perp NM$ であることを証明せよ.

5. $\sqrt[3]{n}$ 以下のすべての正の整数で割り切れるような整数 n の中で最大なものを求めよ.

第１１回 アジア太平洋数学オリンピック

March, 1999

1. 次の条件 $(*)$ を満たす最小の正の整数 n を求めよ.

$(*)$ 1999 項の実数の等差数列で, 丁度 n 個の整数の項を持つような数列は存在しない.

2. $a_1, a_2, \ldots$ は実数列で, 各 $i, j = 1, 2, \ldots$ に対し $a_{i+j} \leqq a_i + a_j$ を満たす. このとき, 各自然数 n に対し

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n} \geqq a_n$$

が成り立つことを証明せよ.

3. 2 円 Γ_1, Γ_2 が 2 点 P, Q で交わっている. Γ_1 と Γ_2 の共通外接線のうち P に近いほうの直線が, Γ_1, Γ_2 と接する点を各々 A, B とする. 点 P における Γ_1 の接線が Γ_2 と交わる点を C $(C \neq P)$ とする. また, 直線 AP と BC の交点を R とする. このとき, 三角形 PQR の外接円は直線 BP と BR に接することを証明せよ.

4. $a^2 + 4b$ と $b^2 + 4a$ がともに完全平方数となるような整数の組 (a, b) をすべて求めよ.

5. S は平面上の $2n+1$ 個の点の集合で, そのうちのどの 3 点も同一直線上になく, どの 4 点も同一円周上にない. ある円が S の 3 点を通り, $n-1$ 個の点を内部に含み, $n-1$ 個の点を外部に含むとき, その円は「良い」と呼ばれる. 良い円の個数と n は奇偶が同じであることを証明せよ.

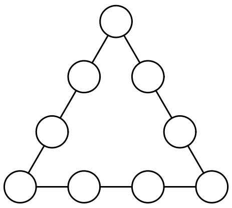
第１２回 アジア太平洋数学オリンピック

March, 2000

1. $x_i = \dfrac{i}{101}$ とするとき, 次の和の値を求めよ.

$$S = \sum_{i=0}^{101} \frac{x_i^3}{1 - 3x_i + 3x_i^2}$$

2. 1 から 9 までの数字を 1 回ずつ用いて, 下の図形の○の中に 1 個ずつ書き, 3 辺に書かれた 4 個の数の和が等しく, 3 辺に書かれた 4 個の数の 2 乗の和が等しくなるようにしたい. そのような, 方法をすべて求めよ.



三角形 ABC の頂角 $\angle A$ の二等分線と BC の交点を N とし, 辺 BC の中点を M とする. N を通り AN に垂直な直線と, AB, AM との交点を各々 P, Q とする. また, P を通り AB に垂直な直線と, AN との交点を O とする. このとき, OQ は BC に垂直であることを証明せよ.

3. 三角形 ABC の頂角 $\angle A$ の二等分線と BC の交点を N とし, 辺 BC の中点を M とする. N を通り AN に垂直な直線と, AB, AM との交点を各々 P, Q とする. また, P を通り AB に垂直な直線と, AN との交点を O とする. このとき, OQ は BC に垂直であることを証明せよ.

4. n, k が正の整数で $n > k$ のとき, 次の不等式を証明せよ.

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}} &< \frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &< \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}\end{aligned}$$

5. n は正の整数とする. $(0, 1,\ldots, n)$ を並び変えて得られる順列 $(a_0, a_1,\ldots, a_n)$ を置換という. a_i と a_j だけを入れ替える置換を互換といい, この a_i と a_j が, $i > 0$, $a_i = 0$, $a_j = a_{i-1} + 1$ を満たすとき, 適法な互換であるという. 順列 $(a_0, a_1,\ldots, a_n)$ に対して適法な互換を何回か繰り返すと $(1, 2,\ldots, n, 0)$ が得られるとき, $(a_0, a_1,\ldots, a_n)$ は正則であるという. $(1, n, n-1,\ldots, 3, 2, 0)$ が正則な置換になるような n の値をすべて求めよ.

第１３回 アジア太平洋数学オリンピック

March, 2001

1. 正の整数 n に対し, n を十進法で表したときの各桁の数字の和を $S(n)$ とする. また, n の右から連続する 1 個以上の桁の数字を取り除いてできる数を切り株と呼ぶ. n のすべての切り株の和を $T(n)$ とする. このとき次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$n = S(n) + 9T(n)$$

2. 次の条件を満たす最大の正の整数 N を求めよ.
集合 $\{1, 2, \ldots, N\}$ の中の 3 の倍数の個数と, この集合の中の 5 または 7 の倍数の個数は等しい.

3. 合同なふたつの正 n 角形 S, T が同一平面上にあり, その共通部分は $2n$ 角形であるという ($n \geqq 3$). S の辺を赤, T の辺を青で塗る. このとき, 多角形 $S \cap T$ において, 赤い辺の長さの和と, 青い辺の長さの和は等しいことを証明せよ.

4. 座標平面上の点は, 一方の座標が有理数で他方が無理数のとき, 混合点と呼ぶ. 実数係数多項式で, そのグラフが混合点を通らないようなものを, すべて求めよ.

5. 次の条件を満たす最大の正の整数 n を求めよ.
平面上に相異なる $n+4$ 個の点 A, B, C, D, $X_1, \ldots, X_n$ を適当に取れば, $AB \neq CD$ であり, 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し, 三角形 ABX_i と CDX_i は合同 (頂点はこの順に対応しなくてよい) である.

第１４回 アジア太平洋数学オリンピック

March, 2002

受験生への注意**:** この問題が APMO の公式 WEB サイトに掲載されるまでは, この問題を誰にも教えてはいけません。特に, インターネットで公開してはいけません。(他の国では, 若干前後する日時にこの試験を行います。)

解答時間: 4 時間

電卓使用禁止
各問 7 点

1. n は正の整数で, a_1, a_2, a_3,..., a_n は非負整数列である。

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

とおくとき,

$$a_1!a_2!\cdots a_n! \geqq (\lfloor A_n \rfloor !)^n$$

であることを証明せよ。また, 等号はいつ成立するか。ここで, $\lfloor A_n \rfloor$ が A_n を超えない最大の整数を表わし, $a! = 1 \times 2 \times \cdots \times a$ ($a \geqq 1$ のとき), $0! = 1$ である。

2. $\dfrac{a^2+b}{b^2-a}$ と $\dfrac{b^2+a}{a^2-b}$ がいずれも整数になるような正の整数 a, b をすべて求めよ。

3. 三角形 ABC は正三角形で, P は辺 AC 上の点, Q は辺 AB 上の点で, 三角形 ABP と ACQ は鋭角三角形である。三角形 ABP の垂心を R, 三角形 ACQ の垂心を S とする。線分 BP と CQ の交点を T とする。このとき, 三角形 TRS が正三角形になるような $\angle$CBP と $\angle$BCQ の値をすべて求めよ。

4. x, y, z が正の実数で, $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$ を満たしているとき, 次の不等式を証明せよ。

$$\sqrt{x+yz} + \sqrt{y+zx} + \sqrt{z+xy} \geqq \sqrt{xyz} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

5. 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す。次の条件 (i), (ii) を満たす $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数 f をすべて求めよ。

(i) $f(s) = 0$ を満たす $\mathbb{R}$ の要素 s は高々有限個しか存在しない。

(ii) $f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(f(y))$ が $\mathbb{R}$ の任意の要素 x, y について成り立つ。

第１５回 アジア太平洋数学オリンピック

2003 年 3 月

解答時間: 4 時間

電卓使用禁止
各問 7 点

1. a, b, c, d, e, f は実数で, 多項式

$$p(x) = x^8 - 4x^7 + 7x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

は 8 個の 1 次式 $x - x_i$ ($x_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, 8$) の積に因数分解できる。このとき, f として可能な値をすべて求めよ。

2. 1 辺の長さが a の正方形 ABCD の形の紙片が 1 枚ある。ある平面上に平行な 2 直線 ℓ_1 と ℓ_2 があり, この 2 直線の間の距離は a である。正方形 ABCD を辺 AB, AD が ℓ_1 とそれぞれ点 E, F で交わり, 辺 CB, CD が ℓ_2 とそれぞれ点 G, H で交わるように, この平面上に置く。$\triangle AEF$, $\triangle CGH$ の周の長さをそれぞれ m_1, m_2 とする。どのように正方形をおいても, $m_1 + m_2$ の値は常に一定であることを証明せよ。

3. k は $k \geqq 14$ を満たす整数で, p_k は k 未満の最大の素数とする。このとき, $p_k \geqq \dfrac{3k}{4}$ が成り立つことは認めて使ってよい。n は合成数 (素数でない整数) とする。このとき, 以下を証明せよ。
(a) $n = 2p_k$ のとき, n は $(n-k)!$ の約数でない。
(b) $n > 2p_k$ のとき, n は $(n-k)!$ の約数である。

4. a, b, c はある三角形の 3 辺の長さで, $a + b + c = 1$ を満たすとする。また n は $n \geqq 2$ を満たす整数とする。このとき, 次の不等式を証明せよ。

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} + \sqrt[n]{b^n + c^n} + \sqrt[n]{c^n + a^n} < 1 + \frac{\sqrt[n]{2}}{2}$$

5. 2 つの正の整数 m, n が与えられたとき, 次の性質を満たす最小の正の整数 k を求めよ。

k 人の集団の中から, お互いに知り合いである 2 人のペア m 組からなる $2m$ 人のグループか, お互いに知り合いでない 2 人のペア n 組からなる $2n$ 人のグループを選び出すことができる。

第１６回 アジア太平洋数学オリンピック

2004 年 3 月

解答時間: 4 時間

電卓使用禁止
各問 7 点

1. 正の整数からなる有限集合 S で,

$$i, j \in S \text{ ならば } \frac{i+j}{\mathrm{GCD}(i,j)} \in S$$

を満たすような S をすべて求めよ。

2. 鋭角三角形 ABC の外心を O, 垂心を H とする。三角形 AOH, BOH, COH のうち何れかの面積は, 他の 2 つの三角形の面積の和に等しいことを証明せよ。

3. S は平面上の 2004 個の点からなる集合で, そのどの 3 点も同一直線上にないものとする。S の 2 点を結ぶ直線全体の集合を $\mathcal{L}$ とする。このとき, S の点を高々2 色で塗り分けて, S の 2 点 p, q に対し, p と q を分離する $\mathcal{L}$ の直線の本数が奇数であるときに限って p と q が同色であるようにできることを証明せよ。

ただし, 直線 ℓ が p, q を**分離する**とは, p, q が直線 ℓ に関して反対側にあることを言う。

4. 実数 x に対し, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す。このとき, 任意の正の整数 n に対し

$$\left\lfloor \frac{(n-1)!}{n(n+1)} \right\rfloor$$

は偶数であることを証明せよ。

5. a, b, c が正の実数のとき, 次の不等式が成立することを証明せよ。

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geqq 9(ab+bc+ca)$$