線形代数学Ｂ２講義ノート

安藤哲哉

注意: (1) 校正をあまりきちんとしていないので，誤植等に注意して利用して下さい．
(2) 講義中に配布した演習問題と解答は含まれていません．
(3) 14 回分 (15 回目が試験) に再編成したので，1 回分の終わりが単元の切れ目になっていません．

1. ベクトル空間と基底

集合の要素のことを**元**ともいう．x が集合 A の元のとき $x \in A$ とか $A \ni X$ と書く．x が集合 A の元でないとき $x \notin A$ とか $A \not\ni X$ と書く．

定義 1.1. (I) 集合 G 上に (2 項) 演算 $*$ が定められていて，また，$e \in G$ であるとする．
(0) (G は $*$ について閉じている) $x, y \in G$ ならば $x * y \in G$.
(1) (結合法則) $x, y, z \in G$ ならば $(x * y) * z = x * (y * z)$
(2) (e は単位元) $x \in G$ ならば $e * x = x,\ x * e = x$.
(3) (逆元の存在) $x \in G$ ならば，ある $y \in G$ が存在して，$x * y = e,\ y * x = e$.
を満たすとき，G は演算 $*$ について e を単位元とする**群** (group) であるという．(3) において，y を $*$ に関する x の**逆元**という．G が $*$ について群であって，
(4) (交換法則) $x, y \in G$ ならば $x * y = y * x$.
が成り立つとき，G は **Abel** 群であるという．

(II) 集合 K に和 $+$ と積 $\times$ ($x \times y$ は $x \cdot y$ とか xy とも書く) が与えられていて，
(1) K は加法 $+$ について 0 を単位元とする Abel 群である．
(2) $K^\times := \{x \in K \mid x \neq 0\}$ とおくとき，$K^\times$ は積について 1 を単位元とする Abel 群である．また，$0 \neq 1$ である．
(3) (分配法則) $x, y, z \in K$ ならば $(x + y)z = xz + yz$.
が成り立つとき，K は**体** (たい，field) であるという．

例えば，実数全体の集合 $\mathbb{R}$, 複素数全体の集合 $\mathbb{C}$, 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ はいずれも体である．体の意味がよくわからない人は，この授業では，$\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ が体であると思って聞いてもらっても構わない．

(III) K は体とし，V は加法 $+$ について 0 を単位元とするアーベル群とする．K の勝手な元 a と V の勝手な元 x の間に**スカラー倍**と呼ばれる演算 ax が定まっていて，$ax \in V$ が成り立つと仮定する．さらに，
(1) (分配法則) $a, b \in K,\ x, y \in V$ ならば，$(a + b)x = ax + bx,\ a(x + y) = ax + ay$.
(2) (結合法則) $a, b \in K,\ x \in V$ ならば，$(ab)x = a(bx)$.
(3) (1 の自明な作用) $x \in V$ ならば $1x = x$. ここで 1 は K の乗法の単位元である．
が成り立つと仮定する．このとき V は K-**ベクトル空間**であるという．V の元を**ベクトル**，K の元を**スカラー**という．
$K = \mathbb{R}$ のとき**実ベクトル空間**, $K = \mathbb{C}$ のとき**複素ベクトル空間**, $K = \mathbb{Q}$ のとき**有理ベクトル空間**という．

(IV) V, W は集合とする．V の各元 v に対し W の 1 つの元 $f(v) \in W$ を対応させる規則 f を**写像** (mapping) といい，$f{:}V \to W$ とか $V \xrightarrow{f} W$ と書く．V を f の**定義域**といい，W を f の**終域**という．W が数の集合のときは，写像のことを**関数**といもいう．

(V) V, W は K-ベクトル空間とする．写像 $f{:}V \longrightarrow W$ が，
(1) $x, y \in V$ ならば $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
(2) $a \in K,\ x \in V$ ならば $f(ax) = af(x)$.
を満たすとき，f は (K-) **線形写像**であるという．
なお，(1), (2) が成り立てば，$a_1, a_2, \ldots, a_n \in K,\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ ならば $f(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) = a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + \cdots + a_nf(x_n)$ が成り立つ．

(VI) V は K-ベクトル空間, $W \subset V$ は部分集合とする．

(1) $x, y \in W$ ならば $x+y \in W$.
(2) $a \in K$, $x \in W$ ならば $ax \in W$.
が成り立つとき，W も K-ベクトル空間になる．W は V の (K-) **部分** (**ベクトル**) **空間**であるという．

なお，(1), (2)が成り立てば，$a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in W$ ならば $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n \in W$ が成り立つ．

例&定義 1.2. (1) K の元を成分とする長さ n の列ベクトル全体の集合を K^n と書く．K^n に通常の和とスカラー倍を定めると，K^n は K-ベクトル空間になる．

(2) K の元を成分とする m 行 n 列の行列全体の集合を $M_{mn}(K)$ と書く．$M_{mn}(K)$ に通常の和とスカラー倍を定めると，$M_{mn}(K)$ は K-ベクトル空間になる．なお，$m=n$ の場合，$M_{nn}(K)$ を $M_n(K)$ とも書く．

(3) X を集合とし，X から K への写像全体の集合を $\mathrm{Map}(X, K)$ と書くことにする．$f\colon X \to K$, $g\colon X \to K$, $a \in K$ に対し，和 $f+g$ を $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ $(x \in X)$, スカラー倍 af を $(af)(x) = a(f(x))$ によって定める．すると，$\mathrm{Map}(X, K)$ は K-ベクトル空間になる．

(4) 行列 $A \in M_{mn}(K)$ を 1 つ固定する．$f_A\colon K^n \longrightarrow K^m$ を，列ベクトル $\mathbf{x} \in K^n$ に対し $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \in K^m$ で定める．すると，$f_A\colon K^n \longrightarrow K^m$ は線形写像になる．この f_A を行列 A が定める線形写像という．

(5) K は体，V, W は K-ベクトル空間とする．V から W への線形写像 $f\colon V \to W$ 全体の集合を $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ と書く．(3) の特殊な場合として，$\mathrm{Hom}_K(V, W)$ は K-ベクトル空間になる．後で示すが，$\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ は $M_{mn}(K)$ と同一視できる．

(6) K は体，V は K-ベクトル空間，$x_1, \ldots, x_n \in V$ とする．今，
$$W := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \;\middle|\; a_1, \ldots, a_n \in K \right\}$$
とおく．すると W は V の部分空間になる．この W を $Kx_1+\cdots+Kx_n$ とか $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Kx_i$ とか $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ と書き，$x_1, \ldots, x_n$ によって**生成される** V の部分空間という．また，組 (集合) $x_1, \ldots, x_n$ は W の**生成系**であるとか，**生成元**であるという．

定義 1.3. K は体，V は K-ベクトル空間，$x_1, \ldots, x_n \in V$ とする．$a_1, \ldots, a_n \in K$, $a_1x_1+\cdots+a_nx_n = 0$ が成り立つのは $a_1 = \cdots = a_n = 0$ の場合以外にないとき，n 個のベクトル $x_1, \ldots, x_n$ は (K 上)**1 次独立**であるとか**線形独立**であるという．1 次独立でないとき，**1 次従属**であるとか**線形従属**という．

$x_1, \ldots, x_n \in V$ が 1 次独立であって，かつ，V の生成系であるとき，組 (集合) $x_1, \ldots, x_n$ は V の (K 上の) **基底** (base) であるという．

$V = K^n$ の場合には，$\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ は K^n の基底になる．これを K^n の**標準基底**という．また，各 $\mathbf{e}_i$ を**基本ベクトル**という．

命題 1.4. K は体，V は K-ベクトル空間，$x_1, \ldots, x_n \in V$ は 1 次独立であると仮定する．$a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n \in K$, $a_1x_1+\cdots+a_nx_n = b_1x_1+\cdots+b_nx_n$ ならば，$a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$ である．

証明. $(a_1-b_1)x_1+\cdots+(a_n-b_n)x_n = 0$ だから，1 次独立の定義から $a_1-b_1 = 0, \ldots, a_n-b_n = 0$ となる． □

定理 1.5. K は体，$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in K^n$ とする．一般に，この m 個の列ベクトル $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ を左から右に並べてできる n 行 m 列の行列を $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ と書く．今，$A = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ とする．
(1) $C \in M_{ln}(K)$ のとき，$CA = (C\mathbf{x}_1, \ldots, C\mathbf{x}_m)$ である．
(2) $r = \mathrm{rank}\, A$ とし，A から作られる階段行列を B とする．B の j 列目の列ベクトルを $\mathbf{b}_j$ とする．$\mathrm{rank}\, B = r$ だから，B の列ベクトルの中に基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ が現れるが，いま $\mathbf{b}_{j_1} = \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{b}_{j_r} = \mathbf{e}_r$ であるとする．すると，A の対応する列の列ベクトル $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_r}$ は 1 次独立である．さらに，B の (i, j)-成分を b_{ij} とするとき，$\mathbf{x}_k = b_{1,k}\mathbf{x}_{j_1}+\cdots+b_{r,k}\mathbf{x}_{j_r}$ が成り立つ．

(3) $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m$ が 1 次独立であるための必要十分条件は $\mathrm{rank}\,A = m$ が成り立つことである．
(4) 特に $m = n$ の場合には，$\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ が 1 次独立であるための必要十分条件は $\det A \neq 0$ が成り立つことである．これは，A の逆行列 A^{-1} が存在することと同値である．ここで，$\det A$ は A の行列式である．

証明. (1) は行列の積の定義を書いただけである．

(2) B は A から行基本変形で得られるが，行基本変形は A に左から可逆行列を掛ける操作である．よって，C^{-1} を持つある n 次正方行列 C により，$B = CA$ と書ける (下の補足説明参照)．すると，$\mathbf{b}_j = C\mathbf{x}_j$, $\mathbf{x}_j = C^{-1}\mathbf{b}_j$ $(j = 1,\ldots, m)$ である．

(2-1) $\mathbf{x}_{j_1},\ldots,\mathbf{x}_{j_r}$ が 1 次独立であることを示す．

$a_1,\ldots, a_r \in K$, $a_1\mathbf{x}_{j_1} + \cdots + a_r\mathbf{x}_{j_r} = \mathbf{0}$ であるとする．C を左から書けると，

$$\mathbf{0} = C\big(a_1\mathbf{x}_{j_1} + \cdots + a_r\mathbf{x}_{j_r}\big) = a_1C\mathbf{x}_{j_1} + \cdots + a_rC\mathbf{x}_{j_r} = a_1\mathbf{b}_{j_1} + \cdots + a_r\mathbf{b}_{j_r} = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_r\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって，$a_1 = \cdots = a_r = 0$ となり，$\mathbf{x}_{j_1},\ldots, \mathbf{x}_{j_r}$ は 1 次独立である．

(2-2) $\mathbf{x}_k = b_{1,k}\mathbf{x}_{j_1} + \cdots + b_{r,k}\mathbf{x}_{j_r}$ を証明する．

$$\mathbf{b}_k = \begin{pmatrix} b_{1,k} \\ \vdots \\ b_{r,k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = b_{1,k}\mathbf{e}_1 + \cdots + b_{r,k}\mathbf{e}_r = b_{1,k}\mathbf{b}_{j_1} + \cdots + b_{r,k}\mathbf{b}_{j_r}$$

である．左から C^{-1} を掛けると，

$$\mathbf{x}_k = C^{-1}\mathbf{b}_k = b_{1,k}C^{-1}\mathbf{b}_{j_1} + \cdots + b_{r,k}C^{-1}\mathbf{b}_{j_r} = b_{1,k}\mathbf{x}_{j_1} + \cdots + b_{r,k}\mathbf{x}_{j_r}$$

となる．

(3) 階段行列 $B = (b_{i,j}) \in M_{mn}(K)$ は以下の条件を満たす．

(i) $1 \leqq r \leqq m$ を満たす自然数 r と，$1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqq n$ を満たす自然数 $j_1, j_2,\ldots, j_r$ が存在し，$\mathbf{b}_{j_1} = \mathbf{e}_1, \mathbf{b}_{j_2} = \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{b}_{j_r} = \mathbf{e}_r$ である．

(ii) $j < j_1$ ならば $\mathbf{b}_j = \mathbf{0}$ である．

(iii) $1 \leqq k < r$ で $j_k < j < j_{k+1}$ ならば，$i > k$ のとき $b_{i,j} = 0$ である．つまり，$\mathbf{b}_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} b_{i,j}\mathbf{e}_i$ である．

(iv) $j > j_r$ ならば，$i > j_r$ のとき $b_{i,j} = 0$ である．

したがって，$r = \mathrm{rank}\,B = \mathrm{rank}\,A = m$ ならば，$j_1 = 1, j_2 = 2,\ldots, j_m = m$ で，$\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{b}_m = \mathbf{e}_m$ である．$a_1\mathbf{b}_1 + \cdots + a_m\mathbf{b}_m = \mathbf{0}$ $(a_1,\ldots, a_m \in K)$ とすると，$\mathbf{e}_i = \mathbf{b}_i = C\mathbf{x}_i$ だから，$a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_m\mathbf{e}_m = C(a_1\mathbf{x}_1 + \cdots + a_m\mathbf{x}_m) = C\mathbf{0} = \mathbf{0}$ なので，$a_1 = \cdots + a_m = 0$ となる．よって，$\mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_m$ は 1 次独立である．

逆に，$\mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_m$ は 1 次独立であると仮定する．$a_1\mathbf{b}_1 + \cdots + a_m\mathbf{b}_m = \mathbf{0}$ $(a_1,\ldots, a_m \in K)$ とすると，$\mathbf{x}_i = C^{-1}\mathbf{x}_i$ だから，$a_1\mathbf{x}_1 + \cdots + a_m\mathbf{x}_m = C^{-1}(a_1\mathbf{b}_1 + \cdots + a_m\mathbf{b}_m) = \mathbf{0}$ なので，$a_1 = \cdots + a_m = 0$ となる．よって，$\mathbf{b}_1,\ldots, \mathbf{b}_m$ は 1 次独立である．このとき，$\mathbf{b}_i = \mathbf{e}_i$ $(1 \leqq \forall i \leqq m)$ であることを i に関する帰納法で示す．$\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{0}$ と (ii) より $j_1 = 1$ で，(i) より $\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1$ である．

$2 \leqq i \leqq m$ とし，$1 \leqq j < i$ のとき $\mathbf{b}_j = \mathbf{e}_j$ と仮定する．もし $j_i > i$ とすると，(iii) より $\mathbf{b}_1,\ldots, \mathbf{b}_i$ は 1 次従属になってしまう．よって，$j_i = i$ で (i) より $\mathbf{b}_i = \mathbf{e}_i$ である．

以上より，$\mathrm{rank}\,A = \mathrm{rank}\,B = m$ である．

(4) $\mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_n$ が 1 次独立ならば，上の議論から，B は単位行列 I になる．このとき $CA = B = I$ だから C は A の逆行列である．

逆に，A^{-1} が存在すると仮定する．$A^{-1}A=I$ だから $A^{-1}\mathbf{x}_i=\mathbf{e}_i$ である．$a_1,\ldots,a_n\in K$, $a_1\mathbf{x}_1+\cdots+a_n\mathbf{x}_n=\mathbf{0}$ が成り立つとする．

$$\mathbf{0}=A^{-1}\bigl(a_1\mathbf{x}_1+\cdots+a_n\mathbf{x}_n\bigr)=a_1A^{-1}\mathbf{x}_1+\cdots+a_nA^{-1}\mathbf{x}_n=a_1\mathbf{e}_1+\cdots+a_n\mathbf{e}_n$$

で，$\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ は 1 次独立だから，$a_1=\cdots=a_n=0$ となる．よって $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ は 1 次独立である． □

★ 補足説明．上の証明中で，以下の定理を用いている．前期の範囲であるが，改めて書いておく．

定理 1.6. K は体，$A\in M_{mn}(K)$ は m 行 n 列の行列，B は A から得られる階段行列とする．すると，$\det C\neq 0$ であるようなある m 次正方行列 C により，$B=CA$ と書ける．

証明. 階段行列を作る行基本変形には以下の 3 種類があった．
(1) j 行目を λ 倍して i 行目に加える．$(i\neq j)$
(2) ゼロでない定数 λ を i 行目に掛ける．
(3) i 行目と j 行目を交換する．

ただし，(3) は $(i,j)\to(i+j,j)\to(i+j,-i)\to(j,-i)\to(j,i)$ の要領で,「j 行目を i 行目に足す」,「i 行目を (-1) 倍して j 行目に足す」，「j 行目を i 行目に足す」,「j 行目を (-1) 倍する」という 4 回の (1), (2) の操作で得られるから，(1) と (2) だけを考えればよい．

I_m を m 次の正方行列，$E_{i,j}$ は $(i,\,j)$-成分が 1 でそれ以外のすべての成分は 0 であるような m 次正方行列とする．$C_{i,j,\lambda}=I_n+\lambda E_{i,j}$ とおくとき，(1) の行基本操作は，対象となる行列に $C_{i,j,\lambda}$ を左から掛けることに他ならない．

また，I_m の $(i,\,i)$-成分だけを λ で置換えた行列を $M_{i,\lambda}$ とする．(2) の行基本操作は，対象となる行列に $M_{i,\lambda}$ を左から掛けることに他ならない．

$\det C_{i,j,\lambda}=1$ (det は行列式を取る操作を表す), $\det M_{i,\lambda}=\lambda\neq 0$ だから，$C_{i,j,\lambda}$ も $M_{i,\lambda}$ も逆行列を持つ．階段行列を作る操作は，$C_{i,j,\lambda}$ や $M_{i,\lambda}$ という形の行列 (i, j, λ の値はいろいろ変わる) を何個か左から掛ける操作である．それらの行列の積を C とすれば $B=CA$ で，今の考察から $\det C\neq 0$ で C は逆行列を持つ． □

2. 基底に関する基本的な諸定理

定理 2.1. (Steinitz の置換定理) K は体，V は K-ベクトル空間，x_1, $x_2,\ldots,x_n$ は V の基底，y_1, $y_2,\ldots,y_m$ は V の生成系であるとする．このとき，x_1 の代わりに，適当な y_j $(1\leqq \exists j\leqq m)$ を選べば，y_j, x_2, $x_3,\ldots,x_n$ が V の基底になる．

証明. x_1, $x_2,\ldots,x_n$ が V の生成系なので，$y_j=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_{ji}x_i$ を満たす $a_{ji}\in K$ が存在する．また，y_1, $y_2,\ldots,y_m$ が V の生成系なので，$x_i=\displaystyle\sum_{j=1}^{m}b_{ij}y_j$ を満たす $b_{ij}\in K$ が存在する．

まず，a_{11}, a_{21}, $a_{31},\ldots,a_{m1}$ の中に，$a_{j1}\neq 0$ を満たすものが存在することを示す．

背理法で，$a_{11}=a_{21}=a_{31}=\cdots=a_{m1}=0$ であると仮定する．すると $y_j=\displaystyle\sum_{i=2}^{n}a_{ji}x_i$ なので，

$$x_1=\sum_{j=1}^{m}b_{1j}y_j=\sum_{j=1}^{m}b_{1j}\sum_{2=1}^{n}a_{ji}x_i=\sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ji}b_{ij}\right)x_i$$

である．$c_i=-\displaystyle\sum_{j=1}^{m}a_{ji}b_{ij}$ とおけば，$x_1+c_2x_2+c_3x_3+\cdots+c_nx_n=0$ である．これは，x_1, $x_2,\ldots,x_n$ が 1 次独立であることに矛盾する．以上より，$a_{j1}\neq 0$ を満たす j が存在する．

この j を固定したとき，$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i$ より，$x_1 = \frac{1}{a_{j1}}y_j - \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{ji}}{a_{j1}}x_i$ である．任意の $z \in V$ は，ある $\alpha_1,\ldots, \alpha_n$ により，$z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ と書けるが，$z = \frac{\alpha_1}{a_{j1}}y_j + \sum_{i=2}^{n}\left(\alpha_i - \frac{\alpha_1 a_{ji}}{a_{j1}}\right)x_i$ と書けるので，y_j, $x_2, x_3,\ldots, y_n$ は V の生成系である．

最後に，$y_j, x_2, x_3,\ldots, x_n$ が 1 次独立であることを示す．

$\beta_1 y_j + \sum_{i=2}^{n} \beta_i x_i = 0$ $(\beta_1,\ldots, \beta_n \in K)$ とする．すると，$a_{j1}\beta_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n}(\beta_i + \beta_1 a_{ji})x_i = 0$ である．x_1, $x_2,\ldots, x_n$ は 1 次独立なので，$a_{j1}\beta_1 x_1 = 0, \beta_i + \beta_1 a_{ji} = 0$ $(i = 2, 3,\ldots, n)$ である，$a_{j1} \neq 0$ であったから，最初の式から $\beta_1 = 0$ が得られ，これを 2 つ目の式に代入すると $\beta_i = 0$ $(i = 2, 3,\ldots, n)$ が得られる．よって，$y_j, x_2, x_3,\ldots, x_n$ は 1 次独立である． □

定理 2.2. K は体，V は K-ベクトル空間，$x_1, x_2,\ldots, x_n$ は V の基底，$y_1, y_2,\ldots, y_m$ は V の生成系であるとする．このとき，集合 $\{1, 2,\ldots, m\}$ の中の n 個の元からなる部分集合 $\{j_1, j_2,\ldots, j_n\}$ をうまく選んで，$y_{j_1}, y_{j_2},\ldots, y_{j_n}$ が V の基底になるようにできる．

証明. Steinitz の置換定理より，$y_{j_1}, x_2, x_3,\ldots, x_n$ が V の基底になるように，$j_1 \in \{1,\ldots, m\}$ を選べる．今度は，x_2 に対して Steinitz の置換定理を適用すれば，$y_{j_1}, y_{j_2}, x_3, x_4,\ldots, x_n$ が V の基底になるように，$j_2 \in \{1,\ldots, m\}$ を選べる．この操作を $x_3, x_4,\ldots, x_n$ に対して繰り返し実行すると，選んで，$y_{j_1}, y_{j_2},\ldots, y_{j_n}$ が V の基底になるような $j_1, j_2,\ldots, j_n \in \{1,\ldots, m\}$ が選べる．ここで，$y_{j_1}, y_{j_2},\ldots, y_{j_n}$ は 1 次独立だから，$j_1, j_2,\ldots, j_n$ は相異なる．特に，$n \leqq m$ である． □

定理 2.3. K は体，V は K-ベクトル空間，$x_1, x_2,\ldots, x_n$ は V の基底，$y_1, y_2,\ldots, y_m$ も V の基底であるとする．すると，$n = m$ である．

証明. $y_1, y_2,\ldots, y_m$ は V の生成系だから，定理 2.2 より $n \leqq m$ である．$x_1, x_2,\ldots, x_n$ は V の生成系だから，$m \leqq n$ である．よって，$n = m$ である． □

定義 2.4. K は体，V は K-ベクトル空間とする．n 個の元から成る V の基底 $x_1, x_2,\ldots, x_n$ が存在するとき，$\dim_K V = n$ または単に $\dim V = n$ と書き，n を V の**次元**という．このように，有限個の元からなる基底が存在するとき，V は**有限次元**であるという．また，ゼロベクトルのみからなる集合 $\{0\}$ のもベクトル空間であるが，$\{0\}$ の基底は空集合と約束し，$\dim\{0\} = 0$ と約束する．$\{0\}$ も有限次元ベクトル空間と考える．

例えば，K-ベクトル空間 K^n は n 個のベクトルからなる標準基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2,\ldots, \mathbf{e}_n$ を持つので $\dim_K K^n = n$ である．また，複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$-ベクトル空間とみなすとき，基底として $1, \sqrt{-1}$ が選べるので $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ である．

命題 2.5. K は体，V は K-ベクトル空間，$W \subset V$ は部分空間，$y_1, y_2,\ldots, y_m$ は V の生成系であるとする．もし，$y_1, y_2,\ldots, y_m \in W$ ならば，$W = V$ である．

証明. 勝手な $x \in V$ を取る．$y_1, y_2,\ldots, y_m$ は V の生成系だから，ある $a_1,\ldots, a_m \in K$ により，$x = a_1 y_1 + \cdots + a_m y_m$ と書ける．W はベクトル空間で $y_1, y_2,\ldots, y_m \in W$ だから，$a_1 y_1 + \cdots + a_m y_m \in W$ である．よって，$x \in W$ であり，$V \subset W$ がわかる．もともと $W \subset V$ であったから $W = V$ である． □

命題 2.6. K は体，V は K-ベクトル空間，$x_1,\ldots, x_l$ は 1 次独立な V の元とし．$W = Kx_1 + \cdots + Kx_l$ とする．いま，$y \in V, y \notin W$ ならば $x_1,\ldots, x_l, y$ は 1 次独立である．

証明. $a_1 x_1 + \cdots + a_l x_l + a_{l+1} y = 0$ $(a_1,\ldots, a_{l+1} \in K)$ とする．もし $a_{l+1} \neq 0$ ならば，$y = -\frac{a_1}{a_{l+1}}x_1 - \cdots - \frac{a_l}{a_{l+1}}x_l \in \sum_{i=1}^{l} Kx_i = W$ となり，$y \notin W$ に矛盾する．よって，$a_{l+1} = 0$ である．する

と，$a_1x_1+\cdots+a_lx_l=0$ であるが，$x_1,\ldots,x_l$ は 1 次独立なので，$a_1=\cdots=a_l=0$ である．以上より，$x_1,\ldots,x_l,y$ は 1 次独立である． □

定理 2.7. (延長定理) K は体，V は n 次元 K-ベクトル空間，$x_1,x_2,\ldots,x_l$ は 1 次独立な V の元 ($l=0$ でもよい)，$y_1,y_2,\ldots,y_m$ は V の生成系であるとする．すると，$l\leqq n$ であって，$y_1,y_2,\ldots,y_m$ の中から適当に $n-l$ 個の元 $y_{j_{l+1}},y_{j_{l+2}},\ldots,y_{j_n}$ を選んで，$x_1,x_2,\ldots,x_l,y_{j_{l+1}},y_{j_{l+2}},\ldots,y_{j_n}$ が V の基底になるようにできる．

証明. もし，$x_1,x_2,\ldots,x_l$ が V の生成系ならば，それは V の基底だから，定理 2.3 より $l=n$ である．以下，$x_1,x_2,\ldots,x_l$ は V の生成系でないと仮定する．$W_l=Kx_1+Kx_2+\cdots+Kx_l$ とおく ($l=0$ の場合は $W_l=\{0\}$)．$W_l\subsetneqq V$ である．もし $y_1,\ldots,y_m\in W_l$ ならば命題 2.5 より $W_l=V$ となって矛盾するので，$y_{j_{l+1}}\notin W_l$ となる j_{l+1} が存在する．命題 2.6 より $x_1,\ldots,x_l,y_{j_{l+1}}$ は 1 次独立である．

もし，$x_1,\ldots,x_l,y_{j_{l+1}}$ が V の生成系ならば，これが V の基底になる．そうでないときは $W_{l+1}=Kx_1+\cdots+Kx_l+y_{j_{l+1}}$ とおく．$W_{l+1}\subsetneqq V$ なので，$y_{j_{l+2}}\notin W_{l+1}$ となる j_{l+2} が存在する．命題 2.5 より $x_1,\ldots,x_l,y_{j_{l+1}},y_{j_{l+2}}$ は 1 次独立である．特に，$j_{l+1}\neq j_{l+2}$ である．

以下，この議論を繰り返す．$y_1,\ldots,y_m$ の中から相異なる元は高々 m 個しか選べないから，この操作は m 回以内で終了して，ある k のところで，$x_1,\ldots,x_l,y_{j_{l+1}},\ldots,y_{j_{l+k}}$ が V の生成系になる．そして，これが V の基底になる．定理 2.3 より $k=n$ である． □

命題 2.8. K は体，V は K-ベクトル空間であるが，有限次元ではない ($\{0\}$ でもない) と仮定する．すると，任意の自然数 $n\in\mathbb{N}$ に対し，n 個の元からなる 1 次独立なベクトル $x_1,\ldots,x_n\in V$ が存在する．このとき $\dim_K V=\infty$ と書き，V は**無限次元**であるという．

証明. $V\neq\{0\}$ だから，$0\neq x_1\in V$ が存在する．$W_1=Kx_1$ とおく．V は有限次元でないから x_1 は V の基底でなく，$W_1\subsetneqq V$ である．$x_2\in V,\ x_2\notin W_1$ である x_2 を取る．命題 2.6 より x_1,x_2 は 1 次独立である．$W_2=Kx_1+Kx_2$ とおく．$W_2\subsetneqq V$ なので，$x_3\in V,\ x_3\notin W_2$ である x_3 を取ることができる．以下同様に，$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots$ を取ることができる． □

命題 2.9. K は体，V は有限次元 K-ベクトル空間で $\dim V=n$，$W\subset V$ は部分空間とする．すると，W も有限次元ベクトル空間で $\dim W\leqq\dim V$ である．

証明. W の中の $n+1$ 個の元が 1 次独立であると，V の中に $n+1$ 個の 1 次独立があるから，延長定理より $\dim V\geqq n+1$ となり，矛盾する．

そこで，W の中から 1 次独立な元 $x_1,\ldots,x_m$ を m が最大になるように取る．上で述べたように $m\leqq n$ である．もし，$Kx_1+\cdots+Kx_m\subsetneqq W$ であると，$Kx_1+\cdots+Kx_m$ に含まれない W の元 x_{m+1} が存在するが，命題 2.6 より $x_1,\ldots,x_{m+1}$ は 1 次独立である．これは，m の最大性に反する．よって，$Kx_1+\cdots+Kx_m=W$ であり，$x_1,\ldots,x_m$ は W の基底である． □

定理 2.10. K は体，W は K^n の部分ベクトル空間とする．また，$\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m\in W$ とする．これらの列ベクトルを並べてできる行列を $A=(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m)$ とする．このとき，$\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m$ が W の生成系であるための必要十分条件は，$\operatorname{rank}A=\dim W$ が成り立つことである．特に，$m=\operatorname{rank}A=\dim W$ ならば，$\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m$ は W の基底である．

証明. $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m$ で生成される K^n の部分ベクトル空間を V とする．$V\subset W$ である．定理 1.5(2) のように，$A=(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m)$，$r=\operatorname{rank}A$ とし，A から作られる階段行列を B とする．$\mathbf{b}_{j_1}=\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{b}_{j_r}=\mathbf{e}_r$ であるとすると，$\mathbf{x}_{j_1},\ldots,\mathbf{x}_{j_r}$ は 1 次独立である．$\mathbf{x}_k=b_{1,k}\mathbf{x}_{j_1}+\cdots+b_{r,k}\mathbf{x}_{j_r}$ が成り立つから，$\mathbf{x}_{j_1},\ldots,\mathbf{x}_{j_r}$ は V の基底である．特に，$\dim V=r$ である．

(1) $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m$ が W の生成系ならば，$V=W$ であるから，$\dim W=r=\operatorname{rank}A$ である．

(2) 逆に，$\dim W=\operatorname{rank}A$ ならは，$V=W$ となるから，$\mathbf{x}_{j_1},\ldots,\mathbf{x}_{j_r}$ は W の基底である．よって，$\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m$ は W の生成系である． □

3. 線形写像

定義 3.1. V, W は集合，$f\colon V \longrightarrow W$ は写像とする．

(1) $x, y \in V, x \neq y$ ならば $f(x) \neq f(y)$ が成り立つとき，f は**単射** (injection, injective) であるという．

(2) 一般に V の部分集合 A に対し，
$$f(A) := \{f(a) \in W \mid a \in A\}$$
と書き，この集合 $f(A)$ を f による A の**像**という．$f(V)$ を f の**値域**ともいう．もし，$f(V) = W$ が成り立つとき，f は**全射** (suejection, surjective) であるという．

(3) $f\colon V \to W$ が全射かつ単射のとき f は**全単射** (bijection. bijective) であるという．

(4) $f\colon V \to W$ は全単射であると仮定する．f は全射であるから W の勝手な元 $w \in W$ に対し $f(v) = w$ を満たす $v \in V$ が存在する．f は単射だから $f(v) = w$ を満たす v は，各 w に対し 1 つしか存在しない．そこで，$f^{-1}(w) = v$ によって写像 $f^{-1}\colon W \to V$ を定める．この写像 f^{-1} を f の**逆写像** (inverse map) という．

(5) U, V, W は集合，$f\colon U \longrightarrow V$ と $g\colon V \to W$ は写像とする．$u \in U$ に対し $g(f(u)) \in W$ を対応させる U から W への写像を $g \circ f\colon U \to W$ と書き，f と g の**合成写像**という．

(6) V は集合とする．$x \in V$ に対し $f(x) = x$ として定まる写像 $f\colon V \to V$ を**恒等写像**という．恒等写像は $\mathrm{id}\colon V \to V$, $\mathrm{id}_V\colon V \to V$, $1_V\colon V \to V$ などの記号で表すことが多い．

(7) K は体，V, W は K-ベクトル空間とする．線形写像 $f\colon V \to W$ が全単射であるとき，f は**同型**写像 (isomorphism) であるという．f が同型写像であるとき $f\colon V \xrightarrow{\cong} W$ と書く．同型写像 $f\colon V \xrightarrow{\cong} W$ が存在するとき V と W は**同型**であるといい，$V \cong W$ と書く．

命題 3.2. V, W は集合とする．

(1) $f\colon V \to W$ が全単射ならば，$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V$, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_W$ が成り立つ．

(2) $f\colon V \to W$ と $g\colon W \to V$ が写像で $g \circ f = \mathrm{id}_V$ が成り立てば，f は単射，g は全射である．

(3) $f\colon V \to W$ と $g\colon W \to V$ が写像で $g \circ f = \mathrm{id}_V$ と $f \circ g = \mathrm{id}_W$ が成り立てば，f と g は全単射で $g = f^{-1}$, $f = g^{-1}$ が成り立つ．

証明. (1) $x \in V, y = f(x) \in W$ のとき $f^{-1}(y) = x$ なので，$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}(y) = x$ となる．よって，$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V$ である．また $f \circ f^{-1}(y) = f\big(f^{-1}(y)\big) = f(x) = y$ なので　$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_W$ である．

(2) $x_1,\ x_2 \in V,\ f(x_1) = f(x_2)$ と仮定する．$x_1 = \mathrm{id}_V(x_1) = g \circ f(x_1) = f\big(f(x_1)\big) = f\big(f(x_2)\big) = g \circ f(x_2) = \mathrm{id}_V(x_2) = x_2$ なので f は単射である．

勝手な $x \in V$ を取る．$y = f(x)$ とおくと，$g(y) = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x) = \mathrm{id}_V(x) = x$ なので，g は全射である．

(3) $g \circ f = \mathrm{id}_V$ より f は単射で，$f \circ g = \mathrm{id}_W$ より f は全射である．よって f は全単射である．同様に g も全単射である．$g = f^{-1}$ は逆写像の定義からわかる． □

命題 3.3. K は体，$A \in M_{ml}(K), B \in M_{nm}(K)$ とし，$f_A\colon K^l \longrightarrow K^m$, $f_B\colon K^m \longrightarrow K^n$, $f_{BA}\colon K^l \longrightarrow K^n$ はそれぞれ行列 A, B, BA が定める線形写像とする．すると，$f_{BA} = f_B \circ f_A$ である．

証明. $(BA)\mathbf{x} = B(A\mathbf{x})$ より従う． □

n 次の単位行列を I_n と書くことにする．すると I_n が定める線形写像 $f_{I_n}\colon K^n \to K^n$ は恒等写像である．つまり $f_{I_n} = \mathrm{id}_{K^n}$.

命題 3.4. $f_A\colon K^n \longrightarrow K^n$ は n 次正方行列 $A \in M_n(K)$ により定まる線形写像とする．

(1) f_A が全単射であるための必要十分条件は，A の逆行列 A^{-1} が存在することである．すなわち，$\det A \neq 0$ である．

(2) A^{-1} が存在するとき，f_A の逆写像は A^{-1} によって定まる線形写像 $f_{(A^{-1})}$ である．

証明. (1) A の逆行列 A^{-1} が存在すれば，$f_{A^{-1}} \circ f_A = f_{A^{-1}A} = f_{I_n} = \mathrm{id}_{K^n}$, $f_A \circ f_{A^{-1}} = f_{AA^{-1}} = f_{I_n} = \mathrm{id}_{K^n}$ なので，$f_{A^{-1}} = f_A^{-1}$ であり，f_A は全単射である．

逆に，$f_A\colon K^n \longrightarrow K^n$ が全単射であると仮定する．逆写像 $g = f_A^{-1}$ が存在する．$\mathbf{y}_j = g(\mathbf{e}_j)$ とし，$\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_n$ を並べて n 次正方行列 B を作る．$A\mathbf{y}_j = f_A(\mathbf{y}_j) = g^{-1}(\mathbf{y}_j) = \mathbf{e}_j$ なので，$AB = (A\mathbf{y}_1,\dots, A\mathbf{y}_n) = (\mathbf{e}_1,\dots, \mathbf{e}_n) = I_n$ である．よって，$B = A^{-1}$ である．ここで，$(A\mathbf{y}_1,\dots, A\mathbf{y}_n)$ は 列ベクトル $A\mathbf{y}_1,\dots, A\mathbf{y}_n$ を並べてできる n 次正方行列を表す．

(2) 上の証明において $g = f_B$ であることを示せばよい．$g = f_A^{-1}$ が線形写像であることはすぐわかる．
$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1\mathbf{e}_1 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n$ とおく．

$$\begin{aligned} f_B(\mathbf{x}) &= B\mathbf{x} = c_1B\mathbf{e}_1 + \cdots + c_nB\mathbf{e}_n = c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_n\mathbf{y}_n \\ &= c_1g(\mathbf{e}_1) + \cdots + c_ng(\mathbf{e}_n) = g\bigl(c_1\mathbf{e}_1 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n\bigr) = g(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

である．よって，$g = f_B$ である． □

命題&定義 3.5. K は体，$\mathbf{e}_1^V,\dots, \mathbf{e}_n^V$ は $V := K^n$ の標準基底，$\mathbf{e}_1^W,\dots, \mathbf{e}_m^W$ は $W := K^m$ の標準基底，$f\colon V \longrightarrow W$ は線形写像とする．$\mathbf{e}_1^W,\dots, \mathbf{e}_m^W$ は W の生成系だから，$f(\mathbf{e}_j^V) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{e}_i^W$ を満たす $a_{ij} \in K$ $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$ が存在する．そこで，a_{ij} を $(i,\ j)$-成分とする m 行 n 列の行列を $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(K)$ とする．行列 A が定める線形写像を $f_A\colon K^n \longrightarrow K^m$ とすると，$f = f_A$ が成り立つ．この A を線形写像 f の基底 $\mathbf{e}_1^V,\dots, \mathbf{e}_n^V; \mathbf{e}_1^W,\dots, \mathbf{e}_m^W$ に関する**表現行列**という．

よって，$f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ に対して $f_A \in M_{mn}(K)$ を対応させる写像は全単射であり，この全単射を通して $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m) = M_{mn}(K)$ とみなすことができる．

証明. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1\mathbf{e}_1^V + \cdots + c_n\mathbf{e}_n^V \in V$ を取る．

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_jf(\mathbf{e}_1^V) = \sum_{j=1}^{n} c_j\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{e}_i^W = \sum_{i=1}^{n}\bigl(sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j\bigr)\,\mathbf{e}_i^W = A\mathbf{x}$$

である．よって，$f_A = f$ である． □

定義 3.6. K は体，V, W は K-ベクトル空間，$f\colon V \to W$ は 線形写像とする．このとき，

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\, f &= \bigl\{x \in V \bigm| f(x) = 0\bigr\} \\ \mathrm{Im}\, f = f(V) &= \bigl\{f(x) \in W \bigm| x \in V\bigr\} \end{aligned}$$

と書く．$\mathrm{Ker}\, f$ を f の**核**とか**カーネル**といい，$\mathrm{Im}\, f$ を f の**像**とか**イメージ**という．

特に，行列 $A \in M_{mn}(K)$ が定める線形写像を $f_A\colon K^n \longrightarrow K^m$ とするとき，$\mathrm{Ker}\, A := \mathrm{Ker}\, f_A$, $\mathrm{Im}\, A := \mathrm{Im}\, f_A$ と書く．

命題 3.7. K は体，V, W は K-ベクトル空間，$f\colon V \to W$ は 線形写像とする．
(1) $\mathrm{Ker}\, f$ は V の部分空間である．
(2) $\mathrm{Im}\, f$ は W の部分空間である．
(3) $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ と f が単射であることは同値である．

証明. (1) $x_1,\ x_2 \in \mathrm{Ker}\, f;\ a,\ b \in K$ とする．$f(x_1) = 0,\ f(x_2) = 0$ より $f(ax_1 + bx_2) = af(x_1) + bf(x_2) = 0$ なので $ax_1 + bx_2 \in \mathrm{Ker}\, f$ である．よって，$\mathrm{Ker}\, f$ は V の部分空間である．

(2) $y_1,\ y_2 \in \mathrm{Im}\, f;\ a,\ b \in K$ とする．$f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2$ を満たす $x_1,\ x_2 \in V$ が存在する．$f(ax_1 + bx_2) = af(x_1) + bf(x_2) = ay_1 + by_2 \in \mathrm{Im}\, f$ である．よって，$\mathrm{Im}\, f$ は W の部分空間である．

(3) f は単射とする．$x \in \mathrm{Ker}\, f$ とすると，$f(x) = 0 = f(0)$ で f は単射なので $x = 0$ となる．よって $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ である．

逆に $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ ならば f は単射であることを証明する．$x_1,\ x_1 \in V;\ f(x_1) = f(x_2)$ とする．$f(x_1 - x_2) = f(x_1 + (-1)x_2) = f(x_1) + f((-1)x_2) = f(x_1) + (-1)f(x_2) = f(x_1) - f(x_2) = 0$ なので $x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ となる．よって，$x_1 - x_2 = 0$ で $x_1 = x_2$ となる．したがって，f は単射である． □

定義 3.8. (1) K は体，U, V, W は K-ベクトル空間，$f\colon U \to V$, $g\colon V \to W$ は線形写像とする．3 つの条件

(1) f は単射.

(2) g は全射.

(3) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$.

が成り立つとき，

$$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0 \quad \text{(exact)}$$

と書き，**完全系列**という．

(2) K は体で，I は $\mathbb{Z}$ 内の連続する整数からなる部分集合とし，各 $i \in I$ に対し V_i は K-ベクトル空間で，$i, i+1 \in I$ のときに $f_i\colon V_i \to V_{i+1}$ は線形写像であるとする．このとき，

$$\cdots \xrightarrow{f_{i-2}} V_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} V_{i+2} \xrightarrow{f_{i+2}} \cdots \tag{$*$}$$

などと書き，**系列**という．さらに，$i, i+1, i+2 \in I$ ならば $\operatorname{Im} f_i = \operatorname{Ker} f_{i+1}$ が成り立つとき，上の系列 $(*)$ は**完全**とか **exact** であるという．

なお，$V_i = 0$ のとき，線形写像 $f_i\colon 0 \to V_{i+1}$ はゼロ写像しか存在しないので，f_i を省略して単に $0 \to V_{i+1}$ と書く．同様に，線形写像 $f_i\colon V_i \to 0$ もゼロ写像しか存在しないので，単に $V_i \to 0$ と書く．ここで $f\colon V \to W$ (ただし $0 \in W$ とする) が**ゼロ写像**であるとは，任意の $x \in V$ に対し $f(x) = 0$ であることをいう．

命題 3.9. K-ベクトル空間 V, W に対し，以下が成り立つ．

(1) $0 \longrightarrow V \xrightarrow{f} W$ が完全 $\iff$ f は単射.

(2) $V \xrightarrow{f} W \longrightarrow 0$ が完全 $\iff$ f は全射.

(3) $0 \longrightarrow V \xrightarrow{f} W \longrightarrow 0$ が完全 $\iff$ f は同型写像.

証明. (1) $0 \longrightarrow V \xrightarrow{f} W$ が完全と，$\operatorname{Ker} f = \{0\}$ は同値であるから．

(2) $V \xrightarrow{f} W \longrightarrow 0$ が完全と $\operatorname{Im} f = W$ は同値であるから． □

4. 次元定理

定理 4.1. K は体，U, V, W は K-ベクトル空間で，

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$$

は完全系列であるとする．

(1) V が有限次元ならば U と W も有限次元である．

(2) U と W が有限次元ならば V も有限次元である．

いずれの場合も，$\dim_K V = \dim_K U + \dim_K W$ が成り立つ．

証明. V が有限次元ならば命題 2.9 より U も有限次元である．また，$y_1,\ldots, y_n$ が V の基底ならば，$g(y_1),\ldots, g(y_n)$ は W の生成系だから，定理 2.7 より，その中から W の基底が選られ，$\dim_K W < \infty$ がわかる．そこで，以下，U と W は有限次元であると仮定する．

$\dim_K U = l$ とし，$u_1,\ldots, u_l$ を U の基底とする．また，$\dim_K W = m$ とし，$w_1,\ldots, w_m$ を W の基底とする．g は全射なので，$g(y_j) = w_j$ を満たす $y_j \in V$ が存在する $(i = 1,\ldots, m)$. また，$x_1 = f(u_1),\ldots, x_l = f(u_l)$ とおく．

$x_1,\ldots, x_l, y_1,\ldots, y_m$ は 1 次独立であることを示す．$a_1x_1 + \cdots + a_lx_l + b_1y_1 + \cdots + b_my_m = 0$ $(a_1,\ldots, a_l, b_1,\ldots, b_m \in K)$ とする．$g(y_j) = w_j$ で，$\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ より $f(x_i) = 0$ だから，

$$g(a_1x_1 + \cdots + a_lx_l + b_1y_1 + \cdots + b_my_m) = b_1w_1 + \cdots + b_mw_m$$

である．$w_1,\ldots, w_m$ は 1 次独立だから，$b_1 = \cdots = b_m = 0$ である．すると，$f(a_1u_1 + \cdots + a_lu_l) = a_1x_1 + \cdots + a_lx_l = 0$ である．f は単射だから，$a_1u_1 + \cdots + a_lu_l = 0$ である．$u_1,\ldots, u_l$ は 1 次独立だから，$a_1 = \cdots = a_l = 0$ である．よって，$x_1,\ldots, x_l, y_1,\ldots, y_m$ は 1 次独立である．

$x_1,\ldots, x_l, y_1,\ldots, y_m$ が V の生成系であることを示す．勝手な $z \in V$ を取る．$g(z) = c_1w_1 + \cdots + c_my_m$ $(c_1,\ldots, c_m \in K)$ と書ける．$z_0 := z - (c_1y_1 + \cdots + c_my_m)$ とおく．$g(z_0) = g(z) - (c_1w_1 + \cdots + c_my_m) = 0$ だ

から，$g_0 \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ である．すると，$f(u_0) = z_0$ を満たす $u_0 \in U$ が存在する．$u_0 = a_1u_1 + \cdots + a_lu_l$ $(a_1,\ldots, a_l \in K)$ と書ける．すると，$z = a_1x_1 + \cdots + a_lx_l + b_1y_1 + \cdots + b_my_m$ となる．よって，$x_1,\ldots, x_l, y_1,\ldots, y_m$ は V の基底である．したがって，$\dim_V = l + m = \dim_K U + \dim_K W$ である． □

定理 4.2. K は体，V, W は K-ベクトル空間で，$\dim_K V < \infty$ と仮定する．このとき，
$$\dim_K V = \dim_K \operatorname{Ker} f + \dim_K \operatorname{Im} f$$
が成り立つ．

証明. 写像 $g\colon \operatorname{Ker} f \longrightarrow V$ を $g(x) = x$ で定め，写像 $h\colon V \longrightarrow \operatorname{Im} f$ を $h(x) = h(x)$ で定める．g は単射，h は全射である．また，$\operatorname{Im} g = g(\operatorname{Ker} f) = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} h$ であるから，$0 \to \operatorname{Ker} f \xrightarrow{g} V \xrightarrow{h} \operatorname{Im} f \to 0$ は完全系列である．定理 4.1 より，$\dim_K V = \dim_K \operatorname{Ker} f + \dim_K \operatorname{Im} f$ が成り立つ． □

系 4.3. K は体で，$V_1,\ldots, V_n$ は有限次元 K-ベクトル空間で，完全系列
$$0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} 0$$
が存在すると仮定する．このとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \dim_K V_i = 0$ が成り立つ．

証明. $0 \to \operatorname{Ker} f_i \xrightarrow{\subset} V_i \xrightarrow{f_i} \operatorname{Im} f_i \to 0$ は完全系列だから，$\dim_K V_i = \dim_K \operatorname{Ker} f_i + \dim_K \operatorname{Im} f_i$ が成り立つ．$\operatorname{Im} f_i = \operatorname{Ker} f_{i+1}$ だから，
$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \dim_K V_i = \dim_K \operatorname{Ker} f_0 + (-1)^n \dim_K \operatorname{Im} f_n = 0$$
が成り立つ． □

定理 4.4. $f_A\colon K^n \longrightarrow K^m$ は m 行 n 列の行列 $A \in M_{mn}(K)$ から定まる線形写像とする．このとき，$\dim_K(\operatorname{Im} f_A) = \operatorname{rank} A$ である．

証明. A から行基本変形で得られる階段行列を B とする．$\operatorname{rank} A$ はゼロでない B の行ベクトルの個数である．$r = \operatorname{rank} A$ とする．B が定める線形写像を $g\colon K^n \longrightarrow K^m$ とする．$\mathbf{x} \in K^n$ に対し $B\mathbf{x}$ は下の $m - r$ 個が 0 であるベクトルだから，$\operatorname{Im} g$ は標準ベクトル $\mathbf{e}_1,\ldots, \mathbf{e}_r$ を基底とする部分空間である．よって，$\dim_K(\operatorname{Im} g) = r$ である．

ところで，行基本変形は A に左から可逆行列を掛ける操作だから，C^{-1} を持つある n 次正方行列 C により，$B = CA$ と書ける．C^{-1} が定める線形写像を $h\colon K^n \longrightarrow K^n$ とする．$h(\operatorname{Im} g) = \operatorname{Im} f_A$ であり，$h(\mathbf{e}_1),\ldots, h(\mathbf{e}_r)$ が $\operatorname{Im} f_A$ の基底になる．よって，$\dim_K(\operatorname{Im} f_A) = r = \operatorname{rank} A$ である． □

系 4.5. m 行 n 列の行列 $A \in M_{mn}(K)$ に対し，
$$\operatorname{Ker} A := \left\{\mathbf{x} \in K^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\right\}$$
とおく，すると，$\operatorname{rank} A + \dim_K(\operatorname{Ker} A) = n$ である．

定義 4.6. $V_1,\ldots, V_n$ は集合とする．各 V_i からひとつずつ元 x_i を選び，それらを並べた列 $(x_1,\ldots, x_n)$ を考える．このような列全体の集合を
$$V_1 \times \cdots \times V_n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in V_1,\ldots, x_n \in V_n\right\}$$
と書き，$V_1,\ldots, V_n$ の**直積集合**という．

さて，K は体，$V_1,\ldots, V_n$ は K-ベクトル空間とする．$a \in K$ と，$\mathbf{x} = (x_1,\ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1,\ldots, y_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n$ に対し，和とスカラー倍を
$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \quad a\mathbf{x} = (ax_1, \ldots, ax_n)$$
によって定める．すると，$V_1 \times \cdots \times V_n$ も K-ベクトル空間になる．このとき $V_1 \times \cdots \times V_n$ を別の記号 $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ で表わし，$V_1,\ldots, V_n$ の**直和** (空間) という．

命題 4.7. K は体，$V_1,\ldots, V_n$ は有限次元 K-ベクトル空間とする．すると，$V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ も有限次元で，

$$\dim_K(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n) = \dim_K V_1 + \cdots + \dim_K V_n$$

が成り立つ．

証明. $f\colon V_1 \longrightarrow (V_1 \oplus V_2)$ を $f(x_1) = (x_1, 0)$ で定め，$g\colon (V_1 \oplus V_2) \longrightarrow V_2$ を $f((x_1, x_2)) = x_2$ で定める．すると，f は単射線形写像，g は全射線形写像になる．また，$\operatorname{Im} f$ も $\operatorname{Ker} g$ も $(x_1, 0)$ という形の $V_1 \otimes V_2$ の元全体の集合である．よって，

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f} (V_1 \oplus V_2) \xrightarrow{g} V_2 \longrightarrow 0$$

は完全系列である．定理 4.1 より，$\dim_K(V_1 \oplus V_2) = \dim_K V_1 + \dim_K V_2$ である．

同様に，

$$0 \longrightarrow (V_1 \oplus \cdots \oplus V_{n-1}) \longrightarrow (V_1 \oplus \cdots \oplus V_n) \longrightarrow V_n \longrightarrow 0$$

という完全系列が構成できるので，n に関する帰納法で結論を得る． □

定義 4.8. V は K-ベクトル空間，$W_1,\ldots, W_n \subset V$ は部分空間とする．

$$W_1 + \cdots + W_n := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i w_i \;\middle|\; a_1,\ldots, a_n \in K,\, w_1 \in W_1,\ldots, w_n \in W_n \right\}$$

とおく．容易に分かるように，$W_1+\cdots+W_n$ は V の部分ベクトル空間になる．$W_1+\cdots+W_n$ を $W_1,\ldots, W_n$ の**和** (空間) という．

写像 $f\colon (W_1 \oplus \cdots \oplus W_n) \longrightarrow (W_1 + \ldots + W_n)$ を $f((w_1, \ldots, w_n)) = w_1 + \cdots + w_n$ $(w_i \in W_i)$ によって定める．これは全射線形写像である．もし，f が単射ならば，和 $W_1 + \cdots + W_n$ は**直和**であるといい，簡単のため $W_1 + \cdots + W_n$ と $W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ を f を通して同一視し，$W_1 \oplus \cdots \oplus W_n \subset V$ と書く．

例えば，$x_1,\ldots, x_n \in V$ に対し，$Kx_1 + \cdots + Kx_n$ が直和であることと，$x_1,\ldots, x_n$ が 1 次独立であることは同値である．

定理 4.9. K は体，V は有限次元 K-ベクトル空間，$U, W \subset V$ は部分空間とする．このとき，$U \cap W$ も V の部分空間で，

$$\dim_K(U \cap W) + \dim_K(U + W) = \dim_K U + \dim_K W$$

が成り立つ．

証明. $a \in K$ で $x,\, y \in U \cap W$ のとき，$ax,\, x + y \in U$ かつ $ax,\, x + y \in W$ であるから，ax, $x + y \in U \cap W$ である．よって，$U \cap W$ は部分空間である．

$f\colon (U \cap W) \longrightarrow (U \oplus W)$ を $f(x) = (x, -x)$ で定め，$g\colon (U \oplus W) \longrightarrow (U + W)$ を $g((u, v)) = u + v$ で定める．f は単射線形写像，g は全射線形写像である．また，$\operatorname{Im} f$ と $\operatorname{Ker} g$ は $(x, -x)$ $(x \in U \cap W)$ という形の $U \oplus W$ の元全体の集合である．よって，$\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ であり，

$$0 \longrightarrow (U \cap W) \xrightarrow{f} (U \oplus W) \xrightarrow{g} (U + W) \longrightarrow 0$$

は完全系列である．定理 4.1 と命題 4.7 より，

$$\dim_K(U \cap W) + \dim_K(U + W) = \dim_K(U \oplus W) = \dim_K U + \dim_K W$$

である． □

定理 4.10. m, n は自然数，K は体，$V = K^n$, $W = K^m$, $A \in M_{mn}(K)$ (m 行 n 列行列) とする．また，A から得られる階段行列を B とする．$r = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ とする．また，A, B の j 列目の列ベクトルを $\mathbf{a}_j$, $\mathbf{b}_j$ とする $(j = 1,\ldots, n)$．このとき，以下が成り立つ．

(1) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$ である．よって，連立方程式 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解いて，$(n - r)$ 個の 1 次独立な解のベクトルを求めると，それが $\operatorname{Ker} A$ の基底になる．

(2) B の列ベクトルの中に基本ベクトル $\mathbf{e}_1,\ldots, \mathbf{e}_r$ が現れるが，$\mathbf{e}_k$ $(1 \leqq k \leqq r)$ は B の j_k 列目に現れるとする (つまり $\mathbf{b}_{j_k} = \mathbf{e}_k$)．すると，$r$ 個のベクトルの組 $\mathbf{a}_{j_1}, \mathbf{a}_{j_2},\ldots, \mathbf{a}_{j_r}$ が $\operatorname{Im} A$ の一組の基底になる．

証明. 定理 1.6 より，ある m 次正方行列 $C \in M_m(K)$ により，$B = CA$, $\det C \neq 0$ と書ける．

(1) $\mathbf{x} \in K^n$ に対し，$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ならば，$B\mathbf{x} = C(A\mathbf{x}) = C\mathbf{0} = \mathbf{0}$ である．逆に $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ならば，$A\mathbf{x} = C^{-1}(B\mathbf{x}) = C\mathbf{0} = \mathbf{0}$ である．よって，$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$ である．

(2) $\operatorname{Im} B = K\mathbf{e}_1 \oplus \cdots \oplus K\mathbf{e}_r$ である．$C^{-1}\mathbf{e}_k = C^{-1}\mathbf{b}_{j_k} = \mathbf{a}_{j_k}$ で，C^{-1} は同型写像 $\operatorname{Im} B \longrightarrow \operatorname{Im} A$ を定めるので，$\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_r}$ は $\operatorname{Im} A$ の基底である． □

5. 内積と計量空間

内積は実ベクトル空間と複素ベクトル空間で，若干異なる．時間の関係で，複素ベクトル空間の場合を中心に話し，実ベクトル空間の場合は，その特殊な場合として扱う．量子力学や素粒子論では，エルミート内積が重要である．なお，特殊相対性理論では，普通の内積ではなくローレンツ内積を用いる．

$i = \sqrt{-1}$ を虚数単位とする．複素数 $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対し，$\operatorname{Re} z = x$ (実部), $\operatorname{Im} z = y$ (虚部), $\overline{z} = x - iy$ (共役複素数) と書く．$|z| = x^2 + y^2 = z\overline{z}$ であることに注意する．$\operatorname{Im} z$ (imaginal part) という記号は，線形写像の $\operatorname{Im} f$ (image) と同じ記号であるが，$\operatorname{Im} z$ は複素数 z に対して用い，$\operatorname{Im} f$ は写像 f に対して用いられるので，文脈から混乱することはないと思う．

定義 5.1. 複素数 a_{ij} を成分とする行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

に対して，a_{ij} の共役複素数 $\overline{a_{ij}}$ を (i, j)-成分とする行列を

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{m1}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

と書く．さらに，$\overline{A}$ の転置行列を，$A^* = {}^t\overline{A}$ と書き，A の**随伴行列** (adjoint) という．

A が実行列の場合には，$\overline{A} = A$, $A^* = {}^tA$ である．

$A \in M_{lm}(\mathbb{C})$, $B \in M_{mn}(\mathbb{C})$ のとき，${}^t(BA) = {}^tB{}^tA$ より，

$$(BA)^* = A^*B^*$$

となることに注意する．また，A が複素正方行列のとき，$\det A^* = \overline{\det A}$ である．

複素ベクトル $\mathbf{x}$ も行列の 1 種と考えて $\overline{\mathbf{x}}$ や $\mathbf{x}^*$ を定義する．

定義 5.2. V は複素ベクトル空間とする．$x, y \in V$ に対し複素数 $\langle x, y\rangle \in \mathbb{C}$ を対応させる演算が定義されていて，以下の (1) 〜 (3) を満たすとする．このとき，$\langle\ ,\ \rangle$ は V 上の**エルミート内積**であるという．また，エルミート内積が 1 つ定められた V を**計量空間**という．ベクトル V にエルミート内積を 1 つ定めることを，V に**計量を定める**という．

(1) (第 1 変数に関する線形性) $x, y, z \in V$ と $a, b \in \mathbb{C}$ に対し，

$$\langle (ax + by), z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle$$

(2) (エルミート性) $x, y \in V$ に対し，$\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$

(3) (正定値性) 任意の $x \in V$ に対し，$\langle x, x\rangle$ は 0 以上の実数である．また，$\langle x, x\rangle = 0$ となるのは $x = 0$ の場合に限る．

上の条件 (3) より，$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ と定め，x の**ノルム**とか**長さ**とか**絶対値**という．また，$0 \neq x, y \in V$ に対し，$\cos\theta = \dfrac{\operatorname{Re}\langle x, y\rangle}{|x| \cdot |y|}$ を満たす θ を x と y のなす角度という．また，$\langle x, y\rangle = 0$ のとき，x と y は**直交**するという．ここで，$\langle x, y\rangle = 0$ と $\langle y, x\rangle = 0$ は同値であることに注意する．なお，$x \neq 0, y \neq 0$ のとき，x と y が直交すれば x と y のなす角度は $90°$ (正確には $(n + 1/2)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$) であるが，複素ベクトルについては逆は正しくない．

エルミート内積は，第 2 変数については線形性を持たず，$\langle x, by\rangle = \overline{b}\langle x, y\rangle$ であることに注意しよう．

定義 5.3. V は実ベクトル空間とする．$x, y \in V$ に対し実数 $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$ を対応させる演算が定義されていて，以下の (1) 〜 (3) を満たすとする．このとき，$\langle\ ,\ \rangle$ は V 上の**内積**であるという．

(1) (線形性) $x,\, y,\, z \in V$ と $a,\, b \in \mathbb{C}$ に対し，

$$\langle (ax+by),\, z\rangle = a\langle x,\, z\rangle + b\langle y,\, z\rangle$$

(2) (対称性) $x,\, y \in V$ に対し，$\langle y,\, x\rangle = \overline{\langle x,\, y\rangle}$

(3) (正定値性) 任意の $x \in V$ に対し，$\langle x,\, x\rangle$ は 0 以上の実数である．また，$\langle x,\, x\rangle = 0$ となるのは $x = 0$ の場合に限る．

例 5.4. $I = [a, b]$ は $\mathbb{R}$ 内の閉区間であるとし，I 上で連続な関数全体の集合を $C^0(I)$ と書く．$V = C^0(I)$ は実ベクトル空間である．関数 $f,\, g \in C^0(I)$ に対し，

$$\langle f,\, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

によって，$\langle\ ,\ \ \rangle$ を定める．するとこれは $C^0(I)$ 上の内積になる．

例 5.5. 複素ベクトル空間 $V = \mathbb{C}^n$ において，$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に対し，

$$(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_j}$$

によって，(　,　) を定める．するとこれは $\mathbb{C}^n$ 上のエルミート内積になる．この内積を $\mathbb{C}^n$ の**標準内積**といい，上のようにまるい括弧で表す．他の文献では，$(\mathbf{x},\, \mathbf{y})$ を $\langle \mathbf{x},\, \mathbf{y}\rangle$ とか $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ と書くことも多い。$\mathbb{R}^n$ の標準内積も同様である．標準内積を定めた $\mathbb{C}^n$ を**エルミート空間**という．また，標準内積を定めた $\mathbb{R}^n$ を**ユークリッド空間**という．

命題 5.6. (エルミート内積の基本性質) V はエルミート内積 $\langle\ ,\ \ \rangle$ を持つ計量空間とする．このとき，以下が成り立つ．

(1) $x,\, y,\, z \in V$ と $a,\, b \in \mathbb{C}$ に対し，

$$\langle x,\, (ay+bz)\rangle = \overline{a}\langle x,\, y\rangle + \overline{b}\langle x,\, z\rangle$$

特に，$|ax| = |a|\cdot|x|$.

(2) $|x+y|^2 = |x|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,\, y\rangle + |y|^2 \quad (x,\, y \in V)$.

(3) (Schwartz の不等式) $\bigl|\langle x,\, y\rangle\bigr| \leqq |x|\cdot|y| \quad (x,\, y \in V)$.

(4) (三角不等式) $|x| - |y| \leqq |x+y| \leqq |x| + |y| \quad (x,\, y \in V)$.

証明. (1) $\langle x,\, (ay+bz)\rangle = \overline{\langle (ay+bz),\, x\rangle} = \overline{a\langle y,\, x\rangle} + \overline{b\langle z,\, x\rangle} = \overline{a}\overline{\langle y,\, x\rangle} + \overline{b}\overline{\langle z,\, x\rangle} = \overline{a}\langle x,\, y\rangle + \overline{b}\langle x,\, z\rangle$ である．また，$|ax|^2 = \langle ax,\, ax\rangle = a\overline{a}\langle x,\, x\rangle = |a|^2\cdot|x|^2$.

(2) $|x+y|^2 = \langle (x+y),\, (x+y)\rangle = \langle x,\, x\rangle + \langle x,\, y\rangle + \langle y,\, x\rangle + \langle y,\, y\rangle = |x|^2 + \langle x,\, y\rangle + \overline{\langle x,\, y\rangle} + |y|^2 = |x|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,\, y\rangle + |y|^2$.

(3) $a = \langle x,\, y\rangle$ とおく．$r = |a|$ とし，a の偏角を θ とする．すなわち，$a = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ である．$\omega = \cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta$ とおく．$\omega a = r \geqq 0$ である．よって，

$$\langle \omega x,\, y\rangle = \omega a = r = \bigl|\langle x,\, y\rangle\bigr|$$

が成り立つ．また，$|\omega x| = |x|$ である．つまり，(3) を示すには，$\langle \omega x,\, y\rangle \leqq |\omega x|\cdot|y|$ を示せばよい．t を実数とし，$f(t) = |t\omega x - y|^2$ とおく．$\langle t\omega x,\, y\rangle$ は実数なので，

$$f(t) = t^2|\omega x|^2 - 2t\langle \omega x,\, y\rangle + |y|^2$$

である．任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $f(t) \geqq 0$ なので，t につての 2 次方程式 $f(t) = 0$ の判別式 D は $D \leqq 0$ を満たす．

$$0 \geqq \frac{D}{4} = \langle \omega x,\, y\rangle^2 - |x|^2\cdot|y|^2$$

なので，求める不等式を得る．

(4) $\bigl(|x|+|y|\bigr)^2 - |x+y|^2 = \bigl(|x|^2 + 2|x|\cdot|y| + |y|^2\bigr) - \bigl(|x|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,\, y\rangle + |y|^2\bigr) = 2\bigl(|x|\cdot|y| - \mathrm{Re}\langle x,\, y\rangle\bigr)$ である．ここで，(2) より，$|x|\cdot|y| \geqq \bigl|\langle x,\, y\rangle\bigr| \geqq \mathrm{Re}\langle x,\, y\rangle$ なので，$|x|+|y| \geqq |x+y|$ が得られる．

x に $x+y$, y に $-y$ を代入すると，$|x+y|+|-y| \geqq |(x+y)+(-y)| = |x|$ である．$|-y| = |y|$ なので，$|x|-|y| \geqq |x+y|$ である． □

命題 5.7. $\mathbb{C}^n$ の標準内積について考える．

(I) A, B は n 次正方複素行列とし，$\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ (列ベクトル) とする．このとき，以下が成り立つ．

(1) $(A\mathbf{x},\, B\mathbf{y}) = ({}^t\mathbf{x})({}^tA)\overline{B}\overline{\mathbf{y}}$.

(2) $(A\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = (\mathbf{x},\, A^*\mathbf{y})$.

(II) A, $B \in M_n(\mathbb{C})$ とし，$\mathbf{e}_1,\ldots, \mathbf{e}_n$ は $\mathbb{C}^n$ の標準基底とする．もし，任意の i, $j \in \{1, 2,\ldots, n\}$ に対して $(A\mathbf{e}_i,\, \mathbf{e}_j) = (B\mathbf{e}_i,\, \mathbf{e}_j)$ が成り立てば，$A = B$ である．

特に，任意の $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ に対して $(A\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = (B\mathbf{x},\, \mathbf{y})$ が成り立てば，$A = B$ である．

証明. (I)(1) は明らか．

(2) A の (i, j)-成分を a_{ij} とし，$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ の上から i 番目の成分を x_i, y_i とする．すると，

$$(A\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\overline{y_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\overline{y_i}$$

$$(\mathbf{x},\, A^*\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{\sum_{i=1}^{n} \overline{a_{ij}} y_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\overline{y_i}$$

なので，$(A\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = (\mathbf{x},\, A^*\mathbf{y})$ である．

(II) $(A\mathbf{e}_i,\, \mathbf{e}_j) = a_{ij}$ よりわかる． □

6. 正規直交基底

定義 6.1. V はエルミート内積 $\langle\ ,\ \ \rangle$ を持つ計量空間とする．$x \in V$ が $|x| = 1$ を満たすとき，x は**正規**であるとか**単位ベクトル**であるという．

一般に，$0 \neq x \in V$ のとき，$\dfrac{1}{|x|}x$ は正規である．これを x の**正規化**とか，**単位ベクトル化**という．

$x_1,\ldots, x_n \in V$ で，いずれもゼロベクトルでないとする．任意の $1 \leqq i < j \leqq n$ に対して $\langle x_i,\, x_j\rangle = 0$ が成り立つとき，$x_1,\ldots, x_n$ は**直交系**であるという．$x_1,\ldots, x_n$ が直交系で $|x_1| = \cdots = |x_n| = 1$ であるとき，$x_1,\ldots, x_n$ は**正規直交系**であるという．

いま，V は有限次元ベクトル空間で，$x_1,\ldots, x_n$ は V の基底であるとする．$x_1,\ldots, x_n$ が直交系であるとき，$x_1,\ldots, x_n$ は V の**直交基底**であるという．さらに，$|x_1| = \cdots = |x_n| = 1$ であるとき，$x_1,\ldots, x_n$ は**正規直交基底**であるという．

実ベクトル空間の場合も同様である．

例 6.2. (1) $\mathbb{C}^n$ の標準基底 $\mathbf{e}_1,\ldots, \mathbf{e}_n$ は標準内積について，正規直交基底である．

(2) 実ベクトル空間 $C^0([-\pi,\, \pi])$ に対し，$\langle f,\, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ と内積を定めて計量空間にする．このとき，$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x,\ldots, \sin nx, \cos nx$ は直交系である．

(3) Legendre 多項式 (面倒なので略. 元気のある人は調べてみよう)

定理 6.3. (Schmidt の直交化法) V はエルミート内積 $\langle\ ,\ \ \rangle$ を持つ計量空間とし，$x_1,\ldots, x_n \in V$ は 1 次独立とする．このとき，以下のように $y_1,\ldots, y_n$ および $z_1,\ldots, z_n$ を定める．

まず，$y_1 = x_1$ とする．帰納的に，$y_1,\ldots, y_{k-1}$ $(k \geqq 2)$ まで定まったとき y_k を，

$$y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle x_k,\, y_i\rangle}{|y_i|^2}\, y_i$$

によって定める．(手計算の場合は，y_k を計算した直後に，y_k に適当に 0 でない定数を掛けて，登場する数字が簡単な数字になるようにしておくとよい．y_k を $a_k y_k$ (a_k は 0 でない定数) に取り換えるという操作をしても，この公式は正しく機能する.)

また，$z_1=\dfrac{1}{|y_1|}y_1,\, z_2=\dfrac{1}{|y_2|}y_2, \ldots,\, z_n=\dfrac{1}{|y_n|}y_n$ と定める．

すると，$y_1, \ldots, y_n$ は直交系であり，$z_1, \ldots, z_n$ は正規直交系である．さらに，任意の整数 $1 \leqq k \leqq n$ に対して，

$$\mathbb{C}x_1+\cdots+\mathbb{C}x_k=\mathbb{C}y_1+\cdots+\mathbb{C}y_k=\mathbb{C}z_1+\cdots+\mathbb{C}z_k$$

が成り立つ．

このように $x_1, \ldots, x_n$ から $z_1, \ldots, z_n$ を構成する方法を **Schmidt の直交化法**という．$x_1, \ldots, x_n$ の並び順で結果が変わってくることに注意せよ．

証明. $\mathbb{C}x_1+\cdots+\mathbb{C}x_k=\mathbb{C}y_1+\cdots+\mathbb{C}y_k=\mathbb{C}z_1+\cdots+\mathbb{C}z_k$ は構成方法から明らか．$y_1, \ldots, y_n$ が直交系であるところだけが自明でない．それには，$y_1, \ldots, y_{k-1}$ が直交系であることを仮定して，y_k が $y_1, \ldots, y_{k-1}$ と直交することを示せばよい．それは，$1 \leqq j \leqq k-1$ に対し，

$$\langle y_k,\, y_j\rangle=\langle x_k,\, y_j\rangle-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\langle x_k,\, y_i\rangle}{|y_i|^2}\langle y_i,\, y_j\rangle=\langle x_k,\, y_j\rangle-\frac{\langle x_k,\, y_i\rangle}{|y_i|^2}\langle j_j\,\langle y_i,\, y_j\rangle=0$$

からわかる． □

系 6.4. (正規直交化基底の存在) V はエルミート内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ計量空間とする．もし，V が有限次元ならば V は正規直交基底を持つ．

証明. V の基底を取り，前定理の方法でそれから正規直交系を作れば，それが V の正規直交基底になる． □

定義 6.5. V はエルミーと内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ複素ベクトル空間，$W \subset V$ は部分空間とする．このとき，

$$W^{\perp}:=\left\{x \in V \,\middle|\, 任意の\ y \in W\ に対し\ \langle x,\, y\rangle=0\right\}$$

とおき，$W^{\perp}$ を W の**直交補空間**という．

命題 6.7. 上の定義の記号を用いる．このとき，以下が成り立つ．

(1) $W \subset (W^{\perp})^{\perp}$

(2) W が有限次元ならば $V=W \oplus W^{\perp}$

(3) W が有限次元ならば $W=(W^{\perp})^{\perp}$

証明. (1) $x \in W$ を取る．任意の $y \in W^{\perp}$ に対し $\langle x,\, y\rangle=0$ だから，$x \in (W^{\perp})^{\perp}$ である．よって，$W \subset (W^{\perp})^{\perp}$.

(2) $W+W^{\perp} \subset V$ は自明．$\dim W=n<+\infty$ ならば，W の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ を取ることができる．$x \in V$ に対し，$p(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\langle x,\, e_i\rangle\, e_i \in W$ で定まる線形写像 $p\colon V \to W$ を V から W への**正射影**という．また，$q(x)=x-p(x)$ とおく．

$$\langle q(x),\, e_j\rangle=\langle x,\, e_j\rangle-\sum_{i=1}^{n}\langle x,\, e_i\rangle\,\langle e_i,\, e_j\rangle=\langle x,\, e_j\rangle-\langle x,\, e_j\rangle=0$$

なので，任意の $y=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_ie_i \in W$ $(a_i \in \mathbb{C})$ に対し，$\langle q(x),\, y\rangle=0$ である．よって，$q(x) \in W^{\perp}$ である．$q\colon V \longrightarrow W^{\perp}$ も線形写像で，これを V から $W^{\perp}$ への正射影という．

さて，任意の $x \in V$ に対し，$x=p(x)+q(x) \in W+W^{\perp}$ であるから，$W+W^{\perp} \supset V$ である．

$\varphi:(W \oplus W^{\perp}) \longrightarrow (W+W^{\perp})$ が単射であることは，$\varphi((x,y))=x+y=0$ ならば，$0=p(x+y)=x$ よりわかる．

(3) は (2) からすぐわかる． □

定理 6.8. K は体，V は有限次元 K-ベクトル空間，$f\colon V\to V$ は線形写像，$x_1,\ldots,x_n$ は V の基底，$y_1,\ldots,y_n$ も V の基底とする．$f(x_j)=\displaystyle\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i$ で $a_{ij}\in K$ を定め，a_{ij} を (i,j)-成分とする n 次正方行列を $A=(a_{ij})$ とする．同様に，$f(y_j)=\displaystyle\sum_{i=1}^n b_{ij}y_i$ で $b_{ij}\in K$ を定め，$B=(b_{ij})$ とする．さらに，$y_j=\displaystyle\sum_{i=1}^n p_{ij}x_i$ で $p_{ij}\in K$ を定め，$P=(p_{ij})$ とする．すると，P は逆行列を持つ n 次正方行列で，$B=P^{-1}AP$ が成り立つ．

A を基底 $x_i,\ldots,x_n$ に関する f の**表現行列**, P を基底 $x_i,\ldots,x_n$ から基底 $y_1,\ldots,y_n$ への**基底変換行列**という．

証明. $x_j=\displaystyle\sum_{i=1}^n q_{ij}y_i$ で $q_{ij}\in K$ を定め，$Q=(q_{ij})$ とする．$x_j=\displaystyle\sum_{i=1}^n q_{ij}y_i=\sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^n p_{ik}q_{kj}x_i$ で，$x_1,\ldots,x_n$ は 1 次独立なので，$i\neq j$ のときは $\displaystyle\sum_{k=1}^n p_{ik}q_{kj}=0$, $i=j$ のときは $\displaystyle\sum_{k=1}^n p_{ik}q_{ki}=1$ である．つまり，$PQ=I_n$ である．よって，$Q=P^{-1}$ である．

$\displaystyle\sum_{i=1}^n b_{ij}y_i=f(y_j)=f\left(\sum_{i=1}^n p_{ij}x_i\right)=\sum_{l=1}^n p_{lj}f(x_l)=\sum_{l=1}^n\sum_{k=1}^n a_{kl}p_{lj}x_k=\sum_{l=1}^n\sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^n q_{ik}a_{kl}p_{lj}y_i$ で，$y_1,\ldots,y_n$ は 1 次独立なので，$b_{ij}=\displaystyle\sum_{l=1}^n\sum_{k=1}^n q_{ik}a_{kl}p_{lj}$ である．これは，$B=QAP=P^{-1}AP$ を意味する． □

定義 6.9. (行列の直和) 一般に，K を体とし，正方行列 $A\in M_m(K)$, $B\in M_n(K)$ に対し，$m+n$ 次の正方行列 $A\oplus B$ を以下のように定める．$A\oplus B$ の左上は A, 右下は B とし，それ以外の成分は 0 とする．つまり，A, B, $A\oplus B$ の (i,j)-成分を a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} とするとき，$i\leqq m$, $j\leqq m$ ならば $c_{ij}=a_{ij}$ で，$i>m$, $j>m$ ならば $c_{ij}=b_{i-m,j-m}$ とする．それ以外の場合は $c_{ij}=0$ とする．

3 個以上の場合は，帰納的に，$A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_n=(A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_{n-1})\oplus A_n$ と定義する．$A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_n$ を $A_1,\ldots,A_n$ の**直和**という．

定理 6.10. K は体，$V_1,\ldots,V_r$ は有限次元 K-ベクトル空間，$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_r$, $f\colon V\to V$ は線形写像とする．今，各 $i=1,\ldots,r$ に対し $f(V_i)\subset V_i$ が成り立つと仮定する．このとき，$x\in V_i$ に対し $f_i(x)=f(x)\in V_i$ により，線形写像 $f_i\colon V_i\to V_i$ を定義する．$\dim V_i=n_i$ とし，$x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i}$ を V_i の基底とする．また，この基底に関する f_i の表現行列を A_i とする．さらに，$V_1,\ldots,V_n$ を並べてできる V の基底 $x_{1,1},\ldots,x_{1,n_1}$, $x_{2,1},\ldots,x_{2,n_2},\ldots,x_{r,1},\ldots,x_{r,n_r}$ に関する f の表現行列を A とする．すると，$A=A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_r$ である．

証明. 例えば $1\leqq j\leqq n_1$ について，$f(x_{1,j})=\displaystyle\sum_{i=1}^{n_1}a_{ij}x_{i,j}$ である．これは A の最初の n_1 個の列ベクトルが $A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_r$ の最初の n_1 個の列ベクトルと一致することを意味する．それ以降の列についても同様である． □

7. エルミート・ユニタリー

定義 7.1. 複素正方行列 $A\in M_n(\mathbb{C})$ について考える．

(1) $A^*=A$ を満たすとき，A は**エルミート** (Hermite, Hermitian) であるという．

(2) $A^*A=I_n$ (I_n は n 次の単位行列) を満たすとき，A は**ユニタリー** (unitary) であるという．

実正方行列 $A\in M_n(\mathbb{R})$ については，A がエルミート，つまり ${}^tA=A$ を満たすとき (実) **対称**行列であるといい，A がユニタリー，つまり ${}^tA=A^{-1}$ を満たすとき (実) **直交**行列であるという．

命題 7.2. (I) 複素正方行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ について以下が成り立つ．

(1) A がエルミートであるための必要十分条件は，任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ に対し，$(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{y})$ が成り立つことである．

(2) A がユニタリーであるための必要十分条件は，任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ に対し，$(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が成り立つことである．

(3) A がユニタリーであるための必要十分条件は，任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ に対し，$|A\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ が成り立つことである．

(II) 実正方行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ について以下が成り立つ．

(4) A が対称行列であるための必要十分条件は，任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{y})$ が成り立つことである．

(5) A が実直交行列であるための必要十分条件は，任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が成り立つことである．

(6) A が実直交行列であるための必要十分条件は，任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$|A\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ が成り立つことである．

証明. (1), (2) は $(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (A^*\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と，命題 5.6(II) からわかる．

(3) 自明でないのは，$|A\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ から $(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を導く部分だけである．

$|A\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ の $\mathbf{x}$ に $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ を代入して両辺を 2 乗する．

$|A\mathbf{x}|^2 + \mathrm{Re}(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) + |A\mathbf{y}|^2 = |A(\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + \mathrm{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + |\mathbf{y}|^2$ であるが，$|A\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}|^2$. $|A\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{y}|^2$ なので，$\mathrm{Re}(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = \mathrm{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が得られる．$i = \sqrt{-1}$ とおくとき，$\mathrm{Re}(-i\mathbf{x}) = \mathrm{Im}\,\mathbf{x}$ である．よって，$\mathbf{x}$ に $-i\mathbf{x}$ を代入すると，$\mathrm{Im}(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = \mathrm{Re}(A(-i\mathbf{x}), A\mathbf{y}) = \mathrm{Re}((-i\mathbf{x}), \mathbf{y}) = \mathrm{Im}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が得られる．実部と虚部がともに等しいので，$(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が導かれる．

(4), (5), (6) は (1), (2), (3) と同様である． □

上の命題から，以下の定義の妥当性がわかる．

定義 7.3. V はエルミート内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ複素計量空間，$f\colon V \to V$ は線形写像とする．

(1) 任意の $x, y \in V$ に対し $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$ が成り立つとき，f は**エルミート**であるという．

(2) 任意の $x \in V$ に対し $|f(x)| = |x|$ が成り立つとき，f は**ユニタリー**であるという．

参考までに，量子力学や素粒子論では，V を波動関数がなす複素計量空間とするとき,「観測可能な物理量はエルミートな線形写像 (演算子) で表すことができる」,「ゲージ変換はユニタリーな線形写像で表すことができる」という原理がある．この部分は，安藤ではなく，物理の先生に聞いて下さい．

命題 7.4. (1) エルミート行列のトレースと行列式は実数である．

(2) A がユニタリー行列ならば $|\det A| = 1$ である．特に，A が実直交行列ならば $\det A = \pm 1$ である．

(3) $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ がエルミート行列で，$k \in \mathbb{R}$ ならば，$A + B$ と kA もエルミート行列である．

(4) $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ がユニタリー行列 (または実直交行列) ならば，AB と A^{-1} もユニタリー行列 (または実直交行列) である．

証明. 一般に，$A \in M_n(\mathbb{C})$ に対し，$\det A^* = \det \overline{A} = \overline{\det A}$, $\mathrm{tr}\,A^* = \mathrm{tr}\,\overline{A} = \overline{\mathrm{tr}\,A}$ である．

(1) $A = A^*$ ならば $\overline{\det A} = \det A^* = \det A$, $\overline{\mathrm{tr}\,A} = \mathrm{tr}\,A^* = \mathrm{tr}\,A$ なので，$\det A$, $\mathrm{tr}\,A$ は実数である．

(もっとも，$\mathrm{tr}\,A$ については，エルミート行列の対角成分はすべて実数なので，$\mathrm{tr}\,A$ が実数なのは自明とも言える.)

(2) $A^*A = I_n$ ならば，$1 = \det(A^*A) = (\det A^*)(\det A) = \overline{\det A}\det A = |\det A|^2$ である．

(3) $A^* = A$, $B^* = B$ ならば $(A+B)^* = A^* + B^* = A + B$, $(kA)^* = k(A^*) = kA$.

(4) $A^* = A^{-1}$, $B^* = B^{-1}$ ならば，$(AB)^* = (B^*)(A^*) = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$. $(A^{-1})^* = (A^*)^* = A = (A^{-1})^{-1}$. □

命題 7.5. $n = 2$ の場合，直交行列は

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad T(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

という形のものしかない．$R(\theta)$ は $\det R(\theta)=1$ を満たし，原点を中心とする角 θ の回転を表す．$T(\theta)$ は $\det T(\theta)=-1$ を満たし，直線 $y=\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)x$ に関する対称移動を表す．

証明. $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ とし，${}^tAA=I_n$ を満たすと仮定する．成分で表すと，$a^2+b^2=1$, $d^2+c^2=1$, $ac+bd=0$ である．$a^2+b^2=1$, $d^2+c^2=1$ より，$(a,\,b)$, $(d,\,c)$ は単位円周上にあるので，ある θ, $\varphi\in\mathbb{R}$ により，$a=\cos\theta$, $b=\sin\theta$, $d=\cos\varphi$, $c=\sin\varphi$ と表すことができる．$0=ac+bd=\sin(\theta+\varphi)$ なので，$\theta+\varphi=n\pi$ (n は整数) となる．n が偶数のとき $A=R(\theta)$ であり，n が奇偶のとき $A=T(\theta)$ となる．

$\mathbf{x}(\varphi)=\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ に対し，$R(\theta)\mathbf{x}(\varphi)=\mathbf{x}(\theta+\varphi)$ となるから，$R(\theta)$ は原点を中心とする角 θ の回転を表す．また，$T(\theta)\mathbf{x}(\varphi)=\mathbf{x}(\theta-\varphi)$ となり，$\mathbf{x}(\varphi)$ と $\mathbf{x}(\theta\varphi)$ は直線 $y=\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)x$ に関して対称である． □

命題 7.6. K は体，$A_1,\,B_1\in M_{m_1,m_1}(K)$; $A_2,\,B_2\in M_{m_1,m_1}(K)$;…; $A_n,\,B_n\in M_{m_n,m_n}(K)$ とする．このとき以下が成り立つ．

(1) $(A_1\oplus\cdots\oplus A_n)+(B_1\oplus\cdots\oplus B_n)=(A_1+B_1)\oplus\cdots\oplus(A_n+B_n)$

(2) $(A_1\oplus\cdots\oplus A_n)(B_1\oplus\cdots\oplus B_n)=(A_1B_1)\oplus\cdots\oplus(A_nB_n)$

(3) $\det(A_1\oplus\cdots\oplus A_n)=(\det A_1)(\det A_2)\cdots(\det A_n)$.

(4) $K=\mathbb{C}$ で $A_1,\ldots,A_n$ がエルミート行列ならば，$A_1\oplus\cdots\oplus A_n$ もエルミート行列である．

(5) $K=\mathbb{C}$ で $A_1,\ldots,A_n$ がユニタリー行列ならば，$A_1\oplus\cdots\oplus A_n$ もユニタリー行列である．

(証明は自明なので省略)

実直交行列の話にもどる．$1\leqq k<l\leqq n$, $\theta\in\mathbb{R}$ に対し，n 次正方行列 $R_{kl}(\theta)$ を以下のように定める．$R_{kl}(\theta)$ の $(i,\,j)$-成分を r_{ij} とする．まず，

$$r_{kk}=r_{ll}=\cos\theta,\quad r_{lk}=\sin\theta,\quad r_{kl}=-\sin\theta$$

とする．$1\leqq i\leqq n$, $i\neq k,\,l$ のとき $r_{ii}=1$ とする．上記以外の $(i,\,j)$ については $r_{ij}=0$ とする．

容易にわかるように，$R_{kl}(\theta)R_{kl}(\varphi)=R_{kl}(\theta+\varphi)$, $R_{kl}(-\theta)=R_{kl}(\theta)^{-1}$, $\det R_{kl}(\theta)=1$ が成り立つ．特に，$R_{kl}(\theta)$ は実直交行列である．

$R_{kl}(\theta)$ が定める線形写像 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ を (x_k,x_l)-平面上での角度 θ の**回転**という．

定理 7.7. $A\in M_n(\mathbb{R})$ は実直交行列で $\det A=1$ を満たすとする．すると，A は $R_{kl}(\theta)$ という形の行列何個かの積 (k, l, θ はいろいろ変わる) で表すことができる．

証明. n に関する帰納法で証明する．$n=2$ の場合は命題 7.5 からわかる．以下，$n\geqq 3$ とする．A の $(i,\,j)$-成分を a_{ij} とする．

$a_{11}=0$ ならば $\theta_n=\pi/2$ とおく．$a_{11}\neq 0$ の場合は $\theta_n=-\tan^{-1}(a_{n1}/a_{11})$ とおく．

$B=R_{1n}(\theta_n)A$ とし，B の $(i,\,j)$-成分を b_{ij} とする．$b_{n1}=a_{11}\sin\theta_n+a_{n1}\cos\theta_n=0$ である．B も直交行列で $A=R_{1n}(-\theta_n)B$ だから，B が $R_{kl}(\theta)$ という形の行列の積で書けることを証明すればよい．そこで，A の代わりに B を考えることにより，最初から $a_{n1}=0$ であると仮定してよい．

次に，$a_{11}=0$ ならば $\theta_{n-1}=\pi/2$, $a_{11}\neq 0$ の場合は $\theta_{n-1}=-\tan^{-1}(a_{n-1,1}/a_{11})$ とおく．$B=R_{1,n-1}(\theta_{n-1})A$ とおくと，$b_{n,1}=0$, $b_{n-1,1}=0$ が成り立つ．A の代わりに B を考えることにより，最初から $a_{n,1}=a_{n-1,1}=0$ と仮定してよい．

$\theta_{n-2}=-\tan^{-1}(a_{n-2,1}/a_{11})$ とおき $B=R_{1,n-2}(\theta_{n-2})A$ とおくと，$b_{n,1}=b_{n-1,1}=b_{n-2,1}=0$ が成り立つ．そこで，$a_{n,1}=a_{n-1,1}=a_{n-2,1}=0$ と仮定してよい．この操作を $n-1$ 回繰り返すと，$a_{n,1}=a_{n-1,1}=a_{n-2,1}=\cdots=a_{31}=a_{21}=0$ の場合に帰着される．

$I_n={}^tAA$ の両辺の $(1,1)$-成分を比較すると，$1=a_{11}^2+a_{21}^2+\cdots+a_{n1}^2=a_{11}^2$ である．よって，$a_{11}=\pm 1$ である．$a_{11}=1$ のときは $\theta_1=0$, $a_{11}=-1$ のときは $\theta_1=\pi$ とおく．$B=R_{12}(\theta_1)$ とおくと，$b_{11}=1$, $b_{21}=\cdots=b_{n1}=0$ となる．A の代わりに B を考えることにより，最初から A の 1 列目の列ベクトルは $\mathbf{e}_1$ であると仮定してよい．

$A({}^tA) = I_n$ の (1, 1)-成分を比較すると，$a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2 = 1$ であるが，$a_{11} = 1$ なので，$a_{12} = a_{13} = \cdots = a_{1n} = 0$ となる．そこで，$c_{ij} := a_{i+1,j+1}$ を (i, j)-成分とする $n-1$ 次正方行列を C とする．${}^tAA = I_n$ より ${}^tCC = I$ はすぐわかり，C は直交行列である．$A = I_1 \oplus C$ であることに注意する．また，$\det C = \det A = 1$ である．

帰納法の仮定から，C は $n-1$ 次の $R_{kl}(\theta)$ という形の行列で表すことができる．$C = R'_1 \cdots R'_m$ (R'_i は $n-1$ 次の $R_{kl}(\theta)$ という形の行列) とする．$R_i = I_1 \oplus R'_i$ とおけば，$I_1 \oplus C = R_1 \cdots R_m$ となる．R_i は n 次の $R_{kl}(\theta)$ という形の行列なので，定理が証明された． □

定義 7.8. 実直交行列 A が $\det A = 1$ を満たすとき，A が定める線形写像を，原点を中心とする**回転**という．

実直交行列 A が $\det A = -1$ を満たすときは，$(-I_1) \oplus I_{n-1}$ など，適当な対称移動を表す行列を A に掛けると，行列式が 1 の直交行列が得られる．対称移動については定理 9.6 の後で考察する．

付録 1. ローレンツ内積

ここは，物理学科等，特殊相対性理論を将来勉強する人を対象とした解説である．ここでは，アインシュタインの光速度一定の法則からではなく，ローレンツ変換の考え方に基づいて，行列の理論として特殊相対性理論を導く方法を説明する．

c を真空中の光速とし，$\mathbb{R}^4$ の座標系 (x, y, z, t) を，慣性運動をしている観測者から見て，(x, y, z) が空間，t が時刻を表すように設定する．

このとき，$\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1), \mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in \mathbb{R}^4$ に対し，

$$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - c^2t_1t_2$$

と定め，これを，**ローレンツ内積**という．素粒子論では，

$$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = c^2t_1t_2 - x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2$$

のほうをローレンツ内積として利用することが多いが，符号が異なるだけで，本質的には同じ結果を導く．ここでは，最初に説明したほうのローレンツ内積を用いる．

ローレンツ内積をもとに，距離と角度を上と同じ方法で定める．このとき $\mathbb{R}^4$ を**ミンコフスキー空間**という．また，4 次実正方行列 A が，任意のベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^4$ に対し，

$$\langle A\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle$$

を満たすとき，A は**ローレンツ変換**であるという．

以下，ローレンツ変換の具体的な形を決定することを考えるが，$\mathbb{R}^4$ で考えると空間部分 $\mathbb{R}^3$ での直交行列が含まれて，計算が複雑になるので，以下のように $\mathbb{R}^2$ で考える．実は，等速直線運動をしている観測座標系の進行方向を x-軸として選んでおけば，y, z 軸方向は直交変換に寄与するだけで，空間軸と時間軸の間の変換法則は $\mathbb{R}^2$ で考えたものと同じであることが証明できる (少しだけ難しいので省略する)．

$\mathbb{R}^2$ を (x, t)-平面と考え，x-軸を空間軸，t-軸を時間軸と呼ぶことにする．$\mathbf{x}_1 = (x_1, t_1), \mathbf{x}_2 = (x_2, t_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し，

$$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = x_1x_2 - c^2t_1t_2$$

と定め，これを，$\mathbb{R}^2$ のローレンツ内積という．また，2 次実正方行列 A が，任意のベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\langle A\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle$ を満たすとき，(2 次元の) ローレンツ変換という．

上に述べたように，以下のことが知られている．ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^4$ における任意の 4 次元のローレンツ変換 A は，$\det R = 1$ を満たす 3 次の実直交行列 R をうまく選んで，

$$A = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & b_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_{41} & 0 & 0 & b_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と表すことができる．ここで，$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{14} \\ b_{41} & b_{44} \end{pmatrix}$ は，2 次元のローレンツ変換である．ここでは，2 次元のローレンツ変換 $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{14} \\ b_{41} & b_{44} \end{pmatrix}$ を決定する方法を説明する．

v は $|v| < c$ を満たす実数とし，

$$L_v = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \dfrac{-v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ \dfrac{-v/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{pmatrix}, \quad T_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とおく．T_x を空間反転, T_t を時間反転という．

L_v, T_x, T_t がいずれもローレンツ変換であることは，簡単な計算 (L_v については少し長い計算になるが) で確認できる．

定理 7.10. 2 次元のローレンツ変換 A は $L_v, T_xL_v, T_tL_v, T_xT_tL_v$ の形のいずれかである．

証明. A をローレンツ変換とする．$A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix}$ とおく．$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = {}^t\mathbf{x}_1 C \mathbf{x}_2$ と書ける．${}^t\mathbf{x}_1 C\mathbf{x}_2 = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = \langle A\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2 \rangle = {}^t(A\mathbf{x}_1)C(A\mathbf{x}_2) = {}^t\mathbf{x}_1({}^tACA)\mathbf{x}_2$ が任意の $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^2$ について成り立つので，${}^tACA = C$ が成り立つ．成分で書くと，

$$\begin{pmatrix} p^2 - c^2r^2 & pq - c^2rs \\ pq - c^2rs & q^2 - c^2s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix}$$

である．つまり，$p^2 - c^2r^2 = 1, q^2 - c^2s^2 = -c^2, pq - c^2rs = 0$ である．$c^2s^2 = c^2 + q^2 > 0$ なので $s \neq 0$ である．そこで，$v = -q/s$ とおく．$q = -vs$ を $q^2 - c^2s^2 = -c^2$ に代入すると，$s = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ を得る．$s < 0$ の場合は，T_tA もローレンツ変換なので，A のかわりに T_tA を考えることにより $s > 0$ と仮定しておく．

以下，$s = \dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ の場合を考える．$q = -vs = \dfrac{-v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ である．$pq - c^2rs = 0$ より $pq = c^2rs$ であるが，$q = -vs$ を代入すると，$r = -vp/c^2$ を得る．これを，$p^2 - c^2r^2 = 1$ に代入すると，$p = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ を得る．$p < 0$ の場合は，A のかわりに T_xA を考えることにより $p > 0$ と仮定しておく．すると $p = \dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$, $q = \dfrac{-v/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ となり，$A = L_v$ が得られる．

ここに到達するまでに，A には左から T_t や T_x を掛けた可能性があるが，$T_t^{-1} = T_t$, $T_x^{-1} = T_x$, $T_tT_x = T_xT_t$ に注意すると，$A = L_v, T_xL_v, T_tL_v, T_xT_tL_v$ いずれかであることがわかる． □

ところで，ローレンツ変換 L_v における v の物理学的意味を考える．$|v|$ が c に比べて非常に小さい場合，$L_v \fallingdotseq \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．$\mathbf{x}_2 = L_v\mathbf{x}_1$ という 1 次変換はによって，空間座標は $x_2 \fallingdotseq x_1 - vt_1$ となる．これは x_1-座標系から見ると x_2-座標系が速度 $-v$ で等速移動していること，つまり x_2-座標系から見ると x_1-座標系が速度 v で等速移動していることを表す．すなわち，L_v は x_1-座標系から見て速度 v で等速移動している座標系 x_2 への座標変換を表す．

命題 7.11. (速度の合成法則) $w = \dfrac{u+v}{1+(uv/c^2)}$ とおくとき，

$$L_uL_v = L_w$$

が成り立つ．これは，静止座標系から見て速度 u で運動している慣性座標から見て速度 v で運動している物体は，静止座標系から見て速度 w で運動しているように見えることを表す．

証明. 行列の積 L_uL_v を実際に成分表示を利用して計算してみるだけである． □

8. 固有値

一般に，K を体，V を K-ベクトル空間，$f: V \to V$ を線形写像とする．スカラー $\lambda \in K$ に対し $f(x) = \lambda x$ を満たす $0 \neq x \in V$ が存在するとき，λ は f の**固有値**であるといい，x は λ に関する f の**固有ベクトル**であるという．

量子力学や素粒子論では，V が波動関数からなる複素ベクトル空間の場合の固有値の理論が重要なのであるが，ちょっと難しい．1 年生では，V が有限次元の場合のみを学習し，V が無限次元の場合は上の学年で勉強する．

$e_1,\ldots, e_n$ を V の基底とする．$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$ を満たす $a_{ij} \in K$ が存在する．a_{ij} を (i, j)-成分とする n 次正方行列を A とする．すると，f が A が定める線形写像と一致する．このとき，$e_1,\ldots, e_n \in V$ は標準ベクトル $\mathbf{e}_1,\ldots, \mathbf{e}_n \in K^n$ に対応する．

定義 8.1. $A \in M_n(K)$ に対し，λ が A の**固有値**であるとは，$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ を満たすような 0 でないベクトル $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in K^n$ が存在することをいう．このとき，$\mathbf{x}$ は λ に関する A の**固有ベクトル**であるという．t を変数，I_n を n の単位行列とし，

$$f_A(t) := \det(tI_n - A)$$

とおく．$f_A(t)$ は t について，K 係数の n 次多項式である．また，$f_A(t)$ の t^n の係数は 1 である．$f_A(t)$ を A の**固有多項式**という．

命題 8.2. 上の定義の記号を用いる．λ が A の固有値であるための必要十分条件は，$f_A(\lambda) = 0$ を満たすことである．

証明. $\lambda\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ $(\mathbf{0} \neq \exists\mathbf{x} \in K^n) \iff (\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{x}$ $(\mathbf{0} \neq \exists\mathbf{x} \in K^n) \iff \mathrm{Ker}(\lambda I_n - A)$ の中にゼロでないベクトルがある．$\iff \dim\mathrm{Ker}(\lambda I_n - A) \geqq 1 \iff \mathrm{rank}\,\mathrm{Ker}(\lambda I_n - A) \leqq n-1 \iff (\lambda I_n - A)$ は逆行列を持たない．$\iff \det(\lambda I_n - A) = 0$ □

したがって，n 次方程式 $f_A(t) = 0$ の解全体が A の固有値全体である．特に，A の固有値は高々 n 個である．また，λ が $f_A(t) = 0$ の m 重解であるとき，固有値 λ の**重複度**は m であるという．n 次方程式 $f_A(t) = 0$ を A の**固有方程式**という．

λ を A の固有値とする．$\mathbf{x}$ が λ に関する A の固有値であることと，$\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(\lambda I_n - A)$ は同値である．$\mathrm{Ker}(\lambda I_n - A)$ を固有値 λ に関する A の**固有空間**という．$\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(\lambda I_n - A)$ であることに注意する．

命題 8.3. $A, B, P \in M_n(K)$ で，P^{-1} が存在し，$P^{-1}AP = B$ が成り立つと仮定する．すると，A と B の固有多項式は一致する．

証明. A, B の固有多項式を $f_A(t), f_B(t)$ とする．

$$f_B(t) = \det(tI_n - B) = \det(tI_n - P^{-1}AP) = \det P^{-1}(tI_n - A)P = (\det P^{-1})(\det(tI_n - A))(\det P)$$

である．$\det P^{-1} = (\det P)^{-1}$ なので，$f_B(t) = f_A(t)$ である． □

命題 8.4. A, P は n 次正方行列で P^{-1} が存在すると仮定する．いま，P の第 j 列目の列ベクトルを $\mathbf{x}_i$ とする．すなわち，$P = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$. また，

$$\Lambda = \lambda_1 I_1 \oplus \lambda_2 I_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n I_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad ①$$

という対角行列を考える．もし，$P^{-1}AP = \Lambda$ が成り立てば，λ_i は A の固有値で，$\mathbf{x}_i$ は λ_i に関する A の固有ベクトルである．

証明. $(tI_n - \Lambda)$ も対角行列で，上半三角行列の行列式の公式より，

$$\det(tI_n - \Lambda) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)\cdots(t - \lambda_n)$$

である．前命題より $f_A(t) = f_\Lambda(t)$ なので，λ_i は A の固有値である．$AP = P\Lambda$ であるが，AP の第 j 列目は $A\mathbf{x}_j$, $P\Lambda$ の第 j 列目は $\lambda_j\mathbf{x}_j$ である．$AP = P\Lambda$ の第 j 列目を比較すると，$A\mathbf{x}_j = \lambda_j\mathbf{x}_j$ が得られる．P^{-1} が存在するので，$\mathbf{x}_j \neq \mathbf{0}$ である．よって，$\mathbf{x}_j$ は λ_j に関する A の固有ベクトルである． □

上の命題のように，$P^{-1}AP = \Lambda$ と表すことを，A の**対角化**という．また，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような正方行列 P が存在するとき，A は**対角化可能**であるという．上の命題から，そのような P があるとすれば，P の各列ベクトルは A の固有ベクトルで，それらは 1 次独立でなければならない．

一般に，A が正方行列のとき，多項式 $f(t) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ に対し，

$$f(A) = a_m A^m a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$$

と約束する．$f(A)$ は正方行列になる．

命題 8.5. K は体，$g_1(t)$, $g_2(t)$,..., g_n は K-係数多項式，$f(t) = g_1(t)g_2(t)\cdots g_r(t)$, $A \in M_n(K)$ は正方行列とする．このとき，$f(A) = g_1(A)g_2(A)\cdots g_r(A)$ が成り立つ．また，i_1, i_2,..., i_r が 1, 2,..., r の任意の並べ替えのとき，

$$g_{i_1}(A)g_{i_2}(A)\cdots g_{i_r}(A) = g_1(A)g_2(A)\cdot g_r(A)$$

が成り立つ．

証明. $r = 2$ の場合に証明すれば，あとは帰納法ですぐわかる．$r = 2$ の場合は，$(a_i A^i)(b_j A^j) = (a_i a_j)A^{i+j}$ よりすぐわかる． □

上の命題より，$f(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)\cdots(t - \lambda_n)$ の場合，

$$f(A) = (A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)\cdots(A - \lambda_n I_n)$$

であることに注意する．

定理 8.6.(ケーリー・ハミルトンの公式) $A \in M_n(K)$，$f_A(t) = \det(tI_n - A)$ とする．このとき，$f_A(A) = O$ が成り立つ．

証明. $tI_n - A$ の余因子行列を $B(t)$ とする．つまり，$tI_n - A$ の第 i 行と第 j 列を取り除いてできる $n-1$ 次正方行列を $\tilde{A}_{ij}(t)$ とするとき，$B(t)$ の $(i,\,j)$-成分 $b_{ij}(t)$ は，$b_{ij}(t) = (-1)^{i+j}\det\tilde{A}_{ji}(t)$ である．ここで，$\tilde{A}_{ij}(t)$ の各成分は 1 次以下の多項式だから，$b_{ij}(t)$ は $n-1$ 次以下の多項式である．$b_{ij}(t)$ の t^k の係数を $(i,\,j)$-成分とする n 次正方行列を B_k とすれば，B_k は定数行列で，$B(t) = t^{n-1}B_{n-1} + t^{n-2}B_{n-2} + \cdots + tB_1 + B_0$ である．

逆行列の公式より，$B(t)(tI_n - A) = f_A(t)I_n$ が成り立つ．今，$f_A(t) = c_n t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_1 t + c_0$ とおく．$B(t)(tI_n - A) = f_A(t)I_n$ の両辺の t^n, t^k $(1 \leqq k \leqq n-1)$, t^0 の係数を比較すると，

$$B_{n-1} = c_n I_n, \quad B_{k-1} - B_k A = c_k I, \quad -B_0 A = c_0 I$$

が成り立つ．すると，

$$\begin{aligned} f_A(A) &= c_n A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I_n \\ &= B_{n-1}A^n + (B_{n-2} - B_{n-1}A)A^{n-1} + (B_{n-3} - B_{n-2}A)A^{n-2} \\ &\qquad\quad + \cdots + (B_1 - B_A)A^2 + (B_0 - B_1 A)A + (-B_0 A)I_n \\ &= O \end{aligned}$$

となる． □

定理 8.7.(代数学の基本定理) $f(t)$ は複素数係数 n 次多項式 $(n \geqq 1)$ とする．すると，ある複素数 λ_1, λ_2,..., λ_n が存在して，

$$f(t) = a_n(t - \lambda_1)(t - \lambda_2)\cdots(t - \lambda_n)$$

と 1 次式の積に因数分解できる．

証明は，複素関数論を使うもの，ガロア理論を使うもの，など多数知られているが，いずれも大学 1 年までの数学の知識で扱えるものではないので，この定理の証明は割愛する．実数係数多項式の範囲で因数分解しようとすると，2 次の既約多項式が因数に現れることがあるので,「n 次方程式が，解の重複度を込めて考えたとき n 個の解を持つ」という性質が成立しない．

★ 固有方程式が重解を持たない場合

記号は上の通りとし，

$$f_A(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_n) \quad (\lambda_1,\, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \text{ は相異なる } K \text{ の元})$$

となる場合，つまり，固有方程式 $f_A(t) = 0$ が重解を持たない場合を考える．A の固有値 λ_i に関する固有ベクトルの 1 つを $\mathbf{x}_i$ とする．固有ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ を並べてできる n 次正方行列を

$$P = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$$

とおく．また，固有値を対角線上に並べてできる対角行列を

$$\Lambda = \lambda_1 I_1 \oplus \lambda_2 I_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n I_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

とおく．

命題 8.8. 上の仮定と記号のもと，P は可逆行列で $P^{-1}AP = \Lambda$ が成り立つ．

証明.

$$AP = (A\mathbf{x}_1,\, A\mathbf{x}_2, \ldots, A\mathbf{x}_n)$$
$$P\Lambda = (\lambda_1\mathbf{x}_1,\, \lambda_2\mathbf{x}_2, \ldots, \lambda_n\mathbf{x}_n)$$

であるが，$A\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}$ より，$AP = P\Lambda$ である．

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ は 1 次独立であることを示す．$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$, $(c_1, \ldots, c_n \in K)$ とする．$B_1 = (A-\lambda_2 I_n)(A-\lambda_3 I_n)\cdots(A-\lambda_n I_n)$ とおく．上の B_1 の右辺の行列の積の順序は自由に変更してよく，$j \geqq 2$ のとき $(A-\lambda_j I_n)\mathbf{x}_j = \mathbf{0}$ なので，$B_1\mathbf{x}_j = \mathbf{0}$ $(j \geqq 2)$ である．また，$(A-\lambda_j I_n)\mathbf{x}_1 = (\lambda_1-\lambda_j)\mathbf{x}_1$ なので，

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = B_1\mathbf{0} = B_1\big(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n\big) &= c_1B_1\mathbf{x}_1 + c_2B_1\mathbf{x}_2 + \cdots + c_nB_1\mathbf{x}_n \\ &= c_1B_1\mathbf{x}_1 = c_1(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\cdots(\lambda_1-\lambda_n)\mathbf{x}_1\end{aligned}$$

である．$\lambda_1 - \lambda_j \neq 0, \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$ なので，$c_1 = 0$ を得る．同様な議論で，$c_2 = \cdots = c_n = 0$ が得られ，$\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ は 1 次独立である．

よって，$\operatorname{rank} P = n$ であり，P^{-1} が存在する．したがって，$P^{-1}AP = \Lambda$ である． □

9. エルミート行列の対角化

一般的な線形代数の教科書では,「対称行列の対角化」とか「エルミート行列の対角化」が説明されているが，問題を少し一般化して考える．

定義 9.1. 複素正方行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ が $(A^*)A = A(A^*)$ を満たすとき，A は**正規**行列であるという．
例えば，エルミート行列，ユニタリー行列，実対称行列，実直交行列はすべて正規行列である．

定理 9.2. $A \in M_n(\mathbb{C})$ の第 j 列を $\mathbf{a}_j$ とおく．
(1) A がユニタリー行列であるための必要十分条件は，$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ が $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底であることである．
(2) A, B が n 次のユニタリー行列ならば，AB と A^{-1} もユニタリー行列である．

証明. (1) A^*A の (i, j)-成分は $\overline{(\mathbf{a}_i,\, \mathbf{a}_j)}$ であるので，$A^*A = I_n$ と，$\overline{(\mathbf{a}_i,\, \mathbf{a}_j)} = \delta_{ij}$ は同値である．ここで，$i \neq j$ のとき $\delta_{ij} = 0$, ここで，$i = j$ のとき $\delta_{ij} = 1$ で，δ_{ij} を**クロネッカーの** δ という．

(2) $A^* = A^{-1}$, $B^* = B^{-1}$ ならば，$(AB)^* = B^*A^* = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ なので AB はユニタリーである．また，$(A^{-1})^* = (A^*)^* = A = (A^{-1})^{-1}$ なので，A^{-1} もユニタリーである． □

定理 9.3. $A \in M_n(\mathbb{C})$ は正規行列であるとする．このとき，あるユニタリー行列 $P \in M_n(\mathbb{C})$ により，P^*AP が対角行列になるようにできる．

証明. n に関する帰納法で証明する．

$n=1$ の場合は $P=I_1$ とすればよい．

$n \geqq 2$ とし，$n-1$ 次以下の正方行列については定理は成立すると仮定する．A の固有値の 1 つを λ とし，$W=\mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)$ とする．$\dim W=m$ とし，$\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m$ を W の正規直交基底とする．また，$\mathbf{x}_{m+1},\ldots,\mathbf{x}_n$ を $W^\perp$ の正規直交基底とする．すると，$\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ は $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底である．$P=(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)$ とおくと，P はユニタリー行列である．

(i) $\mathbf{x}\in W$ ならば $A\mathbf{x}\in W$, $A^*\mathbf{x}\in W$ を示す．

$\mathbf{x}\in W=\mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)$ ならば，$A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}\in W$ である．

また，$A(A^*\mathbf{x})=A^*A\mathbf{x}=A^*\lambda\mathbf{x}=\lambda(A^*\mathbf{x})$ より，$(A-\lambda I_n)(A^*\mathbf{x})=\mathbf{0}$ であり，$A^*\mathbf{x}\in\mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)=W$ である．

(ii) $\mathbf{x}\in W^\perp$ ならば $A\mathbf{x}\in W^\perp$, $A^*\mathbf{x}\in W^\perp$ を示す．

$\mathbf{x}\in W^\perp$ とする．任意の $\mathbf{y}\in W$ を取る．$A\mathbf{y}\in W$ より，$(A^*\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{x},A\mathbf{y})=0$ である．また，$A^*\mathbf{y}\in W$ より，$(A\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{x},A^*\mathbf{y})=0$ である．よって，$A\mathbf{x}\in W^\perp$, $A^*\mathbf{x}\in W^\perp$ である．

(i), (ii) より A が定める線形写像 f_A の定義域を，$W, W^\perp$ に制限すると，線形写像 $f_1\colon W\to W$ と，$f_2\colon W^\perp\to W^\perp$ が得られる．f_1 の正規直交基底 $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m$ に関する表現行列を B_1, f_2 の正規直交基底 $\mathbf{x}_{m+1},\ldots,\mathbf{x}_n$ に関する表現行列を B_2 とする．$B=P^{-1}AP=P^*AP$ とおくと，B は f の正規直交基底 $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ に関する表現行列である．定理 6.10 より，$B=B_1\oplus B_2$ である．$B^*=(P^*AP)^*=P^*A^*(P^*)^*=P^{-1}A^*P$ に注意すると，$B^*B=(P^{-1}A^*P)(P^{-1}AP)=P^{-1}A^*AP=P^{-1}AA^*P=(P^{-1}AP)(P^{-1}A^*P)=BB^*$ となる．よって，B も正規行列である．

$BB^*=(B_1B_1^*)\oplus(B_2B_2^*)$, $B^*B=(B_1^*B_1)\oplus(B_2^*B_2)$ より，$B_1B_1^*=B_1^*B_1$, $B_2B_2^*=B_2^*B_2$ が得られ，B_1, B_2 は正規行列であることがわかる．

帰納法の仮定から，ある m 次ユニタリー行列 Q_1 と，$(n-m)$ 次ユニタリー行列 Q_2 が存在して，$Q_1^*B_1Q_1$, $Q_2^*B_2Q_2$ は対角行列になる．$Q=Q_1\oplus Q_2$ とおけば，$Q^*Q=Q_1^*Q_1\oplus Q_2^*Q_2=Q_1^{-1}Q_1\oplus Q_2^{-1}Q_2=I_m\oplus I_{n-m}=I_n$ なので Q もユニタリー行列で，$Q^*BQ=(Q_1^*B_1Q_1)\oplus(Q_2^*B_2Q_2)$ は対角行列になる．$P_0=PQ$ とおけば，P_0 もユニタリー行列で，$P_0^*AP_0=Q^*BQ$ は対角行列になる．□

系 9.4. A は正規行列，λ と μ は A の相異なる固有値とする．$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ を λ, μ に関する A の固有ベクトルとすると，$(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ である．

証明. 前定理と命題 8.4 から，すぐわかる．□

正規行列の対角化の計算方法

(原理的方法) A は n 次の正規行列とする．A の固有多項式

$$f_A(t)=\det(tI_n-A)=(t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\cdots(t-\lambda_r)^{m_r}$$

を計算する ($i\neq j$ のとき $\lambda_i\neq\lambda_j$)．ただし，$f_A(t)$ の計算と，n 次方程式 $f_A(t)=0$ を解くのは，容易ではないし，近似解しか得られないこともある．

$W_{\lambda_i}=\mathrm{Ker}(A-\lambda_iI_n)$ の基底を掃き出し法など適当な方法で 1 組求め，それからシュミットの直交化法など適当な方法で，W_{λ_i} の正規直交基底を求める．この計算も結構面倒である．

$W_{\lambda_1},\ldots,W_{\lambda_r}$ の正規直交基底を順に並べたものを $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ とすると，上で述べたことから，これは $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底になる．そこで，$P=(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)$ とおくと，これはユニタリー行列になる．このとき，P^*AP は (計算するまでもなく) 対角行列 $\lambda_1I_{m_1}\oplus\cdots\oplus\lambda_rI_{m_r}$ になる．

(計算機を使う場合の数値計算のアルゴリズム)

実対称行列については，Jacobi 法などのアルゴリズムが有名である．本講義の範囲外 (「数値計算法」などの講義で扱う) ので，省略する．

定理 9.5. (1) エルミート行列 A の固有値は，すべて実数である．

(2) ユニタリー行列 A の任意の固有値 λ は，$|\lambda|=1$ を満たす．

証明. $A\in M_n(\mathbb{C})$, λ は A の固有値，$\mathbf{0}\neq\mathbf{x}\in\mathbb{C}^n$ は λ に関する A の固有ベクトルとする．

(1) A がエルミートならば，$\lambda(\mathbf{x},\mathbf{x})=(\lambda\mathbf{x},\mathbf{x})=(A\mathbf{x},\mathbf{x})=(\mathbf{x},A\mathbf{x})=(\mathbf{x},A\mathbf{x})=(\mathbf{x},\lambda\mathbf{x})=\overline{\lambda}(\mathbf{x},\mathbf{x})$ となる．$(\mathbf{x},\mathbf{x})\neq 0$ だから，$\lambda=\overline{\lambda}$ で，λ は実数である．

(2) A がユニタリーならば，$|\lambda|^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x}) = (A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$ となる．$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \neq 0$ だから，$|\lambda|^2 = 1$ で，$|\lambda| = 1$ となる． □

定理 9.6. $A \in M_n(\mathbb{R})$ は実対称行列であるとする．このとき，ある実直交行列 $P \in M_n(\mathbb{R})$ により，${}^tPAP$ が対角行列になるようにできる．ここで，$\det P = 1$ であるように P を選ぶことができる．

証明. 前定理より，実対称行列の固有値はすべて実数である．よって，固有空間 W_{λ_i} の正規直交基底として実ベクトルからなるものが選べる．$W_{\lambda_1}, \ldots, W_{\lambda_r}$ の正規直交基底を並べた行列を P とすれば，P は実直交行列である．上の定理から，${}^tPAP$ は対角行列である．ここで，$\det P = \pm 1$ であるが，もし $\det P = -1$ の場合には，例えば，P の第1列目の符号を反対にしたものを改めて P とすれば，$\det P = 1$ であって，${}^tPAP$ は対角行列である． □

一般に，$W \subsetneqq \mathbb{R}^n$ を部分ベクトル空間として，
(1) $\mathbf{x} \in W$ ならば $P\mathbf{x} = \mathbf{x}$
(2) $\mathbf{x} \in W^{\perp}$ ならば $P\mathbf{x} = -\mathbf{x}$
が成り立つとき，直交行列 P は W に関する**対称移動**を表す，と定義するのが $n \leqq 3$ の場合から考えて妥当である．上の (1), (2) の条件は，P が ± 1 以外の固有値を持たず，-1 を固有値として持つことと同値である．

$\det P = -1$ を満たす実直交行列は -1 を固有値として持つ (証明してみよ) ので，$P\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ を満たす固有ベクトルが存在する．しかし，$\mathbb{R}\mathbf{x}$ の直交補空間上には P は回転として作用する．したがって，$n = 2$ の場合 $\det P = -1$ を満たす直交行列は対称移動を表すが，$n \geqq 3$ の場合は，回転でも対称移動でもない直交変換が存在する．

10. スペクトル分解・2次形式

定理 10.1.(スペクトル分解) A は正規行列とする．

$$f_A(t) = \det(tI_n - A) = (t - \lambda_1)^{m_1}(t - \lambda_2)^{m_2} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r}$$

($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ は相異なる) とし，$W_i = \mathrm{Ker}(\lambda_i I_n - A)$ とおく．O_r で r 次の正方ゼロ行列を表すことにし，

$$E_i = O_{m_1} \oplus \cdots \oplus O_{m_{i-1}} \oplus I_{m_i} \oplus O_{m_{i+1}} \oplus \cdots \oplus O_{m_r}$$

とおく．ユニタリー行列 P は，

$$P^{-1}AP = \lambda_1 I_{m_1} \oplus \lambda_2 I_{m_2} \oplus \cdots \oplus \lambda_r I_{m_r} = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_r E_r$$

と A を対角化するような行列とする．また，$P_i = PE_iP^{-1}$ とおく．すると，以下が成り立つ．
(1) $P_1 + P_2 + \cdots + P_r = I_n$
(2) $P_i^2 = P_i$ $(i = 1, \ldots, r)$
(3) $i \neq j$ のとき $P_iP_j = O$
(4) $A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_r P_r$
(5) $\mathrm{Im}\, P_i = W_i$

(4) のように A を表すことを，A の**スペクトル分解**という．また，P_i を固有空間 W_i への**射影子**という．

証明. (1) $E_1 + \cdots + E_r = I_n$ なので $P_1 + \cdots + P_r = PE_1^{-1} + \cdots + PE_rP^{-1} = P(E_1 + \cdots + E_r)P^{-1} = PI_nP^{-1} = I_n$.

(2) $E_i^2 = E_i$ よりわかる．

(3) $i \neq j$ のとき $E_iE_j = O$ よりわかる．

(4) $A = P^{-1}\big(\lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_r E_r\big)P = \lambda_1 P^{-1}E_1P + \cdots + \lambda_r P^{-1}E_rP = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_r P_r$.

(5) $\mathbf{x} \in \mathrm{Im}\, P_i$ ならば，ある $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ により $\mathbf{x} = P_i\mathbf{y}$ と書ける．(2), (3), (4) より，$AP_i = \lambda_i P_i$ が成り立つ．よって，$A\mathbf{x} = AP_i\mathbf{y} = P_i\mathbf{y} = \mathbf{x}$ となり，$\mathbf{x} \in W_i$ となる．したがって，$\mathrm{Im}\, P_i \subset W_i$ である．他方 (1) より $\mathrm{Im}\, P_1 + \cdots + \mathrm{Im}\, P_r = \mathbb{C}^n = W_1 + \cdots + W_r$ なので，$\mathrm{Im}\, P_i = W_i$ である． □

定理 10.2.(同時対角化) $A_1, A_2, \ldots, A_m \in M_n(\mathbb{C})$ はエルミート行列で，任意の $1 \leqq i < j \leqq m$ に対し $A_iA_j = A_jA_i$ が成り立つと仮定する．すると，あるユニタリー行列 P が存在し，$P^*A_1P, P^*A_2P, \ldots, P^*A_mP$ が一斉に対角行列になるようにできる．(A_i が正規行列の場合にまで拡張することはできない.)

証明. n に関する帰納法で証明する．$n = 1$ のときは自明．また，$m = 1$ のときは定理 9.3. $m \geqq 2$, $n \geqq 2$ とする．

A_1 の 1 つの固有値 λ_1 をとり，$W_1 = \mathrm{Ker}(A_1 - \lambda_1 I_n)$ とおく．$W_1 = \mathbb{C}^n$ ならば $A_1 = \lambda_1 I_n$ だから，$n-1$ の場合に帰着される．そこで，$W_1 \subsetneqq \mathbb{C}^n$ と仮定する．

$\mathbf{x} \in W_1$ を取ると，$A_1A_i\mathbf{x} = A_iA_1\mathbf{x} = \lambda_1 A_i\mathbf{x}$ なので，$A_i\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(A_1 - \lambda_1 I_n) = W_1$ となる．

また，$\mathbf{y} \in W_1^\perp$ を取ると，任意の $\mathbf{x} \in W_1$ に対して $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ だから，A_i がエルミートであることを使うと，$(\mathbf{x}, A_i\mathbf{y}) = (A_i\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\lambda_1\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ となり，$A_i\mathbf{y} \in W_1^\perp$ であることがわかる．

$l = \dim W_1$ とし，$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_l$ を W_1 の正規直交基底，$\mathbf{x}_{l+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$ を $W_1^\perp$ の正規直交基底とする．$Q_1 = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ とおくと，Q_1 はユニタリー行列である．$B_i = Q_1^*A_iQ_1$ とおくと，$B_1, \ldots, B_m$ もエルミート行列で，$B_iB_j = B_jB_i$ を満たす．また，定理 6.10 より，$B_i = C_i \oplus D_i$ (C_i は l 次，D_i は $n-l$ 次正方行列) と書ける ($i = 1, \ldots, m$)．ここで，C_i, D_i もエルミート行列で，$C_iC_j = C_jC_i$, $D_iD_j = D_jD_i$ を満たす.

よって，n についての帰納法の仮定から，ある l 次，$n-l$ 次のユニタリー行列 Q_2, Q_3 により，$Q_2^*C_1Q_2, \ldots, Q_2^*C_mQ_2$; $Q_3^*D_1Q_2, \ldots, Q_3^*D_mQ_2$ が対角行列になるようにできる．そこで，$P = Q_1(Q_2 \oplus Q_3)$ とおけば，$P^*A_1P, \ldots, P^*A_mP$ は対角行列になる． □

同時対角化の計算手順を考える．まず，A_1 を直交行列 P_1 により対角化する．${}^tP_1A_1P_1$, ${}^tP_1A_2P_1, \ldots, {}^tP_1A_mP_1$ を計算してみる．上の定理の証明からもわかるが，実際に計算してみると，${}^tP_1A_2P_1, \ldots, {}^tP_1A_mP_1$ は，かなり対角行列に近くなっている．つまり，n_1 次, n_2 次, …, n_r 次の対称行列の直和になっている．

次に，${}^tP_1A_2P_1$ の n_1 次, n_2 次, …, n_r 次の小行列である各対称行列を直交行列で対角化する．そこで用いた直交行列の直和を P_2 とする．${}^t(P_1P_2)A_1(P_1P_2) = {}^tP_1A_1P_1$ であり，変化しない．${}^t(P_1P_2)A_2(P_1P_2)$ は対角行列である．${}^t(P_1P_2)A_3(P_1P_2), \ldots, {}^t(P_1P_2)A_r(P_1P_2)$ はさらに小さな対称行列の直和になる．以下，同様の操作を繰り返せばよい.

話題 10.3.(2 次形式とその符号) 実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ で考える．

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1 \leqq i < j \leqq n} a_{ij}x_ix_j \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

を **2 次形式**という．

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とし，$i > j$ のとき $a_{ij} = a_{ji}$ で a_{ij} を定め，a_{ij} を (i, j)-成分とする実対称行列を A とすれば，上の 2 次形式は，

$$f(x_1, \ldots, x_n) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$$

と書くことができる．A はある実直交行列 P により ${}^tPAP = \Lambda$ が対角行列になるようにできる．ここで，$\det P = 1$ であるように P を選ぶことができる．Λ の対角成分を左上から順に $c_1, \ldots, c_n$ とする．必要なら P の列ベクトルを適当に並び変えることにより，$c_1 \geqq c_2 \geqq \cdots \geqq c_r > 0$, $c_{r+1} \leqq c_{r+2} \leqq \cdots \leqq c_{r+s} < 0$, $c_{r+s+1} = c_{r+s+2} = \cdots = c_n = 0$ であると仮定してよい．ここで，r, s は A から定まる 0 以上の整数で，$r + s \leqq n$ を満たす．

$$Q = \frac{1}{\sqrt{c_1}}I_1 \oplus \cdots \oplus \frac{1}{\sqrt{c_r}}I_1 \oplus \frac{1}{\sqrt{-c_{r+1}}}I_1 \oplus \cdots \oplus \frac{1}{\sqrt{-c_{r+s}}}I_1 \oplus O_{n-r-s}$$

とおく．すると，Q は対称行列で，$Q\Lambda Q = I_r \oplus (-I_s) \oplus O_{n-r-s}$ である．よって，$T = PQ$ とおけば，

$${}^tTAT = I_r \oplus (-I_s) \oplus O_{n-r-s}$$

となる．言い換えると，$\mathbf{y} = T\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ とおけば，

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (y_1^2 + \cdots + y_r^2) - (y_{r+1}^2 + \cdots + y_{r+s}^2)$$

となる．(r, s) を 2 次形式 f の**符号**という．

有理全体の集合 $\mathbb{Q}$ は体であるが，$\mathbb{Q}$-ベクトル空間 $\mathbb{Q}^n$ における 2 次形式は $\mathbb{R}$ の場合よりずっと複雑で，整数論や代数幾何といろいろそれに関連する問題が発生する．

定義 10.4. (1) m 次多項式 $g(t) = b_m t^m + b_{m-1}t^{m-1} + \cdots + b_1 t + b_0$ $(b_m \neq 0)$ に対し，その次数 m を $m = \deg g(t)$ で表す．また，最高次の係数が $b_m = 1$ を満たすとき，$g(t)$ は**モニック**であるという．

(2) K は体，$f_1(t)$, $f_2(t)$,..., $f_r(t)$ は K-係数多項式とする．このとき，$f_1(t)$, $f_2(t)$,..., $f_r(t)$ の最大公約数と最小公倍数をそれぞれ，

$$\mathrm{GCD}(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_r(t)), \quad \mathrm{LCM}(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_r(t))$$

と書く．ただし，モニック多項式になるように選んでおく．

命題 10.5. K は体，$f_1(t)$, $f_2(t)$,..., $f_r(t)$ は K-係数多項式で，$\mathrm{GCD}(f_1(t), f_2(t),\ldots, f_r(t)) = 1$ であると仮定する．すると，

$$f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + \cdots + f_r(t)g_r(t) = 1$$

を満たす K-係数多項式 $g_1(t)$, $g_2(t)$,..., $g_r(t)$ が存在する．

証明. $I := \left\{ \sum_{i=1}^{r} f_i(t)g_i(t) \;\middle|\; g_1(t), g_2(t),\ldots, g_r(t) \text{ は } K\text{-係数多項式} \right\}$ とおく．$h_1(t)$, $h_2(t) \in I$ ならば $h_1(t) + h_2(t) \in I$ であることは容易にわかる．また，$h_1(t) \in I$ で $h_2(t)$ が任意の K-係数多項式のとき，$h_1(t)h_2(t) \in I$ であることも容易にわかる．

さて，I に含まれる 0 でない次数最小の多項式を $f_0(t)$ とする．最高次の係数で割って，$f_0(t)$ はモニックであると仮定してよい．$f_0(t)$ の任意の倍数は I に属する．

逆に，I の任意の元は $f_0(t)$ の倍数であることを証明する．I の任意の元 $q(t)$ を取る．$g(t)$ を $f_0(t)$ で割った商を $q(t)$, 余りを $r(t)$ とする．$g(t) = f_0(t)q(t) + r(t)$, $f_0(t)q(t) \in I$, $g(t) \in I$ より，$r(t) = g(t) - f_0(t)q(t) \in I$ である．$r(t)$ が 0 でないと，余りの次数は $f_0(t)$ の次数より小さいので，$f_0(t)$ の次数最小性に反する．よって，$r(t) = 0$ で $g(t)$ は $f_0(t)$ の倍数である．よって，I は $f_0(t)$ の倍数全体の集合である．

ところで，$g_1(t) = 1$, $g_2(t) = \cdots = g_r(t) = 0$ の場合を考えれば $f_1(t) \in I$ がわかる．よって，$f_1(t)$ は $f_0(t)$ の倍数である．同様に，$f_2(t)$,..., $f_r(t)$ も $f_0(t)$ の倍数である．したがって，$\mathrm{GCD}(f_1(t), f_2(t),\ldots, f_r(t)) = 1$ は $f_0(t)$ の倍数である．$f_0(t)$ はモニックなので，$f_0(t) = 1$ である．$1 \in I$ なので，$f_1(t)g_1(t) + \cdots + f_r(t)g_r(t) = 1$ を満たす K-係数多項式 $g_1(t)$,..., $g_r(t)$ が存在する． □

命題 10.6. K は体，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in K$ とし，

$$f(t) = (t - \lambda_1)^{m_1}(t - \lambda_2)^{m_2} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r}$$
$$f_i(t) = \frac{f(t)}{(t - \lambda_i)^{m_i}} \quad (i = 1, \ldots, r)$$

とする．このとき，

$$f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + \cdots + f_r(t)g_r(t) = 1$$

を満たす K-係数多項式 $g_1(t)$, $g_2(t)$,..., $g_r(t)$ が存在する．

証明. $f_i(t)$ は K-係数多項式で $t - \lambda_i$ では割り切れない．よって，$\mathrm{GCD}(f_1(t), f_2(t),\ldots, f_r(t)) = 1$ である．したがって，前命題から結論を得る． □

11. 最小多項式

ここでは，固有多項式が重解を持つ場合を中心に考える．$A \in M_n(\mathbb{C})$ とし，その固有多項式を

$$f_A(t) = \det(tI_n - A) = (t - \lambda_1)^{m_1}(t - \lambda_2)^{m_2} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r} \qquad ①$$

とする．ここで，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ は相異なる複素数で，$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$ である．以後，①のような書き方をしたら，常にこのように約束する．

$W_i = \mathrm{Ker}(\lambda I_n - A)$ とおく．もし，すべての $i = 1,\ldots, r$ に対し $\dim W_i = m_i$ が成り立てば，それぞれの W_i の基底を取り，それらを並べて n 次正方行列 P を作れば，命題8.8とまったく同様に，$P^{-1}AP = \Lambda$ が成立する．問題は，$\dim W_i < m_i$ となる i が存在する場合である．もっとも，$\dim W_i \leqq m_i$ であることも，まだ証明してなかった．しかし，その証明にも，いろいろ準備が必要である．

定義 11.1. A の固有多項式 $f_A(t)$ は $f_A(A) = O$ を満たす．そこで，$g(A) = O$ であるような多項式全体の集合を考え，その中で最も次数が低い 1 次以上の多項式を $g_0(t)$ とする．$g_0(t)$ の最高次の係数を c とし，$\Phi_A(t) = (1/c)g_0(t)$ とおく．このとき，$\Phi_A(A) = (1/c)g_0(A) = O$ が成り立つ．この $\Phi_A(t)$ を A の**最小多項式**という．

命題 11.2. A を n 次複素正方行列，$f_A(t) = \det(tI_n - A)$ とする．
(1) A の最小多項式 $\Phi_A(t)$ は A から一意的に定まる．
(2) $f_A(t)$ は $\Phi_A(t)$ の倍数である．
(3) λ は A の固有値，$\mathbf{x}$ は λ に関する A の固有ベクトルとする．また，$h(t)$ は複素数係数多項式とする．このとき $h(A)\mathbf{x} = h(\lambda)\mathbf{x}$ が成り立つ．
(4) A の任意の固有値 λ に対し，$\Phi_A(\lambda) = 0$ が成り立つ．

証明. (1) $\Phi_A(t)$ とは別の A の最小多項式 $h(t)$ があったとする．次数の最小性から，$\deg \Phi_A(t) = \deg h(t)$ である．$h_1(t) = \Phi_A(t) - h(t)$ とおくと，$h_1(t)$ はゼロでなく，$h_1(A) = O, \deg h_1(A) < \deg \Phi_A(t)$ を満たす．$r(t)$ が 0 でないことは，$\deg \Phi_A(t)$ の最小性に矛盾する．

(2) $f_A(t)$ が $\Phi_A(t)$ の倍数でないと仮定してみる．$f_A(t)$ を $\Phi_A(t)$ で割った商を $q(t)$, 余りを $r(t)$ とする．$f(A) = \Phi_A(t)q(t) + r(A)$ である．$f_A(A) = O, \Phi_A(A) = O$ より，$r(A) = O$ がわかる．これは，$\deg \Phi_A(t)$ の最小性に矛盾する．

(3) $A^2\mathbf{x} = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$ で，以下，帰納法で $A^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$ がわかる．これより，一般に複素数係数多項式 $h(t)$ に対して，$h(A)\mathbf{x} = h(\lambda)\mathbf{x}$ が成り立つ．

(4) $\Phi_A(\lambda)\mathbf{x} = \Phi_A(A)\mathbf{x} = O\mathbf{x} = \mathbf{0}$ である．$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ だから，$\Phi_A(\lambda) = 0$ である． □

命題 11.3. A, B, P は n 次複素正方行列で，P^{-1} が存在すると仮定する．また，$\Phi_A(t), \Phi_B(t)$ は A, B の最小多項式とする．もし，$P^{-1}AP = B$ が成り立つならば，$\Phi_A(t) = \Phi_B(t)$ である．

証明. $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ が成立するので，一般に，複素数係数多項式 $h(t)$ に対し $h(P^{-1}AP) = P^{-1}h(A)P$ が成り立つ．よって，$h(A) = O$ であることと $h(B) = O$ であることは同値になる．これより，$\Phi_A(t) = \Phi_B(t)$ である． □

補題 11.4. $A_1, A_2,\ldots, A_r$ が n 次正方行列ならば，
$$\sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{Ker}\, A_i \geqq \dim \mathrm{Ker}(A_1A_2\cdots A_n)$$
が成り立つ．

証明. r に関する帰納法で証明する．$r = 2$ のときを考える．$f\colon \mathrm{Ker}\, A_2 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, A_1A_2$ を包含写像とする．これは，単射線形写像である．$g\colon \mathrm{Ker}\, A_1A_2 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, A_1$ を $g(\mathbf{x}) = A_2\mathbf{x}$ で定義する．$W = \mathrm{Im}\, g$ とし，g の値域を W に制限して得られる全射線形写像を $g_0\colon \mathrm{Ker}\, A_1A_2 \longrightarrow W$ とする．$\mathrm{Ker}\, g_0 = \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Ker}\, A_2 = \mathrm{Im}\, f$ なので，$0 \to \mathrm{Ker}\, A_2 \xrightarrow{f} \mathrm{Ker}\, A_1A_2 \xrightarrow{g_0} W \to 0$ は完全系列である．よって，次元定理より，$\dim \mathrm{Ker}\, A_1A_2 = \dim \mathrm{Ker}\, A_2 + \dim \mathrm{Ker}\, W \leqq \dim \mathrm{Ker}\, A_2 + \dim \mathrm{Ker}\, A_1$ である．

$r \geqq 3$ とし，$r-1$ 以下の場合の結論を仮定する．$B = A_1 \cdots A_{r-1}$ とすれば，$\dim \mathrm{Ker}(A_1A_2\cdots A_r) = \dim \mathrm{Ker}\, BA_r \leqq \dim \mathrm{Ker}\, B + \dim \mathrm{Ker}\, A_r \leqq (\dim \mathrm{Ker}\, A_1 + \cdots + \dim \mathrm{Ker}\, A_{r-1}) + \dim \mathrm{Ker}\, A_r$ である． □

命題 11.5. 複素正方行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ の固有多項式は
$$f_A(t) = \det(tI_n - A) = (t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\cdots(t-\lambda_r)^{m_r}$$
($\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_r$ は相異なる複素数) であるとする．$f_i(t) = \dfrac{f_A(t)}{(t-\lambda_i)^{m_i}}$ とし，$g_1(t)f_1(t)+\cdots+g_r(t)f_r(t) = 1$ を満たす複素数係数多項式 $g_1(t), \ldots, g_r(t)$ をとる (命題 10.6 参照)．$P_i = g_i(A)f_i(A)$ とおく．また $\mathbf{x}_i$

を固有値 λ_i に関する A の固有ベクトルとし，$\widetilde{W_i} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I_n)^{m_i}$ とおく．このとき，以下が成り立つ．
(1) $P_1 + P_2 + \cdots + P_r = I_n$
(2) $P_i^2 = P_i$ $(i = 1, \ldots, r)$
(3) $i \neq j$ のとき $P_i P_j = O$
(4) 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ に対し，$P_i \mathbf{x} \in \widetilde{W_i}$
(5) $P_i \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$
(6) $i \neq j$ のとき $P_i \mathbf{x}_j = \mathbf{0}$

証明. (1) $g_1(t)f_1(t) + \cdots + g_r(t)f_r(t) = 1$ の t に A を代入すると得られる．
(2), (3) $i \neq j$ のとき，$g_i(t)f_i(t)g_j(t)f_j(t)$ は $f_A(t)$ の倍数なので，$g_i(t)f_i(t)g_j(t)f_j(t) = h_{ij}(t)f_A(t)$ ($h_{ij}(t)$ は多項式) と書ける．すると，$P_i P_j = h_{ij}(A)f_A(A)$ であるが，$f_A(A) = O$ より $P_i P_j = O$ である．また，これより，$P_i^2 = P_i(P_1 + \cdots + P_r) = P_i I_n = P_i$ である．
(4) 勝手な $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ を取る．$f_i(t)(t - \lambda_i)^{m_i} = f_A(t)$ なので，ケーリー・ハミルトンの定理から，$P_i(A - \lambda_i I_n)^{m_i} = O$ である．よって，$(A - \lambda_i I_n)^{m_i}\mathbf{x} \in \widetilde{W_i}$ である．
(5), (6) $i \neq j$ のとき $f_i(t)$ は $(t - \lambda_j)$ の倍数で，$(A - \lambda_j I_n)\mathbf{x}_j = \mathbf{0}$ であるので，$P_i \mathbf{x}_j = \mathbf{0}$ がわかる．これより，$\mathbf{x}_j = I_n \mathbf{x}_j = (P_1 + P_2 + \cdots + P_n)\mathbf{x}_j = P_j \mathbf{x}_j$ が得られる．
□

命題 11.6. A は複素正方行列，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ は A の相異なる固有値，$W_i = \mathrm{Ker}(\lambda_i I_n - A)$ とおく．すると，和 $W_1 + W_2 + \cdots + W_r$ は直和である．
つまり，$\mathbf{0} \neq \mathbf{x}_1 \in W_1, \ldots, \mathbf{0} \neq \mathbf{x}_r \in W_r$ とするとき，$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r$ は 1 次独立である．

証明. $\varphi\colon (W_1 \oplus \cdots \oplus W_r) \longrightarrow (W_1 + \cdots + W_r)$ を $\varphi((a_1\mathbf{x}_1, \ldots, a_r\mathbf{x}_r)) = a_1\mathbf{x}_1 + \cdots + a_r\mathbf{x}_r$ で定めるとき，φ が単射であることを示せばよい ($a_i \in \mathbb{C}$).
$a_1\mathbf{x}_1 + \cdots + a_r\mathbf{x}_r = \mathbf{0}$ とする．前命題のような $P_1, \ldots, P_r$ をとる．

$$\mathbf{0} = P_i\mathbf{0} = P_i(a_1\mathbf{x}_1 + \cdots + a_r\mathbf{x}_r) = a_1 P_i \mathbf{x}_1 + \cdots + a_r P_i \mathbf{x}_r = a_i \mathbf{x}_i$$

で $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$ より $a_i = 0$ $(i = 1, \ldots, r)$ である．よって，$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r$ は 1 次独立である．また，φ は単射である．
□

定理 11.7. A は複素正方行列，$\Phi_A(t)$ はその最小多項式とする．

$$f_A(t) = \det(tI_n - A) = (t - \lambda_1)^{m_1}(t - \lambda_2)^{m_2} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r}$$

($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ は相異なる) とし，$W_i = \mathrm{Ker}(\lambda_i I_n - A)$ とおく．このとき，次の (1), (2), (3) は同値である．
(1) A は対角化可能である．
(2) 方程式 $\Phi_A(t) = 0$ は重解を持たない．
(3) $\mathbb{C}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$
また，このとき，$\dim W_i = m_i$ が成り立つ．

証明. (1) $\Longrightarrow$ (2). $P^{-1}AP = \Lambda$ と対角化できたと仮定する．$f_A(t) = f_\Lambda(t)$ より，$\Lambda = \lambda_1 I_{m_1} \oplus \lambda_2 I_{m_2} \oplus \cdots \oplus \lambda_r I_{m_r}$ となるように P を選ぶことができる．すると，

$$(\lambda_1 I_n - \Lambda)(\lambda_2 I_n - \Lambda) \cdots (\lambda_r I_n - \Lambda) = O$$

である．よって，$\Phi_\Lambda(t)$ は $(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_r)$ の約数である．他方，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ は $\Phi_\Lambda(t) = 0$ の解なので，$\Phi_\Lambda(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_r)$ である．前命題より，$\Phi_A(t) = \Phi_\Lambda(t)$ なので，$\Phi_A(t) = 0$ は重解を持たない．
(2) $\Longrightarrow$ (3). $\Phi_A(t) = 0$ が重解を持たないと仮定する．$\Phi_A(t)$ は $f_A(t)$ の約数で，他方，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ は $\Phi_A(t) = 0$ の解なので，$\Phi_A(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_r)$ である．よって，

$$(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n) \cdots (A - \lambda_r I_n) = \Phi_A(A) = \Phi_A(A) = O$$

である．よって，

$$\sum_{i=1}^{r} \dim W_i = \sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{Ker}(\lambda I_n - A) \geqq \dim \mathrm{Ker}\, O = n$$

である．前命題より，和 $W_1+W_2+\cdots+W_r$ は直和であるので，$\dim(W_1+\cdots+W_r)=\dim W_1+\cdots+\dim W_r \geqq n$ である．$W_1+\cdots+W_r \subset \mathbb{C}^n$ なので，$\dim(W_1+\cdots+W_r)=n$ がわかり，$W_1\oplus\cdots\oplus W_r=\mathbb{C}^n$ となる．

(3) $\Longrightarrow$ (1). $\mathbb{C}^n=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_r$ を仮定する．すると，$W_1, W_2,\ldots, W_r$ の基底を 1 組ずつ取り，それらを並べたものを $\mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_n$ とする．これらは 1 次独立なので，n 次正方行列 $P:=(\mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_n)$ は逆行列を持つ．対応する固有値を並べてできる対角行列を Λ とおくと，命題 8.8 の証明と同様に，$AP=(A\mathbf{x}_1,\ldots, A\mathbf{x}_n)=P\Lambda$ が成り立つ．ここで，Λ の対角線上には, λ_1 が $\dim W_1$ 個，λ_2 が $\dim W_2$ 個，$\ldots, \lambda_r$ が $\dim W_r$ 個この順に並んでいる．よって，$P^{-1}AP=\Lambda$ と A は対角化可能である．

最後に，$\dim W_i=m_i$ を証明する．$\dim W_i=n_i$ とおく．直前の証明において，$\mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_n$ の中には n_i 個の W_i の元が含まれている．これらは，$A\mathbf{x}_i=\lambda_i\mathbf{x}_i$ を満たすので，対角行列 Λ の対角線の中にも n_i 個の λ_i が含まれている．よって，$f_\Lambda(t)=(t-\lambda_1)^{n_1}\cdots(t-\lambda_r)^{n_r}$ である．$f_\Lambda(t)=f_A(t)$ だから，$m_1=n_1,\ldots, m_r=n_r$ である． □

12. 巾零行列の標準型

まず，一般論を少し準備しておく．

命題 12.1. K は体，V は有限次元ベクトル空間，$W\subset V$ は部分空間とする．すると，$U\oplus W=V$ となるような V の部分空間 U が存在する．

証明. $n=\dim V$, $r=\dim W$ とする．$x_1,\ldots, x_r$ を W の基底とする．これに $n-r$ 個の元 $x_{r+1},\ldots, x_n\in V$ を付け加えて，$x_1,\ldots, x_n$ が V の基底になるようにする．$U=Kx_{r+1}+\cdots+Kx_n$ とおけば，$U\oplus W=V$ となる．

なお，この命題は V が無限次元ベクトル空間の場合でも成立するが，証明には Zorn の補題が必要になる．また，U は一意的ではない． □

「巾」(べき) という漢字は略字体であって，歴史的には「冪」と書くのが正しいが，字画が多くて書くのが面倒なので「巾」と書く人が多い．

K は体とし，$A\in M_n(K)$ とする．$A^m=O$ となるような自然数 m が存在するとき，A は**巾零**行列であるという．

例 12.2. $N_n=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&&\vdots\\0&0&0&\ddots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$ とおく．つまり，N_n は n 次の正方行列で，その (i, j)-成分 n_{ij} は，$j-i=1$ のときは $n_{ij}=1$ で，$j-i\neq 1$ のときは $n_{ij}=0$ と定める．すると，$(N_n)^{n-1}=O$ である．しかし，$1\leqq k\leqq n-2$ のときは $(N_n)^k\neq O$ である．実際，$(N_n)^k$ は $j-i=k$ を満たす (i, j)-成分がすべて 1 で，それ以外の成分はすべて 0 であるような行列である．

命題 12.3. $A\in M_n(K)$ は巾零行列，$V_i=\operatorname{Ker} A^i$ とおく．$A^m=O$ となる最小の自然数 m をとる．すると，

$$0\neq V_1 \subsetneqq V_2 \subseteq V_3 \subsetneqq\cdots\subsetneqq V_m=K^n$$

であり，$i\geqq m$ のとき $V_i=K^n$ である．特に，$m\leqq n$ である．

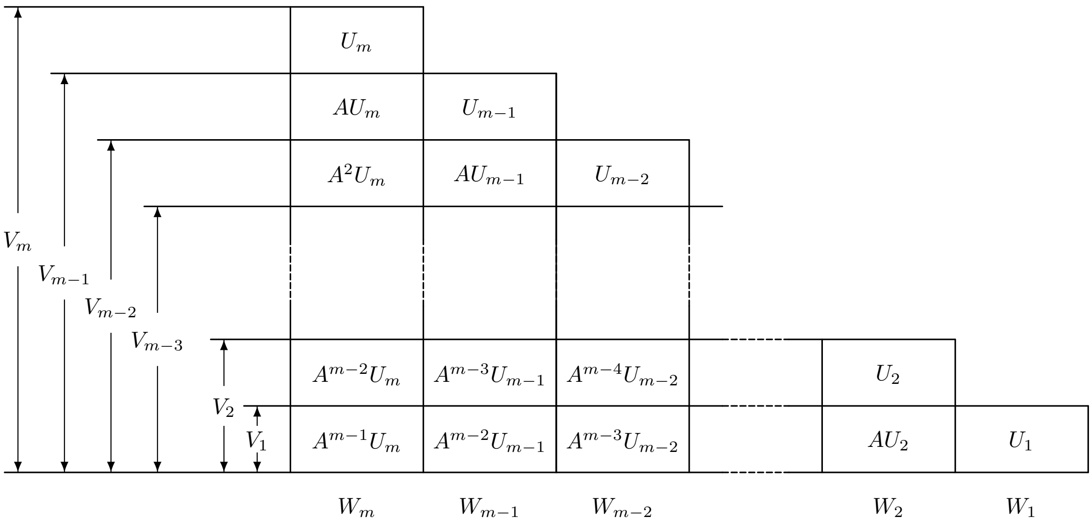
証明. $i\geqq m$ ならば，$A^i=A^mA^{i-m}=OA^{i-m}=O$ なので，$V_i=\operatorname{Ker} A^i=\operatorname{Ker} O=K^n$ である．

$1\leqq i\leqq m$ とする．形式的に，$A^0=I_n$ と考えることにし，$V_{i-1}\subsetneqq V_i$ を示す．$\mathbf{x}\in V_{i-1}$ ならば $A^{i-1}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ なので，$A\mathbf{x}=\mathbf{x}=\mathbf{0}$ であり，$\mathbf{x}\in V_i$ である．よって，$V_{i-1}\subset V_i$ である．

以下，$V_{i-1}=V_i$ と仮定して矛盾を導く．任意の $\mathbf{x}\in K^n$ を取る．$A^iA^{m-i}\mathbf{x}=A^m\mathbf{x}=\mathbf{0}$ だから，$A^{m-1}\mathbf{x}\in V_i$ である．$A^{m-1}\mathbf{x}\in V_i=V_{i-1}$ だから，$A^{m-1}\mathbf{x}=A^{i-1}A^{m-i}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ である．よって，$\mathbf{x}\in V_{m-1}$ である．つまり，$V_{m-1}=K^n$ である．これは，$A^{m-1}=O$ を意味し，m の最小性に反する．

$0<\dim V_1<\dim V_2<\cdots<\dim V_m=n$ だから，$m\leqq n$ である． □

K^n の部分空間 W に対し，$A^iW = \{A^i\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in W\}$ と書く．これは K^n の部分空間である．



定理 12.4. 前命題と同じ仮定のもと，$U_m \oplus V_{m-1} = V_m = K^n$ となるような，V_m の部分空間 U_m を取る．$1 \leqq i < m$ に対し，$A^iU_m \subset V_{m-i}$ であることに注意する．

次に，$U_{m-1} \oplus (V_{m-2} + AU_m) = V_{m-1}$ となるような V_{m-1} の部分空間 U_{m-1} を取る．$1 \leqq j < m-1$ に対し，$A^jU_{m-1} \subset V_{m-j}$ であることに注意する．

以下，帰納的に，$1 \leqq i \leqq m$ に対し，i を 1 づつ減少させながら，

$$U_i \oplus (V_{i-1} + AU_{i+1} + A^2U_{i+2} + \cdots + A^{m-i}U_m) = V_i$$

となるような V_i の部分空間 U_i を取る．ただし，$V_0 = \{\mathbf{0}\}$ とする．また，$1 \leqq i \leqq m$ に対し，

$$W_i = U_i + AU_i + A^2U_i + \cdots + A^{i-1}U_i$$

とおく．このとき，以下が成り立つ．
(1) $1 \leqq j < i$ に対し，A^j が定める線形写像 $A^j : U_i \longrightarrow A^jU_i$ は同型写像 (全単射) である．
(2) $1 \leqq i < m$ に対し，和 $V_{i-1} + AU_{i+1} + A^2U_{i+2} + \cdots + A^{m-i}U_m$ は直和である．
(3) 和 $U_i + AU_i + A^2U_i + \cdots + A^{i-1}U_i$ は直和である．
(4) $W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m = K^n$ である．
(5) $AW_i \subset W_i$ である．

証明. (1) $A^j : U_i \longrightarrow A^jU_i$ が全射であることは自明である．これが単射であることを示す．$1 \leqq j < i$, $\mathbf{x} \in U_i$, $A^j\mathbf{x} = \mathbf{0}$ とすると，$\mathbf{x} \in V_j \subset V_{i-1}$ である．U_i の定義から $U_i \cap V_{i-1} = \{\mathbf{0}\}$ なので，$\mathbf{x} = \mathbf{0}$ である．よって，$A^j : U_i \longrightarrow A^jU_i$ は単射全射である．

(2) $\varphi : (V_{i-1} \oplus AU_{i+1} \oplus A^2U_{i+2} \oplus \cdots \oplus A^{m-i}U_m) \longrightarrow (V_{i-1} + AU_{i+1} + A^2U_{i+2} + \cdots + A^{m-i}U_m)$ を，$\mathbf{x}_i \in V_{i-1}$, $\mathbf{x}_{i+1} \in AU_{i+1}$, ..., $\mathbf{x}_m \in A^{m-i}U_m$ に対し，$\varphi((\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1},..., \mathbf{x}_m)) = \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i+1} + \cdots + \mathbf{x}_m$ で定める．これは全射である．$\mathbf{x}_i + \cdots + \mathbf{x}_m = \mathbf{0}$ と仮定する．$i+1 \leqq j \leqq m$ に対し，$\mathbf{x}_j = A^{j-i}\mathbf{y}_j$ となるような $\mathbf{y}_j \in U_j$ がある．

$\mathbf{x}_i \in V_{i-1}$ だから，$A^{i-1}\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ である．よって，

$$\mathbf{0} = A^{i-1}\mathbf{0} = A^{i-1}\mathbf{x}_i + \cdots + A^{i-1}\mathbf{x}_m = \mathbf{0} + A^i\mathbf{y}_{i+1} + A^{i+1}\mathbf{y}_{i+2} + \cdots + A^{m-1}\mathbf{y}_m$$

である．$\mathbf{v}_i = \mathbf{y}_{i+1} + A\mathbf{y}_{i+2} + A^2\mathbf{y}_{i+3} + \cdots + A^{m-i-1}\mathbf{y}_m$ とすると，$A^i\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ より $\mathbf{v}_i \in \operatorname{Ker} A^i = V_i$ である．

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \mathbf{y}_{i+1} + (-\mathbf{v}_i + A\mathbf{y}_{i+2} + A^2\mathbf{y}_{i+3} + \cdots + A^{m-i-1}\mathbf{y}_m) \\ &\in U_{i+1} \oplus (V_i + AU_{i+2} + A^2U_{i+3} + \cdots + A^{m-i-1}U_m)\end{aligned}$$

だから，直和の定義より $\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{0}$, $(-\mathbf{v}_i + A\mathbf{y}_{i+2} + A^2\mathbf{y}_{i+3} + \cdots + A^{m-i-1}\mathbf{y}_m) = \mathbf{0}$ である．この両辺に左から A^i を書けると $A^i\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ より，$A^{i+1}\mathbf{y}_{i+2} + A^{i+2}\mathbf{y}_{i+3} + \cdots + A^{m-1}\mathbf{y}_m = \mathbf{0}$ となる．

$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{y}_{i+2} + A\mathbf{y}_{i+3} + \cdots + A^{m-i-2}\mathbf{y}_m$ とおくと，$\mathbf{v}_{i+1} \in V_{i+1}$ である．

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \mathbf{y}_{i+2} + (-\mathbf{v}_{i+1} + A\mathbf{y}_{i+3} + A^2\mathbf{y}_{i+4} + \cdots + A^{m-i-2}\mathbf{y}_m) \\ &\in U_{i+2} \oplus (V_{i+1} + AU_{i+2} + A^2U_{i+3} + \cdots + A^{m-i-2}U_m)\end{aligned}$$

だから，直和の定義より $\mathbf{y}_{i+2} = \mathbf{0}$, $(-\mathbf{v}_{i+1} + A\mathbf{y}_{i+3} + \cdots + A^{m-i-2}\mathbf{y}_m) = \mathbf{0}$ である．以下，同様な議論を繰り返すと，これを繰り返すと，$\mathbf{y}_{i+3} = \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{y}_m = \mathbf{0}$ が得られる．したがって，$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_{i+2} = \cdots = \mathbf{x}_m = \mathbf{0}$ である．$\mathbf{x}_i + \cdots + \mathbf{x}_m = \mathbf{0}$ より，$\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ である．よって，φ は単射である．

(3) $\psi : (U_i \oplus AU_i \oplus \cdots \oplus A^{i-1}U_i) \longrightarrow (U_i + AU_i + A^2U_i + \cdots + A^{i-1}U_i)$ を，$\psi((\mathbf{x_0}, A\mathbf{x_1}, A^2\mathbf{x}_2, \ldots, A^{i-1}\mathbf{x}_{i-1})) = \mathbf{x_0} + A\mathbf{x_1} + A^2\mathbf{x}_2 + \cdots + A^{i-1}\mathbf{x}_{i-1}$ で定める．ここで，$\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x}_{i-1} \in U_i$ である．

$$\mathbf{0} = A^{i-1}(\mathbf{x_0} + A\mathbf{x_1} + A^2\mathbf{x}_2 + \cdots + A^{i-1}\mathbf{x}_{i-1}) = A^{i-1}\mathbf{x}_0$$

であるが，U_i の定義から，$\mathbf{0} \neq \mathbf{x}_0 \in U_i$ ならば $A^{i-1}\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ なので，$\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ がわかる．

$$\mathbf{0} = A^{i-2}(\mathbf{x_0} + A\mathbf{x_1} + A^2\mathbf{x}_2 + \cdots + A^{i-1}\mathbf{x}_{i-1}) = A^{i-1}\mathbf{x}_1$$

であるから，上と同様に $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ となる．以下同様に，$\mathbf{x}_2 = \cdots = \mathbf{x}_{i-1} = \mathbf{0}$ が得られる．よって，ψ は単射である．

(4) (2) より，$V_i = V_{i-1} \oplus \left(\bigoplus_{j=i}^{m} A^{j-i}U_j\right)$ である．よって，

$$K^n = \bigoplus_{i=1}^{m}\left(\bigoplus_{j=i}^{m} A^{j-i}U_j\right) = \bigoplus_{j=1}^{m}\left(\bigoplus_{k=0}^{j-1} A^k U_j\right) = \bigoplus_{j=1}^{m} W_j$$

である．

(5) $A(A^kU_j) \subset W_j$ だから $AW_j \subset W_j$ である． □

定理 12.5. $A \in M_n(K)$ は巾零行列であるとする．すると，P^{-1} を持つような $P \in M_n(K)$ をうまく選んで，

$$P^{-1}AP = N_{m_1} \oplus N_{m_2} \oplus \cdots \oplus N_{m_r}$$

という形に変形できる．だたし，$N_1 = (0)$ (1 次のゼロ行列) である．

証明. m, V_i, U_i, W_i は前定理までと同じとする．

もし，$m = 1$ ならば $A = O$ だから，$r = n$, $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 1$ とすればよい．特に，$n = 1$ の場合，定理は成立する．

$n \geqq 2$ と仮定し，$n-1$ までは定理は正しいと仮定する．上の考察から，$m \geqq 2$ の場合を考えればよい．

$K^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$ で，$W_m \neq 0$ である．$U = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_{m-1}$ とおくと，$K^n = U \oplus W_m$ で，$AU \subset U$, $AW_m \subset W_m$ である．

まず，$U \neq 0$ の場合を考える．このとき，$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ を W_m の基底，$\mathbf{x}_{r+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$ を U の基底とし，$Q = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ とおくと，定理 6.10 から $Q^{-1}AQ = B_1 \oplus B_2$ (B_1, B_2 は r 次, $(n-r)$ 次の正方行列) と書ける．$A^m = O$ より，$B_1^m = O$, $B_2^m = O$ である．帰納法の仮定から，ある可逆行列 $Q_1 \in M_{rr}(K)$, $Q_2 \in M_{n-r,n-r}(K)$ により，$Q_1^{-1}B_1Q_1$, $Q_2^{-1}B_2Q_2$ は N_{m_i} という形の行列の直和に書ける．$P = Q(Q_1 \oplus Q_2)$ とおけば，$P^{-1}AP$ は N_{m_i} という形に行列の直和になる．

次に，$U = 0$ の場合を考える．つまり，$W_m = K^n$ である．U_m の基底を $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ とする．$W_m = U_m \oplus AU_m \oplus A^2U_i \oplus \cdots \oplus A^{m-1}U_m$ なので，

$$\begin{aligned}&A^{m-1}\mathbf{x}_1, A^{m-2}\mathbf{x}_1, A^{m-2}\mathbf{x}_1, \ldots, , A\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1, \quad A^{m-1}\mathbf{x}_2, A^{m-2}\mathbf{x}_2, \ldots, A\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2, \\ &\quad \ldots, \quad A^{m-1}\mathbf{x}_r, A^{m-2}\mathbf{x}_r, \ldots, A\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_r\end{aligned}$$

は $W_m = K^n$ の基底である．上の基底をこの順番に並べて得られる正方行列を P とする．また，$B = N_m \oplus N_m \oplus \cdots \oplus N_m$ (r 個の直和) とする．$n = \dim W_m = rm$ であることに注意する．直接計算してみると，$AP = PB$ がすぐ確認できる．よって，$P^{-1}AP = B$ であり，定理が証明された． □

13. 広義固有空間と Jordan 標準型

定義 13.1. A は n 次複素正方行列とし，その固有多項式を

$$f_A(t)=\det(tI_n-A)=(t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\cdots(t-\lambda_r)^{m_r}$$

($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ は相異なる) とする．固有値 λ_i に対し，

$$\widetilde{W_{\lambda_i}}=\mathrm{Ker}(A-\lambda_i I)^{m_i}$$

を λ_i に関する A の**広義固有空間**という．

$f_i(t)=\dfrac{f_A(t)}{(t-\lambda_i)^{m_i}}$ とおく．$g_1(t)f_1(t)+\cdots+g_r(t)f_r(t)=1$ を満たす複素数係数多項式 $g_1(t), \ldots, g_r(t)$ が存在する．$P_i=g_i(A)f_i(A)$ とおくと命題 11.5 の (1) 〜 (5) が成立する．

定理 13.2. 上の定義と同じ記号を用いる．記号の簡略化のため $\widetilde{W_i}=\widetilde{W_{\lambda_i}}$ とおく．このとき，以下が成り立つ．

(1) $W_i\subset\widetilde{W_i}$
(2) $\mathrm{Im}\,P_i=\widetilde{W_i}$
(3) $\widetilde{W_1}\oplus\widetilde{W_2}\oplus\cdots\oplus\widetilde{W_r}=\mathbb{C}^n$
(4) $\mathbf{x}\in\widetilde{W_i}$ ならば $A\mathbf{x}\in\widetilde{W_i}$ である．
(5) $\dim_{\mathbb{C}}\widetilde{W_i}=m_i$
(6) $\dim_{\mathbb{C}}W_i\leqq m_i$

証明. (1) $\mathbf{x}\in W_i$ ならば，$(A-\lambda_i)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ である．すると，$(A-\lambda_i)^{m_i}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ であるので，$\mathbf{x}\in\widetilde{W_i}$ となる．よって，$W_i\subset\widetilde{W_i}$ である．

(2) $V_i:=\mathrm{Im}\,P_i$ とおく．勝手な $\mathbf{x}\in V_i=\mathrm{Im}\,P_i$ をとる．ある $\mathbf{y}\in\mathbb{C}^n$ により $\mathbf{x}=P_i\mathbf{y}$ と書ける．$(t-\lambda_i)^{m_i}f_i(t)=f_A(t)$ なので，$(A-\lambda_iI_n)^{m_i}f_i(A)=O$ であり，$(A-\lambda I_n)^{m_i}P_i\mathbf{y}=(A-\lambda_iI_n)^{m_i}f_i(A)g_i(A)\mathbf{y}=\mathbf{0}$ となる．よって，$\mathbf{x}\in\mathrm{Ker}(A-\lambda_iI_n)^{m_i}=\widetilde{W_i}$ であり，$V_i\subset\widetilde{W_i}$ がわかる．
次に，$V_i\supset\widetilde{W_i}$ を示す．勝手な $\mathbf{x}\in\widetilde{W_i}$ をとる．
$i\neq j$ のとき，$f_j(t)$ は $(t-\lambda_i)^{m_i}$ の倍数で，$(A-\lambda_i)^{m_i}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ なので，$f_j(A)\mathbf{x}_i=\mathbf{0}$ である．$P_j=g_j(A)f_j(A)$ なので，$P_j\mathbf{x}=\mathbf{0}$ である．すると $\mathbf{x}=I_n\mathbf{x}=(P_1+\cdots+P_r)\mathbf{x}=P_1\mathbf{x}+\cdots+P_i\mathbf{x}+\cdots+P_r\mathbf{x}=P_i\mathbf{x}\in\mathrm{Im}\,P_i=V_i$ となり，$V_i\supset\widetilde{W_i}$ がわかる．

(3) まず，$V_1+\cdots+V_r=\mathbb{C}^n$ を証明する．$\subset$ は自明なので，$\supset$ を示せばよい．
勝手な $\mathbf{x}\in\mathbb{C}^n$ をとる．$I_n=P_1+\cdots+P_r$ より，$\mathbf{x}_i=P_i\mathbf{x}$ とおくと，$\mathbf{x}_i\in\mathrm{Im}\,P_i=V_i$ で，$\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\cdots+\mathbf{x}_r\in V_1+\cdots+V_r$ である．よって，$\mathbb{C}^n\subset V_1+\cdots+V_r$ である．
次に，自然な全射 $\varphi:(V_1\oplus\cdots\oplus V_r)\longrightarrow(V_1+\cdots+V_r)$ が単射であることを証明する．$\mathbf{x}_i\in V_i$, $\varphi((\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_r))=\mathbf{x}_1+\cdots+\mathbf{x}_r=\mathbf{0}$ と仮定する．$\mathbf{x}_i\in V_i$ より，ある $\mathbf{y}_i\in\mathbb{C}^n$ により $\mathbf{x}_i=P_i\mathbf{y}_i$ と書ける．$\mathbf{0}=\mathbf{x}_1+\cdots+\mathbf{x}_r=P_1\mathbf{y}_1+\cdots+P_r\mathbf{y}_r$ の両辺に，左から P_1 を書けると，$2\leqq i\leqq r$ のとき $P_1P_i=O$ であることを用いて，$\mathbf{0}=P_1(P_1\mathbf{y}_1+\cdots+P_r\mathbf{y}_r)=P_1^2\mathbf{y}_1$ が得られる．ところで，$P_1^2=P_1$ であったから，$\mathbf{x}_1=P_1\mathbf{y}_1=P_1^2\mathbf{y}_1=\mathbf{0}$ となる．同様に，$\mathbf{x}_2=\cdots=\mathbf{x}_r=\mathbf{0}$ である．これより，$\mathrm{Ker}\,\varphi=0$ がわかり，φ が単射であることがわかる．よって，和 $V_1+\cdots+V_r$ は直和であって，$V_1\oplus\cdots\oplus V_r=\mathbb{C}^n$ である．(2) を使うと (3) が得られる．

(4) $\mathbf{x}\in\widetilde{W_i}$ とする．(2) より，ある $\mathbf{y}\in\mathbb{C}^n$ により，$\mathbf{x}=A_i\mathbf{y}=g_i(A)f_i(A)\mathbf{y}$ と書ける．命題 8.5 より $Ag_i(A)f_i(A)=g_i(A)f_i(A)A$ なので，$A\mathbf{x}=Ag_i(A)f_i(A)\mathbf{y}=g_i(A)f_i(A)(A\mathbf{y})=A_1(A\mathbf{y})\in\mathrm{Im}\,A=V_i=\widetilde{W_i}$ である．

(5) $n_i=\dim\widetilde{W_i}$ とおく．(3) より，$n_1+\cdots+n_r=n$ である．
$\widetilde{W_1},\ldots,\widetilde{W_r}$ の基底を順に並べて n 次正方行列 $P=(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n)$ を作る．(3) より，これは $\mathbb{C}^n$ の基底であるから，P^{-1} が存在する．$B=P^{-1}AP$ とおく．A が定める線形写像を $f\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ とする．A は標準基底 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ に関する f の表現行列である．定理 10.1 より，B は基底 $\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n$ に関する f の表現行列であり，P は基底 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ から基底 $\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n$ への基底変換行列である．
$\mathbf{x}\in\widetilde{W_i}$ ならば，$f(\mathbf{x})=A\mathbf{x}\in\widetilde{W_i}$ であるので，定理 6.10 により，$B=B_1\oplus B_2\oplus\cdots\oplus B_r$ という形に書ける．ここで，$n_i=\widetilde{W_i}$ とおくとき，B_i は n_i 次の正方行列である．行列式の性質から，$f_A(t)=f_B(t)=$

$f_{B_1}(t)f_{B_2}(t)\cdots f_{B_r}(t)$ である．ところで，$\widetilde{W_i}=\mathrm{Ker}(A-\lambda_i I_n)^{m_i}$ であるから，$(B_i-\lambda_i I_{n_i})^{m_i}=O$ であり，B_i の最小多項式は $(t-\lambda_i)^{m_i}$ の約数である．特に，$f_{B_i}(t)=0$ の解は λ_i 以外に存在しない．よって，$f_{b_i}(t)=(t-\lambda_i)^{n_i}$ である．

$(t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\cdots(t-\lambda_r)^{m_r}=f_A(t)=f_{B_1}(t)f_{B_2}(t)\cdots f_{B_r}(t)=(t-\lambda_1)^{n_1}(t-\lambda_2)^{n_2}\cdots(t-\lambda_r)^{n_r}$

であるから，$n_i=m_i$ を得る．

(6) は (1), (5) からわかる． □

命題 13.3.(射影子の一意性) 複素正方行列 $A\in M_n(\mathbb{C})$ の相異なる固有値全体を $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$ とし，前定理と同様に $\widetilde{W_i}=\widetilde{W_{\lambda_i}}$ とおく．また，n 次正方複素行列 $P_1,P_2,\ldots,P_r$ は前定理と同じとする．さらに，n 次正方複素行列 $Q_1,Q_2,\ldots,Q_r$ は次の (1),(2) を満たすとする．

(1) $Q_1+Q_2+\cdots+Q_r=I_n$

(2) $\mathbf{x}\in\mathbb{C}^n$ に対し $Q_i\mathbf{x}\in\widetilde{W_i}$ $(i=1,\ldots,r)$.

すると，$P_1=Q_1,\ldots,P_r=Q_r$ となる．

証明. $P_1+P_2+\cdots+P_r=I_n$ で，任意の $\mathbf{x}\in\mathbb{C}^n$ に対し $P_i\mathbf{x}\in\widetilde{W_i}$ であった．

任意の $\mathbf{x}\in\mathbb{C}^n$ を取る．$\mathbf{x}_i=(P_i-Q_i)\mathbf{x}\in\widetilde{W_i}$ とおく．(1) より $\mathbf{x}_1+\cdots+\mathbf{x}_r=\mathbf{0}$ である．$\mathbf{x}_1=-(\mathbf{x}_2+\cdots+\mathbf{x}_r)\in\widetilde{W_1}\cap(\widetilde{W_2}+\cdots+\widetilde{W_r})$ であるが，前定理 (3) より，$\widetilde{W_1},\widetilde{W_2},\ldots,\widetilde{W_r}$ のゼロでないベクトルは一次独立だから，$\mathbf{x}_1=\mathbf{0}$ である．同様に，$\mathbf{x}_2=\cdots=\mathbf{x}_r=\mathbf{0}$ も得られる．任意の $\mathbf{x}\in\mathbb{C}^n$ に対して $P_i\mathbf{x}=Q_i\mathbf{x}$ だから，$P_i=Q_i$ である ($\mathbf{x}$ が基本ベクトルの場合を考えてみよ). □

A が正規行列の場合には，定理 10.1 のように P_i を構成すると，$P_i=g_i(A)f_i(A)$ が成り立つことが，上の命題から保証される．

定義 13.4. $K=\mathbb{C}$ として考える．N_n は例 12.2 の巾零行列，$\lambda\in\mathbb{C}$ とする．$J_n(\lambda)=\lambda I_n+N_n$ という形の n 次複素正方行列を n 次の **Jordan ブロック**とか **Jordan 細胞**という．ここで，$n=1$ の場合は，$J_1(\lambda)=\lambda I_1=(\lambda)$ である．

定理 13.5. $A\in M_n(\mathbb{C})$ とする．すると，P^{-1} を持つような n 次複素正方行列 P をうまく選んで，$P^{-1}AP$ が何個かの Jordan ブロックの直和になるようにすることができる．このとき，$P^{-1}AP$ を A の **Jordan 標準形**という．

証明. 定理 13.2 のように，$\mathbb{C}^n=\widetilde{W_1}\oplus\widetilde{W_2}\oplus\cdots\oplus\widetilde{W_r}$ と広義固有空間の直和に分解する．$\widetilde{W_1},\widetilde{W_2},\ldots,\widetilde{W_r}$ の基底をこの順に並べてできる n 次正方行列を P_1 とする．定理 6.10 より，$P_1^{-1}AP_1=B_1\oplus B_2\oplus\cdots\oplus B_r$ と書ける．$n_i=\dim\widetilde{W_i}$ とおくとき，B_i は n_i 次正方行列で，$f_{B_i}(t)=\det(iI_{n_i}-B_i)=(t-\lambda_i)^{n_i}$ である．ケーリー・ハミルトンの定理により，$(B_i-\lambda_i I_{n_i})^{n_i}=O$ だから，$B_i-\lambda_i I_{n_i}$ は巾零行列である．定理 12.5 より，ある n_i 次可逆行列 Q_i により，$Q_i^{-1}(B_i-\lambda_i I_{n_i})Q_i=N_{k_1}\oplus\cdots\oplus N_{k_s}$ とできる．すると，

$$Q_i^{-1}B_iQ_i=J_{k_1}(\lambda_i)\oplus\cdots\oplus J_{k_s}(\lambda_i)$$

と Jordan ブロックの直和になる．そこで，$Q=Q_1\oplus\cdots\oplus Q_r$, $P=P_1Q$ とおけば，$P^{-1}AP$ は Jordan ブロックの直和になる． □

与えられた行列の Jorran 標準形を計算するアルゴリズムは，何通りかの方法が提唱されている．ただ，サイズの小さい行列 ($n=3,4$) くらいだと，目の子で考えたほうが速いし，サイズが大きい行列の場合は，パソコンで適当なソフトを使って計算せざるをえない．あまり，面白い計算ではないので，演習問題には収録しなかった．(そもそも，Jordan 標準形は標準シラバスの範囲外なので.)

14. 双対空間

定理&定義 14.1. K は体，V を K-ベクトル空間とする．V から K への線形写像全体の集合を $\mathrm{Hom}_K(V,K)$ とか $V^\vee$ と書き，V の**双対空間** (そうついくうかん) という．$v\in V$ に対して，$f_v\in(V^\vee)^\vee$ を以下のように定める．

$(*)$ $g \in V^\vee = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ に対し，$f_v(g) = g(v) \in K$ と定める． $\varphi: V \to (V^\vee)^\vee$ を $\varphi(v) = f_v$ によって定義する．

このとき，以下が成り立つ．

(1) $\varphi: V \to (V^\vee)^\vee$ は単射線形写像である．

(2) V が有限次元ならば φ は同型写像で，$\dim_K V^\vee = \dim_K V$ が成り立つ．このとき $\varphi: V \to (V^\vee)^\vee$ は V の基底の選び方に依存しない標準的な全単射で，これを通して $V = (V^\vee)^\vee$ とみなせる． □

証明. (1) $v, w \in V$; $a, b \in K$; $g \in V^\vee$ に対し，$f_{av+bw}(g) = g(av + bw) = ag(v) + bg(w) = af_v(g) + bf_w(g)$ なので，φ は線形写像である．もし，$\varphi(v) = 0$ ならば，任意の $f \in V^\vee$ に対して $f(v) = 0$ なので $v = 0$ である．よって，φ は単射である．

(2) $n = \dim_K V$ とし，V の基底を $v_1, \ldots, v_n$ とする．線形写像 $f_i: V \to K$ を，$f_i(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = a_i$ $(a_1, \ldots, a_n \in K)$ によって定義する．$f_i \in V^\vee$ である．

以下，$V^\vee$ は $f_1, \ldots, f_n$ を基底とする K-ベクトル空間であることを証明する．

勝手な $f \in V^\vee$ を取る．$b_j = f(v_j) \in K$ とおく．また，$g = b_1f_1 + \cdots + b_nf_n \in V^\vee$ とする．すると，任意の $v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n \in V$ $(c_1, \ldots, c_n \in K)$ に対して，

$$g(v) = \sum_{i=1}^{n} b_i f_i(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = \sum_{i=1}^{n} b_i c_i = \sum_{i=1}^{n} c_i f(v_i) = f(v)$$

となり，$g = f \in V^\vee$ となる．よって，$f_1, \ldots, f_n$ は $V^\vee$ の生成系である．

$f_1, \ldots, f_n$ が 1 次独立であることを示す．$a_1f_1 + \cdots + a_nf_n = 0$ $(a_1, \ldots, a_n \in K)$ とする．$0 = (a_1f_1 + \cdots + a_nf_n)(v_i) = a_i$ なので，$a_1 = \cdots = a_n = 0$ であり，$f_1, \ldots, f_n$ は 1 次独立である．よって，$f_1, \ldots, f_n$ は $V^\vee$ の基底である．

$\dim_K V = \dim_K V^\vee = \dim_K (V^\vee)^\vee$ なので，φ は全単射である． □

定義 14.2. 上の定理の証明のように，V の基底 $v_1, \ldots, v_n$ に対し，$f_i(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = a_i$ $(a_1, \ldots, a_n \in K)$ によって定まる線形写像を $f_i: V \to K$ とするとき，$V^\vee$ の基底 $f_1, \ldots, f_n$ を $v_1, \ldots, v_n$ の**双対基底**という．

定理&定義 14.3. K は体，V と W は有限次元 K-ベクトル空間とし，$v_1, \ldots, v_n$ は V の基底 $(n = \dim_K V)$, $w_1, \ldots, w_m$ は W の基底 $(m = \dim_K W)$ とする．また，$f_1, \ldots, f_n \in V^\vee$ は $v_1, \ldots, v_n$ の双対基底，$g_1, \ldots, g_m \in W^\vee$ は $w_1, \ldots, w_m$ の双対基底とする．

(1) $\varphi: V \to W$ は線形写像とし，V の基底 $v_1, \ldots, v_n$ と W の基底 $w_1, \ldots, w_m$ に関する φ の表現行列を $A \in M_{mn}(K)$ とする．$g \in W^\vee$ に対して，$\varphi^\vee(g) = g \circ \varphi \in V^\vee$ によって定まる写像を $\varphi^\vee : W^\vee \longrightarrow V^\vee$ とする．すると，$\varphi^\vee$ は線形写像である．

(2) $W^\vee$ の基底 $g_1, \ldots, g_m$ と $V^\vee$ の基底 $f_1, \ldots, f_n$ についての線形写像 $\varphi^\vee$ の表現行列を B とするとき，B は A の転置行列である．つまり，$B = {}^tA$, $A = {}^tB$.

(3) $\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, B$ が成り立つ．つまり，$\mathrm{rank}\, {}^tA = \mathrm{rank}\, A$.

証明. (1) $a, b \in K$, $g, h \in W^\vee$ に対して，$\varphi^\vee(ag + bh) = (ag + bh) \circ \varphi = a(g \circ \varphi) + b(h \circ \varphi) = a\varphi^\vee(g) + b\varphi^\vee(h)$ なので，$\varphi^\vee$ は線形写像である．

(2) A の (i, j)-成分を a_{ij}, B の (j, i)-成分を b_{ji} とする．$\varphi(v_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{ij} w_j$, $\varphi^\vee(g_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_{ji} f_i$ である．

$k = i$ のとき $f_i(v_k) = 1$, $k \neq i$ のとき $f_i(v_k) = 0$ なので，

$$(\varphi^\vee(g_j))(v_k) = \sum_{i=1}^{n} b_{ji} f_i(v_k) = b_{jk}$$

となる．他方，$l = j$ のとき $g_j(w_l) = 1$, $l \neq j$ のとき $g_j(w_l) = 0$ なので，

$$(\varphi^\vee(g_j))(v_k) = (g_j \circ \varphi)(v_k) = g_j\left(\sum_{l=1}^{m} a_{kl} w_l\right) = \sum_{l=1}^{m} a_{kl} g_j(w_l) = a_{kj}$$

である．よって，$a_{kj} = b_{jk}$ で $B = {}^tA$ である．

(3) $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} \varphi$, $\operatorname{rank} B = \dim \operatorname{Im} \varphi^\vee$ なので，$\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim \operatorname{Im} \varphi^\vee$ を証明すればよい．$\operatorname{Im} \varphi$ や $\operatorname{Im} \varphi^\vee$ は V や W の基底の選び方に依存しないで定義されているので，V や W の基底を取り替えて証明してもよい (そのとき，A や B は別の行列になる).

$r := \dim \operatorname{Im} \varphi$ とおく．$\dim \operatorname{Ker} \varphi = n - r$ であったから，$v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n$ は $\operatorname{Ker} \varphi \subset V$ の基底になるように始から選んでおく．このとき，$\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_r)$ が $\operatorname{Im} \varphi$ の基底になる．$v_1, \ldots, v_r$ で生成される V の部分ベクトル空間を U とすれば，$V = U \oplus \operatorname{Ker} \varphi$ である．$f_1, \ldots, f_r$ は $U^\vee$ の基底，$f_{r+1}, \ldots, f_n$ は $(\operatorname{Ker} \varphi)^\vee$ の基底であるので，$V^\vee = U^\vee \oplus (\operatorname{Ker} \varphi)^\vee$ である．$v \in \operatorname{Ker} \varphi$ のとき，任意の $g \in W^\vee$ に対し $(\varphi^\vee(g))(v) = g(\varphi(v)) = g(0) = 0$ であるので，$\varphi^\vee(g) \in U^\vee$ とみなすことができる．よって，$\operatorname{Im} \varphi^\vee \subset U^\vee$ で，$\dim_K \operatorname{Im} \varphi^\vee \leqq \dim_K U^\vee = r = \dim_K \operatorname{Im} \varphi$ である．

(2) より $(\varphi^\vee)^\vee = \varphi$ であるので，$\dim_K \operatorname{Im} \varphi = \dim_K \operatorname{Im} (\varphi^\vee)^\vee \leqq \dim_K \operatorname{Im} \varphi^\vee$ が成り立ち，$\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim \operatorname{Im} \varphi^\vee$ を得る． □

定義 14.4. K は体 $A \in M_{mn}(K)$ とし，A の (i, j)-成分を a_{ij} とする．自然数 r が $r \leqq m, r \leqq n$ を満たすとき，$1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqq m$ を満たす r 個の整数の組 $(i_1, \ldots, i_r)$ 全体の集合を $\mathfrak{I}_r$ とおく．また，$1 \leqq j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leqq n$ を満たす r 個の整数の組 $(j_1, \ldots, j_r)$ 全体の集合を $\mathfrak{J}_r$ とおく．今，$I = (i_1, \ldots, i_r) \in \mathfrak{I}_r$ と，$J = (j_1, \ldots, j_r) \in \mathfrak{J}_r$ に対し，a_{i_k, j_l} を (k, l) 成分とするような r 次正方行列を A_{IJ} と書くことにする．このような A_{IJ} を A の r **次の小行列**と呼ぶ．$\mathfrak{I}_r$ は $\dfrac{m!}{(m-r)!r!}$ 個の元からなる集合で，$\mathfrak{J}_r$ は $\dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ 個の元からなる集合なので，A の r 次の小行列は $\dfrac{m!}{(m-r)!r!} \cdot \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ 個ある．A の r 次の小行列 A_{IJ} の行列式 $\det A_{IJ}$ を A の r **次の小行列式**と呼ぶ.

定理 14.5. 上の定義の記号のもと，$\operatorname{rank} A = r$ であるための必要十分条件は，A のある r 次の小行列 A_{IJ} で $\det A_{IJ} \neq 0$ を満たすものがあり，かつ A の $r+1$ 次のすべての小行列式は 0 になることである.

証明. (1) $\operatorname{rank} A = r$ ならば A のある r 次の小行列 A_{IJ} で $\det A_{IJ} \neq 0$ を満たすものがあることを証明する.

A の j 列目の列ベクトルを $\mathbf{a}_j$ とする．$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} A$ なので，A の中から適当に r 個の列ベクトル $\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_r}$ を選ぶと，それが $\operatorname{Im} A$ の基底になる．$J = (j_1, \ldots, j_r)$ とおく．$\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_r}$ を並べた m 行 r 列の行列を A' とする．$\operatorname{rank} A = r = \operatorname{rank} A' = \operatorname{rank} {}^t A'$ である．$\operatorname{rank} {}^t A' = r$ なので，A' の中から r 個の 1 次独立な列ベクトルを選ぶことができる．その列の番号を $I = (i_1, \ldots, a_r)$ とする．すると，$\operatorname{rank} {}^t A_{IJ} = r$ であるので，$\operatorname{rank} A_{IJ} = r$ で，$\det A_{IJ} = r$ である.

(2) 逆に，ある $(r+1)$ 次の小行列式が $\det A_{IJ} \neq 0$ を満たせば，$\operatorname{rank} A \geqq r+1$ であることを示す.

$J = (j_1, \ldots, j_{r+1})$ とおくと，$\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_{r+1}}$ は 1 次独立であることを示せばよい．$A' := (\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_{r+1}}) \in M_{m, r+1}(K)$ とおく．$\det {}^t A_{IJ} = \det A_{IJ} \neq 0$ だから，A' の $i_1, \ldots, i_{r+1}$ 行目の行ベクトルは 1 次独立である．よって，$\operatorname{rank} A' = \operatorname{rank} {}^t A' = r+1$ である．したがって，$\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_{r+1}}$ は 1 次独立である． □

15. テンソル

テンソルという言葉は，数学と物理学で，微妙に異なるニュアンスで用いられる．ここでは，それを含めて説明する．物理でも，力学で登場する応力テンソルと，一般相対性理論でのテンソルは，多少雰囲気が違う．数学では「定義→定理→証明」, 物理では「実例→一般化→法則・概念」の流れが普通で，発想が多少異なるが，まずは実例抜きでテンソルの数学的定義を述べる.

数学では，一般的に環 R 上の 2 つの加群 M, N に対して，テンソル積 $M \otimes_R N$ を定義して，そこから議論を始める．ただ，物理ではそこまで一般的なテンソルの概念は必要ないので，体 K 上のベクトル空間のテンソル積に限って説明する．それも，無限次元ベクトル空間だと非常に難しくなるので，有限次元ベクトル空間の場合のみを扱う．本来のテンソル積の定義は抽象的であるが，有限次元ベクトル空間の場合は，結果的に次の定義と同値になる.

定義 15.1. K は体，V は基底 $v_1, v_2, \ldots, v_m$ を持つ m 次元ベクトル空間，W は基底 $w_1, w_2, \ldots, w_n$ を持つ n 次元ベクトル空間とする．形式的に $v_i \otimes w_j$ $(1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n)$ という記号で書かれる

mn 個の元を考え，この mn 個の元を基底とする mn 次元ベクトル空間を

$$V \otimes_K W = \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n} K \cdot (v_i \otimes w_j)$$

と書くことにする．$V \otimes_K W$ を V と W の (K 上の) **テンソル積**という．次に，$v = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i v_i \in V$ と $w = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j w_j \in W$ に対し，

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i v_i\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{n} b_i w_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j (v_i \otimes w_j)$$

によって．$v \otimes w$ という演算を定義する．

U, V, W が有限次元 K-ベクトル空間の場合，$(U \otimes_K V) \otimes_K W$ と $(U \otimes_K (V \otimes_K W)$ は同型で，これを $U \otimes_K V \otimes_K W$ と書く．

$$\dim_K (U \otimes_K V \otimes_K W) = (\dim_K U) \times (\dim_K v) \times (\dim_K W)$$

である．4 個以上のベクトル空間のテンソル積についても同様である．

物理では，$V = W \ (= U = \cdots) = \mathbb{R}^3$ (または $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{C}^3$, $\mathbb{C}^4$) の場合がほとんどである．$\underbrace{V \otimes_K \cdots \otimes_K V}_{r\ \text{個}}$ を $V^{\otimes r}$ とも書く．$\dim_V = m$ のとき $\dim_K V^{\otimes r} = m^r$ である．$V^{\otimes r}$ の元を r 階の**テンソル**と呼ぶ．

$v_1,\ldots, v_m$ を V の基底とするとき，$V^{\otimes r}$ の元 x は，

$$x = \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{m} \cdots \sum_{i_r=1}^{m} a_{i_1 i_2 \cdots i_r} v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_r}$$

$(a_{i_1 i_2 \cdots i_r} \in K)$ と書ける．物理では，この x を単に $a_{i_1 i_2 \cdots i_r}$ と書いてしまう．慣れないと $a_{i_1 i_2 \cdots i_r}$ が係数 (スカラー) を表すのかテンソル (m^r 個のスカラーの組) を指すのかまぎらわしいが，慣れれば文脈で読み取れるようになる．

さて，上の形のテンソル x について，任意の全単射 (置換) $\sigma : \{1, 2, \ldots, r\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して，

$$a_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \cdots i_{\sigma(r)}} = a_{i_1 i_2 \cdots i_r}$$

が成り立つとき，x は**対称テンソル**であるという．また，$\mathrm{sign}(\sigma)$ を置換の符号として，

$$a_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \cdots i_{\sigma(r)}} = \mathrm{sign}(\sigma) a_{i_1 i_2 \cdots i_r}$$

が成り立つとき，x は**交代テンソル**であるという．

V の基底を可逆行列 P で基底変換して取り替えると，上のテンソル x の成分表示 $a_{i_1 \cdots i_r}$ も，それに応じて変わるが，それは，上の $\otimes$ の計算規則によって普通に計算できる．

定義 15.2. V を n 次元 K-ベクトル空間とし，$\mathbf{e}_1,\ldots, \mathbf{e}_n$ をその基底とする．V の元 $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a^i \mathbf{e}_i$ を $\begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$ のように添え字を上に付けた列ベクトルで表わし，これを**反変ベクトル**，または **1 階** n **次元反変テンソル**という．

$e^1,\ldots, e^n$ を双対空間 $V^\vee = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ の双対基底とする．$V^\vee$ の元 $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i \mathbf{e}^i$ を $(b_1,\ldots, b_n)$ のように添え字を下につけた行ベクトルで表し，これを**共変ベクトル**，または **1 階** n **次元共変テンソル**と約束する．

このように表すと，$f(v) = fv$ と行列の積 (行ベクトルと列ベクトルの積) で表すことができて便利である．

$$x = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_1=1}^{n} a^{i_1 i_2 \cdots i_q}_{j_1 j_2 \cdots j_p} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_q} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_p} \in V^{\otimes q} \otimes_K (V^\vee)^{\otimes p}$$

を p **階共変** q **階反変テンソル**という．上のテンソル x を単に $a^{i_1 i_2 \cdots i_q}_{j_1 j_2 \cdots j_p}$ で表す．

特に，1 階共変 1 階 n 次元反変テンソルは，

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix}$$

のように n 次正方行列で表すことができる．数学的には，$V \otimes_K V^\vee = \mathrm{Hom}_K(V, V)$ の元が 1 階共変 1 階反変 n 次元テンソルである．これは 2 階のテンソルの一種である．

力学や工学で単に「テンソル」という場合には，1 階共変 1 階反変 3 次元テンソルを指すことが多い (応力テンソルなど)．応力テンソルなど，多くの重要なテンソルは対称テンソルである．

それ以外の形のテンソルは，一般相対性理論などで登場する (エネルギー運動量テンソルや，リッチ曲率など)．

定義 15.3.(縮約) テンソルもベクトルの一種であるので，(同じ形の) テンソル同士の和 (足し算) や，スカラー倍は，ベクトルの場合と同様に定義される．行列の積に対応する演算として，テンソルの**縮約**という演算が定義される．一般的に書くと添え字がごちゃごちゃして理解しずらいので，例を挙げて説明する．

例えば，2 階共変 3 階反変 n 次元テンソル x^{cde}_{ab} と 1 階共変 2 階反変 n 次元テンソル y^{jk}_i について，x^{cde}_{ab} の添え字 c と y^{jk}_i の添え字 i を**縮約**する，というのは，

$$z^{dejk}_{ab} = \sum_{i=1}^{n} x^{ide}_{ab} y^{jk}_i$$

という演算により，2 階共変 4 階反変 n 次元テンソル z^{dejk}_{ab} を構成することをいう．一般相対性理論では，このような縮約という演算を頻繁に行うので，

$$x^{ide}_{ab} y^{jk}_i = \sum_{i=1}^{n} x^{ide}_{ab} y^{jk}_i$$

$$x^{cie}_{aj} y^{jk}_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x^{cie}_{aj} y^{jk}_i$$

というように，2 つのテンソルの共変成分と反変成分に同じ文字で書かれた添え字が登場したら，それはつねに上のように縮約されたテンソルを表す，という記号の約束をする．この約束を**アインシュタイン・ルール**という．

このルールに従えば，$V = K^n$ の基底を e^1, e^2,..., e^n で表わし，$V^\vee$ におけるその双対基底を e_1, e_2,..., e_n で表すのがよい．

添え字の上げ下げ． テンソルは，ユークリッド空間とかミンコフスキー空間とか，一般相対性理論でいう時空とか，数学でいうリーマン多様体のように，ある種の距離や角度の概念が定められた集合 (多様体) 上で利用することが多い．この距離や角度は，リーマン曲率とよばれる 2 階共変対称テンソル g_{ij} で記述される．例えば，3 次元ユークリッド空間では，

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，特殊相対性理論で登場するミンコフスキー空間では，0 番目の座標を時間軸に選んで，

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である (c は真空中の光速．符号をすべて反転して考えることも多い)．一般相対性理論で登場する曲がった空間では，曲率は上のような対角行列にはならない．

この n 次正方行列 (g_{ij}) の逆行列を (g^{ij}) と表す．さて，1 階共変ベクトル x_i, 1 階反変ベクトル y^j について，

$$x^j = g^{ij}x_i = \sum_i g^{ij}x_i$$

$$y_i = g_{ij}y^j = \sum_j g_{ij}y^i$$

として 1 階反変ベクトル x^j と 1 階共変ベクトル y_i を定めることができる．一般に，高階のテンソルに対しても，上と同様な規則で添え字の上げ下げを行うのが，物理的には合理的であるので，物理の教科書では，この規則に従って，添え字を操作する．ただし，添え字について対称性のないテンソルについて，この操作を行うときは，十分な注意が必要である．

ベクトル場，テンソル場. M は空間，時空，多様体などとする．また，V はベクトル空間とする．M から V への (通常はなめらかな) 写像を**ベクトル場**という．

また，$T = V^{\otimes r}$ とか $T = V^{\otimes r} \otimes_K (V^\vee)^{\otimes q}$ のとき，M から V への (通常はなめらかな) 写像を**テンソル場**という．つまり，M の各点にテンソルがテンソルが割り当てられていて，M 上を点が移動するとき，それにつれてテンソルが (滑らかに) 変化するのがテンソル場である．

一般相対性理論では，テンソル場のことを単にテンソルと呼んでいる．力学でも，テンソル場の意味で「テンソル」という語を使うことが少なくない．

滑らかなベクトル場やテンソル場には，その偏微分が定義できるが，それは座標系の選び方に依存して不便なので，**共変微分**という概念を定義して利用する．それは，リーマン幾何学の話になるので割愛する．一般相対性理論の教科書にも書いてあるので，そちらを読んで欲しい．