

Numerical simulation of wind flow in Lisbon (Portugal) based on digital color image and finite difference method

Man Zhou* and Hideyuki Koshigoe **

* Graduate School of Engineering, Chiba University

** Department of Urban Environment Systems, Chiba University

Abstract. In this article we propose a numerical method coupled with digital color image and show numerical simulations for wind flow in Lisbon downtown, Portugal. The characteristics of numerical computation we present here are to combine the digital color image and the finite difference method. In fact, we notes that the digital color image consists of so many pixels and that each pixel forms a small square, is addressable and moreover has the color intensity of RGB. Using these informations, a new finite difference method is constructed. We call it a digital finite difference method. This idea is very usefull to compute the Navier-Stokes equations in any domain of arbitrary shape and it is possible to widely apply various problems in the environmental mathematics. In this article we apply this idea to numerical simulations for wind flow from Tejo River(Rio Tejo) to Lisbon downtown in Portugal.

** Corresponding author,

E-mail Address: koshigoe@faculty.chiba-u.jp (H.Koshigoe)

デジタルカラー画像と有限差分法を基にしたリスボン市街地 (ポルトガル)における風の流れの数値シミュレーション

周 曼*, 腰越 秀之**

*千葉大学大学院工学研究科

**千葉大学工学部都市環境システム学科

概要 本研究では、デジタルカラー画像を用いた数値計算法を提案し、リスボン市街地（ポルトガル）における風の流れの数値シミュレーションを示す。ここで提案する数値計算の特徴はデジタルカラー画像と有限差分法を結合することである。実際、デジタル画像はピクセルから構成され、それは極微小な正方形をしている。また、各ピクセルは、赤（R）、緑（G）、青（B）の輝度値、および、アドレスを有している。これらの情報を援用することによって、新しい有限差分法が構成できる。我々はこれをデジタル的有限差分法と呼んでいる。このアイディによるとどのような領域形状でも数値計算が出来るし、いろいろな環境数理問題にも広く応用が可能である。本稿では、リスボン市街地の画像データをもとにテージョ川から市街地への風の流れの数値計算に応用する。

1 はじめに

本研究では画像のピクセル情報を基に、仮想領域と正方格子による有限差分法の数値計算法を示す。対象とする問題はリスボン（ポルトガル）市街地（図 1）における風の流れの数値シミュレーションである。

リスボンは南にテージョ川が流れ、北に向かって市街地が整然と広がっている。下図 1 の青色はテージョ川の一部を示し、黒色は建物であり、 A はコメルシオ広場、 B はロシオ広場、 C はフィゲラ広場である。数値シミュレーションでは、テージョ川から吹く風が A から建物の間を通過して、 B, C に抜けていく様子を示す。

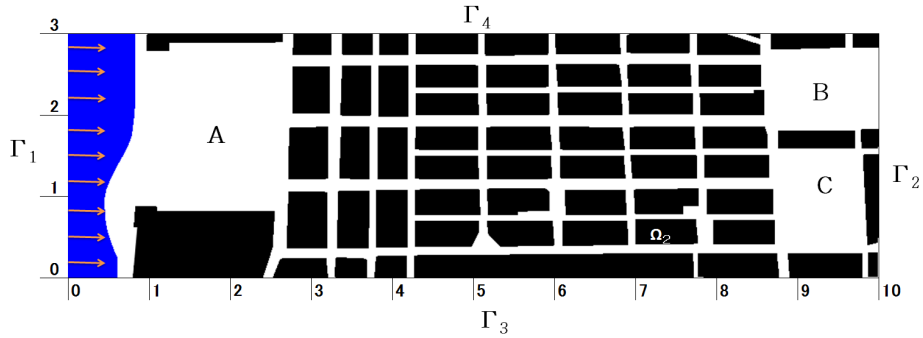


図 1 The domain of analysis.

図 1 の長方形領域 Ω は 10×3 である。領域 Ω_2 は Ω 内の建物で黒いブロック領域、領域 Ω_3 は Ω 内の川で青い領域、および、 $\Omega_1 = \Omega \setminus (\overline{\Omega_2 \cup \Omega_3})$ とおく。図 1 の Γ_1 が風の流入口で、 $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ が Ω の境界を表わす。

本研究で考察する Navier-Stokes 方程式と境界条件は次の通りである。

領域 Ω_1 における Navier-Stokes 方程式と連続の式：

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta v \quad \text{in } (0, T) \times \Omega_1 \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \text{in } (0, T) \times \Omega_1 \quad (1.2)$$

Ω_2 の側面 γ 上の v, p の境界条件:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{on } (0, T) \times \gamma \\ v = 0 & \text{on } (0, T) \times \gamma \end{cases} \quad (1.3)$$

外周 $\Gamma_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 上の v, p 境界条件:

$$\begin{cases} v = (0.2, 0.0) & \text{on } (0, T) \times \Gamma_1 \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } (0, T) \times \Gamma_2 \\ v = 0.0 & \text{on } (0, T) \times (\Gamma_3 \cup \Gamma_4) \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} p = 0.0 & \text{on } (0, T) \times \Gamma_2 \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{on } (0, T) \times (\partial\Omega_1 \setminus \Gamma_2) \end{cases} \quad (1.5)$$

および、初期条件：

$$v = 0.0, p = 0.0 \quad \text{in } (0, T) \times \Omega_1 \quad (1.6)$$

この問題の数値計算において、我々は正方格子を用い、流速ベクトルと圧力を同一の正方格子点上にとる。正方格子を用いる着想の原点はデジタル画像にある。実際、デジタル画像の基礎単位は極微小な正方形のピクセルから構成されていながら、輪郭がはっきりした画像になっている。そこから、我々は任意の領域をピクセルで近似し、ピクセル上の有限差分法を構成する。

本研究の内容は、次の通りである：

- (1) ピクセルの集合としてセルの概念を導入する。
- (2) 各ピクセルのデジタルカラー (R, G, B) の輝度値を用いて、セルの輝度値を定義する。
- (3) 各セルの輝度値を求めて、川、広場、建物、道路をデジタル的に近似する。
- (4) セルと仮想領域法を用いた有限差分法の数値計算アルゴリズムを示す。
- (5) (1.1)-(1.5) の数値シミュレーションを示す。

以後、便宜的に、黒いブロックが占める領域を障害物と呼ぶことにする。

2 画像のピクセルによる領域 ($\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$) の決定方法

2.1 領域 ($\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$) とピクセル

Ω_1 は広場と道路、 Ω_2 は建物 (黒いブロック)、 Ω_3 はテージョ川をあらわす。 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ を含む対象領域 Ω を画像的に確定する。それは Ω_1 を「白」、 Ω_2 を「黒」、 Ω_3 を「青」とするデジタルカラー画像を作成である。今回、その画像は図2のような 1000×300 (横 \times 縦) ピクセルで構成されている。デジタルカラー画像の各ピクセルは赤 (R)、緑 (G)、青 (B) の輝度値と位置情報を持つので、その情報を数値計算に援用する。

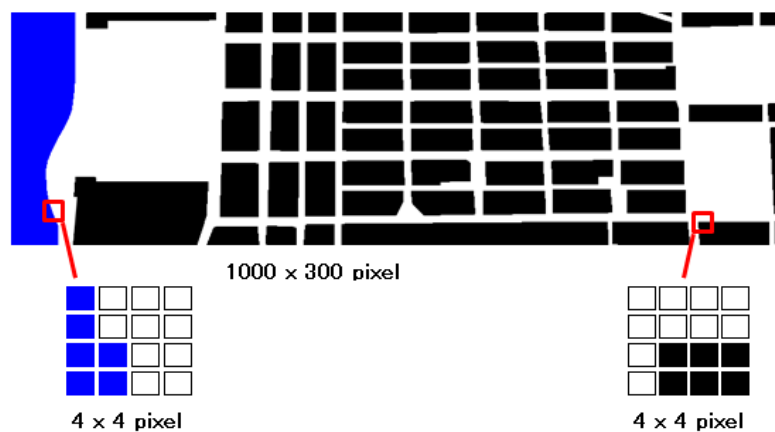


図2 The image expanded partly.

2.2 ピクセルによるセルの定義と計算格子点との関係

画像のピクセルを縦・横に4個ずつとった 4×4 個のピクセルの集合を我々は「セル」と呼び、セルの中心に数値計算上の格子点を配置する。この格子点の属性は、セル内のピクセルの輝度値(R,G,B)によって決定される。

図3は、セルと格子点の関係を示している。正方形の破線がセルでその中心に格子点を配置している([5],[6],[7],[8],[9])。

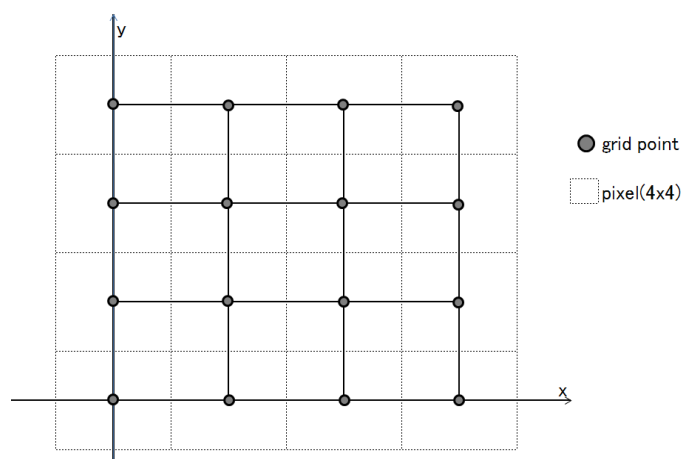


図3 The relation between grid point and pixel.

2.3 ピクセルの輝度値による $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ のデジタル的近似

各セル(格子点)が画像として領域 Ω_2 の外にあるか内にあるかを決定する方法をのべる。デジタルカラーによって処理された画像の各ピクセルは(R,G,B)の輝度値をもっている。各セルにおいて、セル内の 4×4 個のピクセルの輝度値を用いて、(2.1)式を定義する。

$$\begin{cases} y_R = \frac{\text{セル内のピクセルの } R \text{ の輝度値の総和 } (x_R)}{16} \\ y_G = \frac{\text{セル内のピクセルの } G \text{ の輝度値の総和 } (x_G)}{16} \\ y_B = \frac{\text{セル内のピクセルの } B \text{ の輝度値の総和 } (x_B)}{16} \end{cases} \quad (2.1)$$

本研究では、セルの輝度値を用いた $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ のデジタル的近似 $\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3$ を次のように定める:

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_2 &= \{ \text{セルの集合} ; y_R = 0.0, y_G = 0.0, y_B = 0.0 \}, \\ \tilde{\Omega}_3 &= \{ \text{セルの集合} ; y_R = 0.0, y_G = 0.0, y_B = 255.0 \}, \\ \tilde{\Omega}_1 &= \Omega \setminus (\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Omega}_3). \end{aligned}$$

3 数値計算法(セルの輝度値を用いた仮想領域法)

3.1 Navier-Stokes 方程式の再定式化

まず、領域 Ω_1 におけるNavier-Stokes方程式に対する仮想領域法を述べる。領域 Ω_1 におけるNavier-Stokes方程式(1.1)と連続の式(1.2):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\nabla p + \frac{1}{Re}\Delta v \quad \text{in } (0, T) \times \Omega_1 \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \text{in } (0, T) \times \Omega_1 \quad (1.2)$$

から、次の圧力ポアソン方程式が数値計算の視点から導出される (参照, 5. 注 (圧力ポアソン方程式)):

$$-\Delta p = \frac{\partial(\nabla \cdot v)}{\partial t} + \nabla \cdot ((v \cdot \nabla)v) \quad \text{in } (0, T) \times \Omega_1 \quad (3.1)$$

この方程式には、 Ω_2 の境界 γ 上にノイマン条件:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{on } (0, T) \times \gamma \quad (3.2)$$

が課されている。この点を仮想領域法で処理する。実際、ポアソン方程式のノイマン問題に対して仮想領域法が知られているからである (河原田 [1], J.L.Lions[2],[4])。それは次の特異摂動の関数:

$$a(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{on } \Omega_1 \\ \varepsilon & \text{on } \Omega_2 \end{cases} \quad (3.3)$$

を導入し、

$$f = \begin{cases} \frac{\partial(\nabla \cdot v)}{\partial t} + \nabla \cdot ((v \cdot \nabla)v) & \text{in } \Omega_1 \cup \Omega_3 \\ 0 & \text{in } \Omega_2 \end{cases} \quad (3.4)$$

とおき、方程式 (3.1) を次の方程式:

$$-\nabla \cdot (a(x, y)\nabla p) = f \quad \text{in } (0, T) \times \Omega \quad (3.5)$$

に置き換えて、この方程式と外周 $\Gamma_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 上の p の境界条件:

$$\begin{cases} p = 0.0 & \text{on } (0, T) \times \Gamma_2 \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{on } (0, T) \times (\partial\Omega_1 \setminus \Gamma_2) \end{cases} \quad (3.6)$$

を用いた問題に定式化することである。

河原田や J.L.Lions の解析方法を用いると、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の時、(3.3)-(3.6) の解がノイマン境界条件:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{on } (0, T) \times \gamma$$

を満たす解に収束することが示せる。本研究では、この立場から、ピクセル情報を用いた Navier-Stokes 方程式を考察する。

3.2 ピクセル情報に基づく数値計算アルゴリズム

画像のピクセル情報によって、セルによる領域 $\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3$ が決まっているので、

$$\tilde{a}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{on } \tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_3 \\ \varepsilon & \text{on } \tilde{\Omega}_2 \end{cases}$$

とおいて、(3.5) を

$$-\nabla \cdot (\tilde{a}(x, y)\nabla p) = f \quad \text{in } (0, T) \times \Omega \quad (3.7)$$

の形に再定式化する。この時、境界値問題 (3.6)-(3.7) は数値的に全領域 Ω で解ける。
次に、(3.6)-(3.7) の数値解 p を用いて、速度ベクトル v を数値計算する。具体的には、

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -a(x, y)\nabla p + \frac{1}{Re}\Delta v \quad \text{in } (0, T) \times \Omega \quad (3.8)$$

および、外周 $\Gamma_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 上の v の境界条件：

$$\begin{cases} v = (0.2, 0.0) & \text{on } (0, T) \times \Gamma_1 \\ \frac{\partial v}{\partial n} = (0.0, 0.0) & \text{on } (0, T) \times \Gamma_2 \\ v = (0.0, 0.0) & \text{on } (0, T) \times (\Gamma_3 \cup \Gamma_4) \end{cases} \quad (3.9)$$

の下で (3.8) を陰解法、3次精度上流差分 ([4.9]) を用いて計算する。このとき、同時に：

$$v = (0.0, 0.0) \quad \text{in } (0, T) \times \Omega_2 \quad (3.10)$$

$$v = (0.2, 0.0) \quad \text{in } (0, T) \times \Omega_3 \quad (3.11)$$

を満たすように数値計算する。

以上より、本研究で開発した数値計算アルゴリズムは次の通りである。

- (1) 全領域 Ω において、(3.6),(3.7) の圧力ポアソン方程式を数値的に解く。
- (2) 手順 (1) で得られた圧力を用いて、全領域 Ω における (3.8)-(3.9) の Navier-Stokes 方程式を数値的に解いて、速度ベクトルを求める。
- (3) 時間ステップを1つ進め、上の各ステップ (1),(2) を繰り返して、圧力と速度を順次求めていく。

4 数値計算シミュレーション

最初の問題 (1.1)-(1.5) を上記の数値計算アルゴリズム (1)-(3) によって計算する。この計算のパラメータは次に示す通りである：

画像のピクセル数：300,000(1000 × 300)pixel

レイノルズ数： $Re = 2,000$

時間の刻み幅： $\Delta t = 0.01$

step 数=1000 の時、 $\max U=0.847502$ 、 $\min U=0.0$ 、数値計算結果は図 4 のようになる。

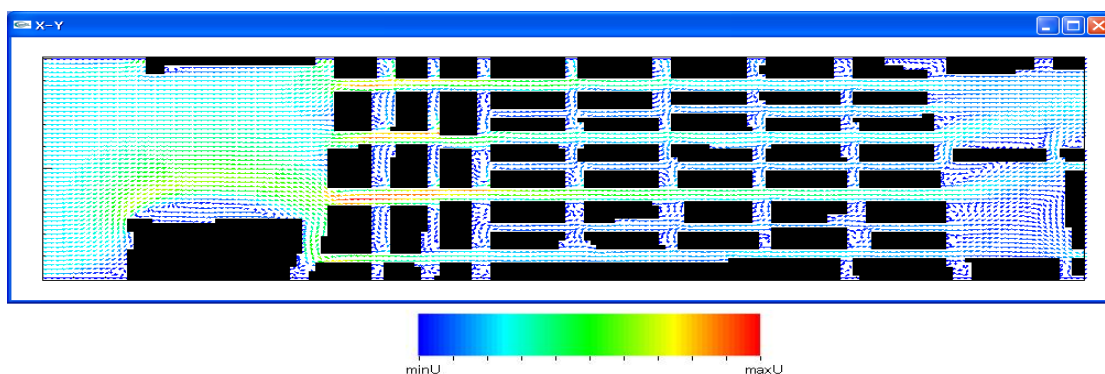


図 4 The numerical simulations by OpenGL.

step 数=5000 の時、maxU=0.847747、minU=0.0、数値計算結果は図 5 のようになる。

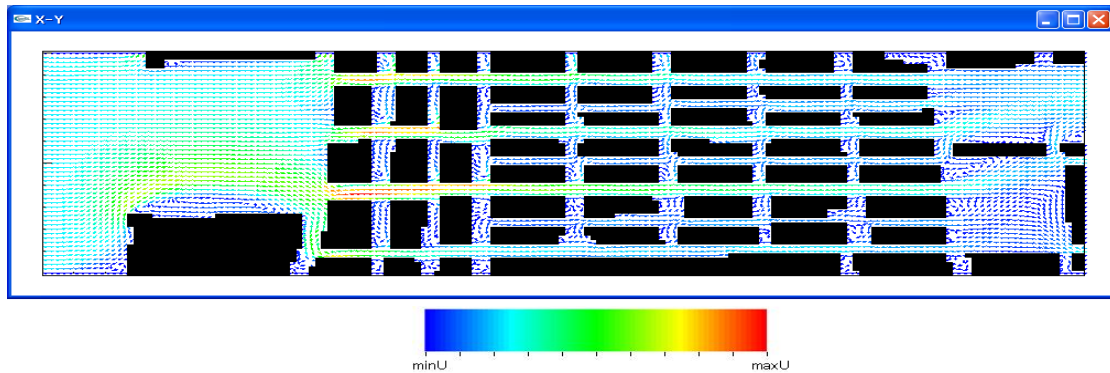


図 5 The numerical simulations by OpenGL.

この数値計算結果は、テージョ川から吹く風が建物と建物の間に良く入って、通り抜けている。したがって、リスボンの市街地全体が風の道になっているので、日本のようなヒートアイランド現象は生じないと予想できる。

5 注 (圧力ポアソン方程式)

非圧縮性流体の運動を支配する方程式は Navier-Stokes 方程式 (1.1)、および連続の式 (1.2) である:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\nabla p + \frac{1}{Re}\Delta v, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot v = 0. \quad (1.2)$$

ここで、 Re はレイノルズ数である。(1.1) の両辺の発散をとると

$$-\Delta p = \frac{\partial(\nabla \cdot v)}{\partial t} + \nabla \cdot ((v \cdot \nabla)v) - \frac{1}{Re}\Delta(\nabla \cdot v) \quad (4.1)$$

になる。数値計算では、時間の刻み幅 Δt は小さい数なので、(4.1) の右辺の第 1 項が第 3 項よりも計算に大きく影響する。それ故に、数値計算では、圧力ポアソン方程式として、次式:

$$-\Delta p = \frac{\partial(\nabla \cdot v)}{\partial t} + \nabla \cdot ((v \cdot \nabla)v) \quad (3.1)$$

が採用されている。

参考文献

- [1] H. Fujita, H. Kawahara, H. Kawarada, Distribution theoretic approach to fictitious domain method for Neumann problems, East-West j. Numer. Mathe. 3 (2) (1995) 111-126.
- [2] R. Glowinski, J. L. Lions, R. Tremolieres, Numerical Analysis of Variational Inequalities, in: Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 8, Noth-Holland, 1981.
- [3] H. Koshigoe, T. Shiraishi, M. Ehara, Distribution algorithm in finite difference method and its application to a 2D simulation of temperature inversion, Journal of computational and Applied Mathematics, 232 (2009), 102-108.

- [4] J.L.Lions, *Perturbations Singulieres dans les Problems aux Limites et en Control Optimal*, Lecture Notes in Mathematics 323, Springer-Verlag, 1973.
- [5] T. Yoshii and H. Koshigoe, *A computational method for groundwater flow through industrial waste by use of digital color*, Lecture Notes in Computer Science 6329, Springer, pp.288-pp.296, 2010.
- [6] 佐伯 公美, 小島 智子, 腰越 秀之, *地理情報を利用した差分法の数値計算-仮想領域と OpenGL を用いた可視化について-*, 日本応用数学会 2007 年度年会講演予稿集 (2007), pp256-257.
- [7] 増田 潤一, 佐伯 公美, 腰越 秀之, *2 値画像と差分法による円柱周りのシミュレーション*, 第 21 回数値流体シンポジウム (日本流体力学会) Proceedings CD(2007).
- [8] 増田 潤一, 佐伯 公美, 松山 孝子, 腰越 秀之, *画像のピクセルと仮想領域を用いた 3 つの円柱周りのシミュレーション*, 第 57 回理論応用力学講演会講演論文集 (2008), pp433-434.
- [9] 木村武洋, 増田潤一, 腰越秀之, *3 次元球周りの流れの数値シミュレーションと応用*, 日本応用数学会 2009 年度年会講演予稿集 (2009), pp225-226.