

平成12年度  
自然科学研究科 博士前期課程  
学力検査問題  
(数学・情報数理学専攻)

数学A

平成11年9月7日(火)  
9時00分～12時00分

「注意事項」

1. 問題は7題であり、これらの中から 任意に4題選んで 解答すること。  
(5題以上解答することは認められない。)
2. 解答用紙は4枚あるので、そのすべてに受験番号と氏名を記入のこと。
3. 各解答用紙には、解答しようとする 問題番号を明記し、  
1枚に1題だけ を解答すること。  
解答不能の場合も、解答用紙を持ち帰ってはならない。
4. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

**A1**  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  とおき、 $A$  によって定まる  $\mathbb{R}^3$  から  $\mathbb{R}^3$  への線形写像  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  も  $A$  で表す。

- (1)  $\text{Im } A$  の基底を 1 つ与えよ。
- (2)  $\text{Ker } A$  の基底を 1 つ与えよ。
- (3)  $\text{Im } A^2$  の基底を 1 つ与えよ。
- (4)  $\mathbb{R}^3$  のベクトル  $v$  を適当に選び、 $v, Av, A^2v$  が  $\mathbb{R}^3$  の基底になるようにせよ。
- (5) 3 次の可逆 (正則) 行列  $S$  で

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるものを 1 つ与えよ。ただし、 $S$  の代りに  $S$  によって定まる  $\mathbb{R}^3$  から  $\mathbb{R}^3$  への線形写像を与えてもよい。

**A2**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  とおく。

- (1)  $A$  は可逆であることを示せ。
- (2)  $A$  の実固有値を求めよ。
- (3) 3 つのベクトル

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

によって生成される  $\mathbb{R}^4$  の部分空間  $V$  の正規直交基底を 1 つ与えよ。

- (4) 上 (半)3 角行列  $B$  と直交行列  $T$  を用いて

$$A = TB$$

の形に表せ。

**A3** 以下の問いに答えよ.

(1)  $x > 0$  に対し, 広義積分

$$I = \int_0^{\infty} e^{-tx} \cos(yt) dt$$

を計算せよ.

(2) 関数  $f(x) = \log(1 + x^2)$  を原点において Taylor 級数展開し, またその収束半径を求めよ.

**A4** 以下の問いに答えよ.

(1) 次の領域

$$D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 1 + \sqrt{1 - y}, 0 \leq y \leq 1\}$$

を図示せよ.

(2) 次の重積分を計算せよ.

$$\int \int_D e^{y/x} dx dy.$$

**A5**  $X$  を位相空間とし,  $\mathcal{O}$  をその開集合系とする.

(1)  $X$  の部分集合  $A$  に対して, その内部  $A^\circ$ , 閉包  $\bar{A}$ , 境界  $\partial A$  を  $\mathcal{O}$  を用いて定義せよ.

(2) 次の命題が真ならば証明を, 偽ならば反例を与えよ.

(イ)  $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$  が  $O_1 \cap O_2 = \phi$  を満たせば,  $\overline{O_1} \cap O_2 = \phi$ .

(ロ)  $O \in \mathcal{O}$  で, かつ  $A$  が  $X$  の部分集合ならば,  $O \cap \bar{A} \subset \overline{A \cap O}$ .

(ハ)  $B$  が  $X$  の部分集合ならば,  $\partial(B^\circ) \subset \partial B$ .

**A6** 連続型確率変数  $X, Y, Z$  は同時確率密度関数

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = \begin{cases} 4xyz + 4(1-x)(1-y)(1-z) & (0 < x, y, z < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつとする。

- (1)  $X$  の周辺分布関数を求めよ。さらに、その平均と分散を求めよ。
- (2)  $X$  と  $Y$  の相関係数を求めよ。
- (3) 条件付確率  $P(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2} | Z \leq \frac{1}{2})$  を求めよ。

**A7** 正の自然数に対してその数を 10 進数表記で 3 桁ずつ区切って出力する (たとえば 123456 に対して 123,456 を出力する) という意図で、以下の Pascal プログラムを書いた。

```
program digits(input, output);
const BASE = 10; C = 3;
var n: integer;
procedure digs(n, d: integer);
  begin
    if n > 0 then
      begin
        digs(n div BASE, d+1);
        if d mod C = 0 then write(',');
        write(n mod BASE : 1)
      end
    end;
begin
  readln(n);
  digs(n, 1);
  writeln
end.
```

- (1) このプログラムは意図通りには動かない。どのような入力に対して意図通りに動かないか指摘せよ。(例だけではなく、一般的な条件を述べよ。)
- (2) このプログラムが意図通りに動くように修正し、プログラムの説明をせよ。